ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αρμονική Ανάλυση

Ενότητα: Ολοκλήρωμα Lebesgue

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

1 Ολοκλήρωμα Lebesgue

1.1 Μετρήσιμες συναρτήσεις

Οι συναρτήσεις για τις οποίες θα επιχειρήσουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι συναρτήσεις με πεδίο ορισμού κάποιο μετρήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}^d$ και τιμές στην επεκτεταμένη ευθεία $[-\infty, +\infty]$ των πραγματικών αριθμών. Αυτό που ζητάμε είναι όλα τα σύνολα της μορφής $f^{-1}((a,b))$, όπου $a < b$ στο $\mathbb{R}$, να είναι μετρήσιμα.

1.1.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Ορισμός 1.1.1 (Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση). *Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται* **Lebesgue μετρήσιμη**, *ή απλά* **μετρήσιμη**, *αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο*

(1.1.1.1) $$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty))$$

είναι μετρήσιμο.

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι στη θέση των ημιευθειών $(a, +\infty)$ του Ορισμού 1.1.1 θα μπορούσαμε να πάρουμε οποιαδήποτε άλλη κλάση ημιευθειών.

Πρόταση 1.1.2. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) Η f είναι μετρήσιμη.

(ii) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) \geqslant a\} = f^{-1}([a, +\infty))$ είναι μετρήσιμο.

(iii) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) < a\} = f^{-1}((-\infty, a))$ είναι μετρήσιμο.

(iv) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) \leqslant a\} = f^{-1}((-\infty, a])$ είναι μετρήσιμο.

Απόδειξη. (i) ⇒ (ii) Παρατηρήστε ότι

(1.1.1.2) $$\{x \in A : f(x) \geqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in A : f(x) > a - \frac{1}{n}\right\}.$$

(ii) ⇒ (iii) Παρατηρήστε ότι

(1.1.1.3) $$\{x \in A : f(x) < a\} = A \setminus \{x \in A : f(x) \geqslant a\}.$$

(iii) ⇒ (iv) Παρατηρήστε ότι

(1.1.1.4) $$\{x \in A : f(x) \leqslant a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in A : f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}.$$

(iv) ⇒ (i) Παρατηρήστε ότι

(1.1.1.5) $$\{x \in A : f(x) > a\} = A \setminus \{x \in A : f(x) \leqslant a\}.$$

Αφού αριθμήσιμες τομές, αριθμήσιμες ενώσεις και συνολοθεωρητικές διαφορές μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα, η ισοδυναμία των (i)-(iv) προκύπτει άμεσα από τις παραπάνω σχέσεις. □

Πρόταση 1.1.3. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, όλες οι αντίστροφες εικόνες διαστημάτων – μέσω της f – είναι μετρήσιμα σύνολα. Το ίδιο ισχύει για τα σύνολα $\{x \in A : f(x) = a\}$, $a \in \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Ο ισχυρισμός είναι απλή συνέπεια της Πρότασης 1.1.2. Για παράδειγμα, αν $J = [a, b]$ τότε το σύνολο

(1.1.1.6) $$f^{-1}(J) = \{x \in A : a \leqslant f(x) \leqslant b\} = \{x \in A : f(x) \geqslant a\} \cap \{x \in A : f(x) \leqslant b\}$$

είναι μετρήσιμο. Τελείως ανάλογα, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το σύνολο

(1.1.1.7) $$\{x \in A : f(x) = a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in A : a - \frac{1}{n} < f(x) < a + \frac{1}{n}\right\}$$

είναι μετρήσιμο. □

Ορισμός 1.1.4 (Borel μετρήσιμη συνάρτηση)**.** *Έστω A σύνολο Borel του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται* **Borel μετρήσιμη** *αν, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, το σύνολο*

(1.1.1.8) $$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty))$$

είναι σύνολο Borel. Τα ακριβή ανάλογα των Προτάσεων 1.1.2 και 1.1.3 ισχύουν για τις Borel μετρήσιμες συναρτήσεις (διατυπώστε αντίστοιχες Προτάσεις και αποδείξτε τις).

Παραδείγματα 1.1.5. *(α) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι μετρήσιμη. Πράγματι, για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) > a\}$ είναι ανοικτό στο A, δηλαδή είναι της μορφής $A \cap U$ για κάποιο ανοικτό υποσύνολο U του $\mathbb{R}$. Συνεπώς, είναι μετρήσιμο σύνολο ως τομή δύο μετρήσιμων συνόλων.*

(β) Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ενός μετρήσιμου συνόλου A είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Πράγματι, έχουμε

(1.1.1.9) $$\{x \in \mathbb{R} : \chi_A(x) > a\} = \begin{cases} \mathbb{R}^d, & \text{αν } a < 0 \\ A, & \text{αν } 0 \leqslant a < 1 \\ \emptyset, & \text{αν } a \geqslant 1 \end{cases}$$

δηλαδή, μετρήσιμο σύνολο σε κάθε περίπτωση. Ειδικότερα, η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.

(γ) Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Κάθε μονότονη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in A : f(x) > a\}$ είναι η τομή του A με μια ημιευθεία, άρα είναι μετρήσιμο.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Γράφουμε $T = \{x \in A : f(x) > a\}$ και $t := \inf T$.

(i) Αν $t = -\infty$ τότε $T = A$. Πράγματι, αν $x \in A$ τότε υπάρχει $y \in T$ ώστε $y < x$. Αυτό σημαίνει ότι $y \in A$ και $f(y) > a$, όμως η f είναι αύξουσα και από την $y < x$ έπεται ότι $f(x) \geqslant f(y) > a$, δηλαδή $x \in T$. Άρα, σε αυτήν την περίπτωση το $T = A$ είναι μετρήσιμο.

(ii) Αν $t \in \mathbb{R}$ τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- *$t \in T$: Αυτό σημαίνει ότι $t \in A$ και $f(t) > a$. Τότε, ισχύει $T = A \cap [t, +\infty)$. Πράγματι, αν $x \in A$ και $x \geqslant t$ τότε $f(x) \geqslant f(t) > a$, άρα $x \in T$. Αντίστροφα, αν $x \in T$ τότε $x \in A$ και $x \geqslant t$ γιατί ο t είναι κάτω φράγμα του T.*

- *$t \notin T$: Θα δείξουμε ότι $T = A \cap (t, +\infty)$. Πράγματι, αν $x \in A$ και $x > t$ τότε (χαρακτηρισμός του infimum) υπάρχει $y \in T$ ώστε $t < y < x$ και αυτό μας δίνει την $f(x) \geqslant f(y) > a$, άρα $x \in T$. Αντίστροφα, αν $x \in T$ τότε $x \in A$ και $x > t$ γιατί ο t είναι κάτω φράγμα του T και δεν ανήκει στο T.*

Σε κάθε περίπτωση το $T = \{x \in A : f(x) > a\}$ είναι η τομή του A με μια ημιευθεία. □

Πρόταση 1.1.6 (πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων)**.** *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

(i) Η $f + g$ είναι μετρήσιμη.

(ii) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση λf είναι μετρήσιμη.

(iii) Η fg είναι μετρήσιμη.

(iv) Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in A$, τότε η $1/f$ είναι μετρήσιμη.

(v) Οι συναρτήσεις $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ και $|f|$ είναι μετρήσιμες.

Απόδειξη. (i) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $f(x) + g(x) < a$, τότε $f(x) < a - g(x)$. Άρα, υπάρχει ρητός q ώστε

(1.1.1.10) $$f(x) < q < a - g(x).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\{x \in A : f(x) + g(x) < a\} &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in A : f(x) < q \text{ και } g(x) < a - q\} \\ &= \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \left(\{x \in A : f(x) < q\} \cap \{x \in A : g(x) < a - q\}\right),\end{aligned}$$

δηλαδή είναι μετρήσιμο σύνολο.

(ii) Έστω $a \in \mathbb{R}$. Αν $\lambda > 0$, τότε

(1.1.1.11) $$\{x \in A : \lambda f(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > a/\lambda\},$$

δηλαδή μετρήσιμο σύνολο. Αν $\lambda < 0$, τότε

(1.1.1.12) $$\{x \in A : \lambda f(x) > a\} = \{x \in A : f(x) < a/\lambda\},$$

δηλαδή μετρήσιμο σύνολο. Σε κάθε περίπτωση, η λf είναι μετρήσιμη (αν $\lambda = 0$, τότε δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα).

(iii) Δείχνουμε πρώτα ότι η f^2 είναι μετρήσιμη. Αν $a < 0$, τότε

(1.1.1.13) $$\{x \in A : f^2(x) > a\} = A,$$

ενώ αν $a \geqslant 0$, τότε

(1.1.1.14) $$\{x \in A : f(x)^2 > a\} = \{x \in A : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in A : f(x) < -\sqrt{a}\}.$$

Σε κάθε περίπτωση, το $\{x : f^2(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο. Τώρα, η fg είναι μετρήσιμη, διότι

(1.1.1.15) $$fg = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4}.$$

(iv) Αν $a = 0$, τότε $\{x \in A : 1/f(x) > 0\} = \{x \in A : f(x) > 0\}$. Αν $a > 0$, τότε

$$\{x \in A : 1/f(x) > a\} = \{x \in A : 0 < f(x) < 1/a\}. \tag{1.1.1.16}$$

Τέλος, αν $a < 0$ τότε

$$\{x \in A : 1/f(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > 0\} \cup \{x \in A : f(x) < 1/a\}. \tag{1.1.1.17}$$

Σε κάθε περίπτωση, το σύνολο $\{x \in A : 1/f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο.

(v) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\{x \in A : \max\{f,g\}(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > a\} \cup \{x \in A : g(x) > a\} \tag{1.1.1.18}$$

και

$$\{x \in A : \min\{f,g\}(x) < a\} = \{x \in A : f(x) < a\} \cup \{x \in A : g(x) < a\}. \tag{1.1.1.19}$$

Άρα, οι $\max\{f,g\}$ και $\min\{f,g\}$ είναι μετρήσιμες. Τέλος, η $|f| = \max\{f,-f\}$ είναι μετρήσιμη. □

Μετρήσιμες συναρτήσεις με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$

Το επεκτεταμένο σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι το $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Επεκτείνουμε την διάταξη του $\mathbb{R}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ ορίζοντας $-\infty < x < +\infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επεκτείνουμε την κλάση των διαστημάτων του $\mathbb{R}$ στην κλάση των διαστημάτων του $\overline{\mathbb{R}}$ προσθέτοντας τα (επεκτεταμένα) διαστήματα $[-\infty, a)$, $[-\infty, a]$, $(a, +\infty]$, $[a, +\infty]$ (όπου $a \in \mathbb{R}$) και $[-\infty, +\infty]$, $[-\infty, +\infty)$, $(-\infty, +\infty]$.

Οι ανοικτές περιοχές του $-\infty$ και του $+\infty$ είναι τα σύνολα $[-\infty, a)$ και $(a, +\infty]$ αντίστοιχα. Οι πράξεις του $\mathbb{R}$ επεκτείνονται με τον γνωστό τρόπο στο $\overline{\mathbb{R}}$. Μη επιτρεπτές πράξεις είναι οι $(+\infty)-(+\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$, $(\pm\infty)/0$, $(\pm\infty)/(\pm\infty)$. Οι συναρτήσεις $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, όπου A μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, λέγονται επεκτεταμένες συναρτήσεις.

Θα επεκτείνουμε τον ορισμό της μετρήσιμης συνάρτησης και στην περίπτωση συναρτήσεων με τιμές στο $\overline{\mathbb{R}}$.

Ορισμός 1.1.7. *Έστω A Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Η f λέγεται* **Lebesgue μετρήσιμη**, *ή απλά* **μετρήσιμη**, *αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο*

$$\{x \in A : f(x) > a\} = f^{-1}((a, +\infty)) \tag{1.1.1.20}$$

είναι μετρήσιμο.

Όλες οι Προτάσεις που αποδείξαμε ως τώρα ισχύουν για (επεκτεταμένες) μετρήσιμες συναρτήσεις (για τις πράξεις μεταξύ συναρτήσεων περιοριζόμαστε στο υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους στο οποίο οι πράξεις είναι επιτρεπτές). Παρατηρήστε ότι, αν η $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, τότε τα σύνολα

$$\{x \in A : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) > n\} \tag{1.1.1.21}$$

και

$$\{x \in A : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f(x) < -n\} \tag{1.1.1.22}$$

είναι μετρήσιμα.

Η έννοια του «σχεδόν παντού»

Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Λέμε ότι η $P(x)$ ισχύει **σχεδόν παντού στο** A αν το σύνολο Z των $x \in A$ για τα οποία δεν ισχύει η $P(x)$ έχει μέτρο μηδέν. Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι αν αλλάξουμε τις τιμές μιας μετρήσιμης συνάρτησης σε ένα σύνολο μέτρου μηδέν, τότε προκύπτει μετρήσιμη συνάρτηση.

Πρόταση 1.1.8. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ συναρτήσεις με $f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού στο A. Αν η f είναι μετρήσιμη, τότε η g είναι κι αυτή μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Θέτουμε $B = \{x \in A : f(x) = g(x)\}$ και $Z = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$. Αφού $\lambda(Z) = 0$, το Z είναι μετρήσιμο, άρα και το $B = A \setminus Z$ είναι μετρήσιμο.

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\{x \in A : g(x) > a\} &= \{x \in B : g(x) > a\} \cup \{x \in Z : g(x) > a\} \\ &= \{x \in B : f(x) > a\} \cup \{x \in Z : g(x) > a\} \\ &= \big(B \cap \{x \in A : f(x) > a\}\big) \cup \{x \in Z : g(x) > a\}.\end{aligned}$$

Το $B \cap \{x \in A : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο διότι το B είναι μετρήσιμο και το $\{x \in A : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο λόγω της μετρησιμότητας της f. Το $\{x \in Z : g(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο συνόλου με μέτρο 0. ΄Αρα, το $\{x \in A : g(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο.

Αφού το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η g είναι μετρήσιμη. □

1.1.2 Ακολουθίες μετρήσιμων συναρτήσεων

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι η μετρησιμότητα διατηρείται για το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

Πρόταση 1.1.9. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$. Τότε,*

1. *Οι συναρτήσεις $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες.*
2. *Αν η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο, τότε η συνάρτηση $f : A \to [-\infty, +\infty]$ με $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. (i) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι το

$$\{x \in A : \sup_n f_n(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) > a\} \tag{1.1.2.1}$$

είναι μετρήσιμο σύνολο, και το

$$\{x \in A : \inf_n f_n(x) < a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) < a\} \tag{1.1.2.2}$$

είναι μετρήσιμο σύνολο. ΄Αρα, οι $\sup_n f_n$ και $\inf_n f_n$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.

(ii) Θυμηθείτε ότι, για κάθε ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών έχουμε

$$\limsup_n a_n = \inf_{m\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\geqslant m} a_k\right) \quad \text{και} \quad \liminf_n a_n = \sup_{m\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\geqslant m} a_k\right). \tag{1.1.2.3}$$

Η ακολουθία $b_m = \sup_{k\geqslant m} a_k$ είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο $\limsup\limits_n a_n$, ενώ η $\gamma_m = \inf\limits_{k\geqslant m} a_k$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στο $\liminf\limits_n a_n$.

Στην περίπτωσή μας, αν θέσουμε

$$g_m(x) = \sup_{k\geqslant m} f_k(x) \quad \text{και} \quad h_m(x) = \inf_{k\geqslant m} f_k(x), \tag{1.1.2.4}$$

τότε, από το (i), κάθε g_m, h_m είναι μετρήσιμη συνάρτηση, και

$$f(x) = \inf_m g_m(x) = \sup_m h_m(x). \tag{1.1.2.5}$$

Άρα, πάλι από το (i), η f είναι μετρήσιμη. □

Σημείωση: Η απόδειξη του (ii) δίνει κάτι γενικότερο: Αν (f_n) είναι οποιαδήποτε ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$, τότε οι συναρτήσεις $\limsup\limits_n f_n$ και $\liminf\limits_n f_n$ που ορίζονται από τις

$$\limsup_n f_n(x) = \inf_{m\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\geqslant m} f_k(x)\right) \quad \text{και} \quad \liminf_n f_n = \sup_{m\in\mathbb{N}}\left(\inf_{k\geqslant m} f_k(x)\right), \tag{1.1.2.6}$$

είναι μετρήσιμες. □

Κλείνουμε αυτήν την Παράγραφο με ένα ακόμα τυπικό παράδειγμα Πρότασης που δείχνει ότι τα σύνολα μέτρου 0 είναι αμελητέα σε σχέση με την μετρησιμότητα.

Πρόταση 1.1.10. *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Αν $f_n : A \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις και $f_n(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού στο A, τότε η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $B = \{x \in A : f_n(x) \to f(x)\}$. Αν $Z = A \setminus B$, τότε $\lambda(Z) = 0$ και το B είναι μετρήσιμο.

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Τότε, το $\{x \in B : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο από την Πρόταση 1.1.9 (οι $f_n : B \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμες, και $f_n \to f$ στο B) και το $\{x \in Z : f(x) > a\}$ είναι μετρήσιμο ως υποσύνολο του Z (το οποίο έχει μέτρο 0). Άρα, το

$$\{x \in A : f(x) > a\} = \{x \in B : f(x) > a\} \cup \{x \in Z : f(x) > a\} \tag{1.1.2.7}$$

είναι μετρήσιμο. Αφού το $a \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η g είναι μετρήσιμη. □

1.1.3 Η συνάρτηση Cantor--Lebesgue

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι η Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ του $\mathbb{R}$ περιέχεται γνήσια στη σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Εισάγουμε την συνάρτηση Cantor-Lebesgue, και, χρησιμοποιώντας την, αποδεικνύουμε την ύπαρξη μετρήσιμων συνόλων τα οποία δεν είναι σύνολα Borel.

Θεωρούμε τα σύνολα C_n που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του συνόλου C του Cantor. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής. Αν $J_1^n, \ldots, J_{2^n-1}^n$ είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα που σχηματίζουν το $[0,1] \setminus C_n$, ορίζουμε $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ για κάθε x στο J_k^n, και επεκτείνουμε γραμμικά σε καθένα από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το C_n ώστε να προκύψει συνεχής συνάρτηση.

Για παράδειγμα, έχουμε $C_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$. Η f_1 είναι σταθερή και ίση με $1/2$ στο $(1/3,2/3)$, γραμμική στο $[0,1/3]$ με $f(0) = 0$ και $f(1/3) = 1/2$, γραμμική στο $[2/3,1]$ με $f(2/3) = 1/2$ και $f(1) = 1$. Στο δεύτερο βήμα, το $[0,1] \setminus C_2$ αποτελείται από τρία ξένα ανοικτά διαστήματα: στο $(1/9,2/9)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $1/4$, στο $(1/3,2/3)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $1/2$, στο $(7/9,8/9)$ η f_2 είναι σταθερή και ίση με $3/4$, ενώ σε καθένα από τα τέσσερα κλειστά διαστήματα του C_2 την επεκτείνουμε γραμμικά σε συνεχή συνάρτηση, ορίζοντας πάλι $f_2(0) = 0$ και $f_2(1) = 1$.

Πρόταση 1.1.11 (συνάρτηση Cantor-Lebesgue). *Η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$. Η f είναι αύξουσα και επί του $[0,1]$. Η εικόνα του C μέσω της f έχει μέτρο $\lambda(f(C)) = 1$.*

Απόδειξη. Από την κατασκευή της η ακολουθία $\{f_n\}$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. Κάθε f_n είναι αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $f_n(0) = 0$ και $f_n(1) = 1$.
2. Αν J_k^n είναι κάποιο από τα ανοικτά διαστήματα που αφαιρούμε στο n-οστό βήμα της κατασκευής του C, τότε η f_n είναι σταθερή στο J_k^n, και

   (1.1.3.1) $$f_n \equiv f_{n+1} \equiv f_{n+2} \equiv \cdots$$

   στο J_k^n.
3. Ισχύει

   (1.1.3.2) $$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Από την τρίτη ιδιότητα ελέγχουμε εύκολα ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία στον $C[0,1]$: αν $m > n$ τότε

(1.1.3.3) $$\|f_m - f_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \|f_{k+1} - f_k\|_\infty \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}} \to 0$$

όταν $m, n \to \infty$. Ο $C[0,1]$ είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, άρα υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα.

Προφανώς, $f_n \to f$ κατά σημείο στο $[0,1]$. Αφού κάθε f_n είναι αύξουσα συνάρτηση με $f_n(0) = 0$ και $f_n(1) = 1$, έπεται ότι η f είναι κι αυτή αύξουσα, συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Ειδικότερα, η f είναι επί του $[0,1]$.

Τέλος, $f(C) = [0,1]$. Πράγματι, από την δεύτερη ιδιότητα της $\{f_n\}$ βλέπουμε ότι η f είναι σταθερή σε κάθε ανοικτό διάστημα J του συμπληρώματος του C, και μάλιστα αυτή η σταθερή τιμή παίρνεται και στα άκρα του J τα οποία ανήκουν στο C. Αφού η f είναι επί του $[0,1]$, κάθε $y \in [0,1]$ είναι ίσο με $f(x)$ για κάποιο $x \in C$. Από την $f(C) = [0,1]$ είναι φανερό ότι $\lambda(f(C)) = 1$. □

Σημείωση. Παρατηρήστε ότι $\lambda([0,1]\setminus C)=1$ και $f'(x)=0$ για κάθε $x\notin C$. Πράγματι, αν $x\notin C$ τότε το x ανήκει σε κάποιο ανοικτό διάστημα J στο οποίο η f είναι σταθερή. Συνεπώς, η f είναι παραγωγίσιμη στο x και $f'(x)=0$. Με άλλα λόγια, η f' είναι σχεδόν παντού ίση με μηδέν, παρόλο που η f είναι αύξουσα και απεικονίζει το $[0,1]$ επί του $[0,1]$.

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση Cantor--Lebesgue, μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη μετρήσιμων συνόλων τα οποία δεν είναι σύνολα Borel. Θα χρειαστούμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα 1.1.12. *Έστω A σύνολο Borel στο $\mathbb{R}$ και έστω $f:A\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, για κάθε Borel σύνολο $B\subseteq\mathbb{R}$, το $f^{-1}(B)=\{x\in A: f(x)\in B\}$ είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια

(1.1.3.4) $$\mathcal{A}=\{B\subseteq\mathbb{R}:\ \text{το } f^{-1}(B) \text{ είναι σύνολο Borel}\}.$$

Αν B είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό στο A, διότι η f είναι συνεχής. Αφού το A είναι σύνολο Borel, έπεται ότι το $f^{-1}(B)$ είναι σύνολο Borel (εξηγήστε γιατί).

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα – οι λεπτομέρειες αφήνονται ως άσκηση. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ-άλγεβρα και περιέχει τα ανοικτά σύνολα, συμπεραίνουμε ότι η Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ περιέχεται στην $\mathcal{A}$. Από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ έπεται ότι η αντίστροφη εικόνα $f^{-1}(B)$ κάθε Borel συνόλου $B\subseteq\mathbb{R}$ είναι σύνολο Borel. □

Πρόταση 1.1.13. *Υπάρχει Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του συνόλου του Cantor, το οποίο δεν είναι σύνολο Borel.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g:[0,1]\to[0,2]$ με $g(x)=f(x)+x$, όπου f η συνάρτηση Cantor--Lebesgue. Η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί (το ίδιο και η g^{-1}).

Το σύνολο $g(C)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(g(C))=1$. Πράγματι, το $g(C)$ είναι κλειστό ως συνεχής εικόνα του συμπαγούς συνόλου C, άρα είναι μετρήσιμο. Επίσης, η g απεικονίζει κάθε ανοικτό διάστημα J του $[0,1]\setminus C$ στο $\{f(J)\}+J$, δηλαδή σε διάστημα ίσου μήκους. Άρα $\lambda(g([0,1]\setminus C))=\sum\lambda(J)=1$. Έπεται ότι $\lambda(g(C))=1$.

Αφού το $g(C)$ έχει θετικό μέτρο, υπάρχει μη μετρήσιμο υποσύνολο M του $g(C)$. Τότε, το $K=g^{-1}(M)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο διότι είναι υποσύνολο του C το οποίο έχει μηδενικό μέτρο. Όμως, το K δεν είναι σύνολο Borel: αν ήταν, από το Λήμμα 1.1.12 το $M=(g^{-1})^{-1}(K)$ θα ήταν σύνολο Borel ως αντίστροφη εικόνα συνόλου Borel μέσω συνεχούς συνάρτησης. Συνεπώς, το M θα ήταν Lebesgue μετρήσιμο. □

1.1.4 Προσέγγιση μετρήσιμων συναρτήσεων από απλές συναρτήσεις

Ορισμός 1.1.14 (απλή μετρήσιμη συνάρτηση)**.** *Μια συνάρτηση $\phi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ λέγεται απλή μετρήσιμη αν είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων. Δηλαδή, η ϕ είναι* **απλή συνάρτηση** *αν*

(1.1.4.1) $$\phi=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{A_i}$$

για κάποιον $n\in\mathbb{N}$, κάποιους πραγματικούς αριθμούς $a_1,\dots,a_n$ και κάποια μετρήσιμα σύνολα $A_1,\dots,A_n$.

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε από τα σύνολα A_i να είναι ξένα, ούτε από τους αριθμούς a_i να είναι διακεκριμένοι. Δεν είναι όμως δύσκολο να διαπιστώσετε ότι μια συνάρτηση ϕ είναι απλή αν και μόνο αν παίρνει πεπερασμένες το πλήθος διακεκριμένες πραγματικές τιμές (μία από αυτές μπορεί να ισούται με 0). Πράγματι, το σύνολο των τιμών της συνάρτησης ϕ στην (1.2.1.1) περιέχεται στο

(1.1.4.2) $$\left\{\sum_{i\in I} a_i : \emptyset \neq I \subseteq \{1,\dots,n\}\right\} \cup \{0\}$$

(εξηγήστε γιατί). Αν λοιπόν $\{t_1,\dots,t_m\}$ είναι το σύνολο τιμών της ϕ και αν ορίσουμε

(1.1.4.3) $$E_i = \{\phi = t_i\} = \{x \in \mathbb{R}^d : \phi(x) = t_i\},$$

τότε τα σύνολα E_i είναι ξένα και μετρήσιμα, η ένωσή τους μας δίνει το $\mathbb{R}^d$, και

(1.1.4.4) $$\phi = \sum_{i=1}^{m} t_i \chi_{E_i}.$$

Η αναπαράσταση (1.2.1.4) της ϕ είναι μονοσήμαντα ορισμένη (από την ϕ) και λέγεται **κανονική αναπαράσταση** *της ϕ.*

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου δείχνει ότι κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση είναι κατά σημείο όριο μιας αύξουσας ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.1.15. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $f : A \to [0,\infty]$ μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία (ϕ_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $0 \leqslant \phi_1 \leqslant \phi_2 \leqslant \cdots \leqslant f$ ώστε*

(1.1.4.5) $$\phi_n(x) \nearrow f(x)$$

για κάθε $x \in A$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε υποσύνολο του A στο οποίο η f είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Για κάθε $n = 1,2,\dots$ ορίζουμε $C_n = \{x \in A : f(x) \geqslant 2^n\}$ και

(1.1.4.6) $$B_{n,k} = \left\{x \in A : \frac{k}{2^n} \leqslant f(x) < \frac{k+1}{2^n}\right\}, \quad k = 0,1,\dots,2^{2n}-1.$$

Χωρίζουμε δηλαδή το $[0,2^n]$ σε 2^{2n} διαστήματα μήκους 2^{-n} και θεωρούμε τις αντίστροφες εικόνες τους μέσω της f. Αφού η f είναι μετρήσιμη, τα σύνολα C_n και $B_{n,k}$ είναι μετρήσιμα. Τώρα, ορίζουμε μια απλή μετρήσιμη συνάρτηση ϕ_n ως εξής:

(1.1.4.7) $$\phi_n = 2^n \chi_{C_n} + \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{B_{n,k}}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε ϕ_n ικανοποιεί τα εξής:

(i) $0 \leqslant \phi_n \leqslant f$ και η ϕ μηδενίζεται έξω από το A.

(ii) $0 \leqslant f - \phi_n \leqslant 2^{-n}$ στο σύνολο $A \setminus C_n = \{x \in A : f(x) < 2^n\}$.

(iii) $\phi_n(x) = 2^n$ αν $f(x) = \infty$.

Από τα (ii) και (iii) συμπεραίνουμε ότι $\phi_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$. Πράγματι, αν $f(x) = \infty$ τότε

(1.1.4.8) $$\phi_n(x) = 2^n \to \infty = f(x).$$

Αν $f(x) < \infty$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $f(x) < 2^{n_0} \leqslant 2^n$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε, $0 \leqslant f(x) - \phi_n(x) < 2^{-n}$ για κάθε $n \geqslant n_0$, άρα $\phi_n(x) \to f(x)$. Παρόμοιος συλλογισμός δείχνει ότι $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε σύνολο της μορφής $\{x \in A : f(x) \leqslant M\}$, $M > 0$.

Μένει να δείξουμε ότι η (ϕ_n) είναι αύξουσα. Η βασική παρατήρηση είναι ότι

$$\begin{aligned} B_{n,k} &= \{x \in A : k/2^n \leqslant f(x) < (k+1)/2^n\} \\ &= \left\{x \in A : \frac{2k}{2^{n+1}} \leqslant f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right\} \cup \left\{x \in A : \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leqslant f(x) < \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right\} \\ &= B_{n+1,2k} \cup B_{n+1,2k+1}. \end{aligned}$$

Αν $x \in B_{n+1,2k}$, τότε $\phi_n(x) = k/2^n = (2k)/2^{n+1} = \phi_{n+1}(x)$, ενώ αν $x \in B_{n+1,2k+1}$, τότε $\phi_n(x) = k/2^n < (2k+1)/2^{n+1} = \phi_{n+1}(x)$. Τέλος, αν $x \in C_n$ έχουμε $\phi_n(x) = 2^n \leqslant \phi_{n+1}(x)$ (εξηγήστε την τελευταία ανισότητα: θα χρειαστεί να χωρίσετε το C_n στα $B_{n+1,2^{n+1}}, B_{n+1,2^{n+1}+1}, \ldots, B_{n+1,2^{2(n+1)}-1}$ και C_{n+1}).

Σε κάθε περίπτωση $\phi_n(x) \leqslant \phi_{n+1}(x)$, δηλαδή $\phi_n \leqslant \phi_{n+1}$. □

Έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.1.15 για τις f^+ και f^- χωριστά, παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 1.1.16. *Έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία (ϕ_n) απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\phi_n : A \to \mathbb{R}$ με*

(1.1.4.9) $$0 \leqslant |\phi_1| \leqslant |\phi_2| \leqslant \cdots \leqslant |f|$$

και $\phi_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$. Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε υποσύνολο του A στο οποίο η f είναι φραγμένη.

Απόδειξη. Υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες (ψ_n) και (ζ_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων ώστε $\psi_n(x) \to f^+(x)$ και $\zeta_n(x) \to f^-(x)$ για κάθε $x \in A$. Τότε, αν ορίσουμε $\phi_n = \psi_n - \zeta_n$, έχουμε $\phi_n(x) \to f^+(x) - f^-(x) = f(x)$ για κάθε $x \in A$.

Οι f^+ και f^- είναι φραγμένες σε κάθε υποσύνολο B του A στο οποίο η f είναι φραγμένη. Συνεπώς, $\psi_n \to f^+$ και $\zeta_n \to f^-$ ομοιόμορφα στο B, απ' όπου έπεται ότι $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα στο B.

Παρατηρήστε επίσης ότι: αν $C = \{f < 0\}$ τότε $\psi_n \equiv 0$ στο C και $\zeta_n \equiv 0$ στο $A \setminus C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς,

(1.1.4.10) $$|\phi_n| = |\psi_n - \zeta_n| = \max\{\psi_n, \zeta_n\} \leqslant \max\{f^+, f^-\} = |f|.$$

Από την σχέση αυτή και από το γεγονός ότι οι (ψ_n) και (ζ_n) είναι αύξουσες ακολουθίες συναρτήσεων, έπεται επίσης ότι

(1.1.4.11) $$|\phi_n| = \max\{\psi_n, \zeta_n\} \leqslant \max\{\psi_{n+1}, \zeta_{n+1}\} = |\phi_{n+1}|.$$

Από τις (1.2.1.10) και (1.2.1.11) έπεται η (1.2.1.9). □

Παρατηρήστε ότι στην κατασκευή που κάναμε για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.15, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η f είναι μετρήσιμη μόνο για να εξασφαλίσουμε ότι τα C_n, $B_{n,k}$ είναι μετρήσιμα σύνολα, δηλαδή για να συμπεράνουμε ότι οι απλές συναρτήσεις ϕ_n είναι μετρήσιμες. Η σύγκλιση των ϕ_n στην f ισχύει τελείως γενικά.

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 1.1.15 με την Πρόταση 1.1.9 παίρνουμε τον εξής χαρακτηρισμό των μετρήσιμων συναρτήσεων.

Θεώρημα 1.1.17. *Έστω A μετρήσιμο σύνολο και έστω $f : A \to [-\infty, +\infty]$. Η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι κατά σημείο όριο μίας ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων.* □

1.1.5 Οι τρεις «αρχές του Littlewood»

Οι τρεις «αρχές του Littlewood» διατυπώνονται με κάπως «έντονο τρόπο» ως εξής:

1. Κάθε σύνολο είναι σχεδόν ίσο με μια πεπερασμένη ένωση διαστημάτων.
2. Κάθε συνάρτηση είναι σχεδόν συνεχής.
3. Κάθε ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο, συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα.

Φυσικά, πρέπει να δώσει κανείς την ακριβή διατύπωση αυτών των ισχυρισμών (αλλιώς, είναι προφανώς λανθασμένοι). Τα σύνολα και οι συναρτήσεις στα οποία αναφερόμαστε πρέπει να είναι μετρήσιμα και το τι εννοούμε λέγοντας «σχεδόν» πρέπει να γίνει σαφές. Η χρησιμότητα όμως αυτών των προτάσεων είναι μεγάλη.

Θεώρημα 1.1.18 (μετρήσιμα σύνολα)**.** *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) < +\infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν διαστήματα $I_1, \ldots, I_k$ ώστε το σύνολο $E = I_1 \cup \cdots \cup I_k$ να ικανοποιεί την $\lambda(E \triangle A) < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του (εξωτερικού) μέτρου, υπάρχει ακολουθία (I_n) διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) < \lambda(A) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.1.5.1}$$

Αφού η σειρά των $\lambda(I_n)$ συγκλίνει, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.1.5.2}$$

Ορίζουμε $E = I_1 \cup \cdots \cup I_k$. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} \lambda(E \setminus A) &\leqslant \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \setminus A\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) - \lambda(A) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) - \lambda(A) < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

και

$$A \setminus E = A \setminus (I_1 \cup \cdots \cup I_k) \subseteq \bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n, \tag{1.1.5.3}$$

άρα

$$\lambda(A \setminus E) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} I_n\right) \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \lambda(I_n) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.1.5.4}$$

Έπεται ότι

$$\lambda(A \triangle E) = \lambda(A \setminus E) + \lambda(E \setminus A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{1.1.5.5}$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Θεώρημα 1.1.19 (θεώρημα Egorov). *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) < +\infty$ και έστω (f_k) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_k : A \to \mathbb{R}$ η οποία συγκλίνει κατά σημείο στην μετρήσιμη συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ σχεδόν παντού στο A. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ ώστε $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο F_ε.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_k \to f$ παντού στο A (εξηγήστε γιατί). Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το σύνολο

$$A_{n,m} = \left\{ x \in A : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \text{ για κάθε } k \geqslant m \right\} = \bigcap_{k=m}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\}. \tag{1.1.5.6}$$

Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$. Παρατηρήστε ότι

$$A_{n,m+1} = \bigcap_{k=m+1}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\} \supseteq \bigcap_{k=m}^{\infty} \{|f_k - f| < 1/n\} = A_{n,m} \tag{1.1.5.7}$$

δηλαδή, η ακολουθία $(A_{n,m})_{m=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα. Παρατηρήστε επίσης ότι, για κάθε $x \in A$ υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_k(x) - f(x)| < 1/n$ για κάθε $k \geqslant m$, διότι $f_k(x) \to f(x)$. Συνεπώς, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in A_{n,m}$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}. \tag{1.1.5.8}$$

Συνεπώς, $\lambda(A_{n,m}) \to \lambda(A)$. Άρα, μπορούμε να βρούμε $m_n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\lambda(A) < \lambda(A_{n,m_n}) + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}. \tag{1.1.5.9}$$

Ορίζουμε

$$U_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{n,m_n}. \tag{1.1.5.10}$$

Τότε, $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο U_ε. Αυτό αιτιολογείται ως εξής: έστω $\delta > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $1/n < \delta$. Τότε, για κάθε $k \geqslant m_n$ και για κάθε $x \in U_\varepsilon$ έχουμε $x \in A_{n,m_n}$, άρα

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n} < \delta. \tag{1.1.5.11}$$

Δηλαδή, $\|(f_k - f)\,|_{U_\varepsilon}\|_\infty < \delta$ για κάθε $k \geqslant m_n$.

Επίσης, από την (1.1.5.9) βλέπουμε ότι

$$\lambda(A \setminus U_\varepsilon) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \setminus A_{n,m_n}) \right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \setminus A_{n,m_n}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.1.5.12}$$

Το U_ε είναι μετρήσιμο, όχι απαραίτητα κλειστό, σύνολο. Μπορούμε όμως να βρούμε κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq U_\varepsilon$ ώστε $\lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\lambda(A \setminus F_\varepsilon) = \lambda(A \setminus U_\varepsilon) + \lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{1.1.5.13}$$

και από το γεγονός ότι $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο U_ε είναι φανερό ότι $f_k \to f$ ομοιόμορφα στο F_ε. $\square$

Παρατήρηση 1.1.20. *Η υπόθεση ότι $\lambda(A) < +\infty$ είναι απαραίτητη. Αν θεωρήσουμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_k = \chi_{[k,\infty)}$, τότε $f_k(x) \to 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όμως, για κάθε μετρήσιμο $C \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(C) < +\infty$ ισχύει $\| f_k |_{\mathbb{R}\setminus C} \|_\infty = 1$. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση της (f_k) στη μηδενική συνάρτηση σε κάποιο σύνολο F_ε για το οποίο $\lambda(\mathbb{R} \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$. Εξηγήστε τις λεπτομέρειες.*

Θεώρημα 1.1.21 (θεώρημα Luzin)**.** *Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(A) < +\infty$ και έστω $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq A$ ώστε $\lambda(A \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ και η $f|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής συνάρτηση.*

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του Θεωρήματος στην περίπτωση που η f είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση $f = \chi_E$ κάποιου μετρήσιμου υποσυνόλου του A. Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε F κλειστό υποσύνολο του A και G ανοικτό στο A ώστε $V \subseteq E \subseteq G$ και $\lambda(G \setminus F) < \varepsilon/2$. Θεωρούμε τον περιορισμό της f στο $F_1 = V \cup (A \setminus G)$. Τα $V, A \setminus G$ είναι κλειστά στο A και έχουμε $f \equiv 1$ στο V και $f \equiv 0$ στο $A \setminus G$. Μπορούμε τότε να ελέγξουμε ότι η $f|_{F_1}$ είναι συνεχής (εξηγήστε το, για παράδειγμα, με την αρχή της μεταφοράς). Κατόπιν, μπορούμε να βρούμε κλειστό $F \subseteq F_1$ με $\lambda(F_1 \setminus F) < \varepsilon/2$. Τότε, $\lambda(A \setminus F) < \varepsilon$ και η $f|_F$ είναι συνεχής.

Απο τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις υποσυνόλων του A μπορούμε τώρα να περάσουμε σε συναρτήσεις της μορφής

$$\phi = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{E_i}, \tag{1.1.5.14}$$

όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$ και E_i μετρήσιμα υποσύνολα του A (εξηγήστε τις λεπτομέρειες).

Έστω τώρα $f : A \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Από το Θεώρημα 1.1.15 (και το Πόρισμα 1.1.16) υπάρχει ακολουθία (ϕ_n) συναρτήσεων της μορφής (1.1.5.14) ώστε $\phi_n \to f$ στο A. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $A_n \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}$ ώστε η $\phi_n|_{A_n}$ να είναι συνεχής. Επίσης, από το θεώρημα του Egorov μπορούμε να βρούμε $B \subseteq A$ με $\lambda(A \setminus B) < \varepsilon/4$ ώστε $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα στο B. Ορίζουμε

$$U_\varepsilon = B \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right). \tag{1.1.5.15}$$

Τότε,

$$\lambda(A \setminus U_\varepsilon) \leqslant \lambda(A \setminus B) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+3}} = \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.1.5.16}$$

Επίσης, όλες οι $\phi_n|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχείς (διότι $U_\varepsilon \subseteq A_n$ για κάθε n) και $\phi_n|_{U_\varepsilon} \to f|_{U_\varepsilon}$ ομοιόμορφα (διότι $U_\varepsilon \subseteq B$). Έπεται ότι η $f|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχής.

Το U_ε είναι μετρήσιμο, όχι απαραίτητα κλειστό, σύνολο. Μπορούμε όμως να βρούμε κλειστό σύνολο $F_\varepsilon \subseteq U_\varepsilon$ ώστε $\lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\lambda(A \setminus F_\varepsilon) = \lambda(A \setminus U_\varepsilon) + \lambda(U_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{1.1.5.17}$$

και από το γεγονός ότι η $f|_{U_\varepsilon}$ είναι συνεχής είναι φανερό ότι η $f|_{F_\varepsilon}$ είναι συνεχής. □

1.2 Ολοκλήρωμα Lebesgue

Σε αυτήν την παράγραφο θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue. Οι ιδιότητες που θα θέλαμε να ικανοποιεί είναι οι εξής:

(i) Αν το A είναι μετρήσιμο, τότε $\int_A \chi_A \, d\lambda = \lambda(A)$, όπου χ_A είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση του A.

(ii) Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό: αν f, g είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις (ορισμένες στο ίδιο σύνολο) και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε

$$\int (tf + sg)\, d\lambda = t \int f \, d\lambda + s \int g \, d\lambda. \tag{1.2.0.18}$$

(iii) Το ολοκλήρωμα είναι «θετικό»: αν η f είναι ολοκληρώσιμη και $f \geqslant 0$, τότε $\int f \, d\lambda \geqslant 0$. Αφού απαιτούμε και την γραμμικότητα, η θετικότητα είναι ισοδύναμη με την μονοτονία: αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες (ορισμένες στο ίδιο σύνολο) και $f \geqslant g$, τότε $\int f \, d\lambda \geqslant \int g \, d\lambda$.

(iv) Το ολοκλήρωμα ορίζεται για μια ευρεία κλάση συναρτήσεων. Οι φραγμένες Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι Lebesgue ολοκληρώσιμες, και τα δύο ολοκληρώματα συμπίπτουν.

Ο ορισμός του ολοκληρώματος Lebesgue δίνεται σε τρία βήματα. Τελείως σχηματικά, η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε είναι η εξής:

1. Στην §2.2.1 ορίζουμε το ολοκλήρωμα για κάποιες απλές μετρήσιμες συναρτήσεις, τους γραμμικούς συνδυασμούς χαρακτηριστικών συναρτήσεων μετρήσιμων συνόλων με πεπερασμένο μέτρο. Ο ορισμός είναι προφανής από τις ιδιότητες (i) και (ii) που απαιτούμε για το ολοκλήρωμα.
2. Στην §2.2.2 δίνουμε τον ορισμό του $\int f \, d\lambda$ για κάθε μετρήσιμη $f \geqslant 0$. Η απαίτηση της μονοτονίας και το γεγονός ότι κάθε μετρήσιμη μη αρνητική συνάρτηση είναι το όριο μιας αύξουσας ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων υποδεικνύουν ότι το $\int f \, d\lambda$ θα μπορούσε να οριστεί ως το supremum των ολοκληρωμάτων $\int \phi \, d\lambda$ πάνω από όλες τις απλές, μη αρνητικές, ολοκληρώσιμες $\phi \leqslant f$.
3. Στην §2.2.3 δίνουμε τον γενικό ορισμό: $\int f \, d\lambda = \int f^+ \, d\lambda - \int f^- \, d\lambda$, αν το δεξιό μέλος έχει νόημα. Ο ορισμός αυτός επιβάλλεται από την απαίτηση της γραμμικότητας.

Στην πορεία, θα αποδείξουμε τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue. Ιδιαίτερα μας ενδιαφέρουν οι καλές ιδιότητες του ολοκληρώματος Lebesgue σε σχέση με τις συγκλίνουσες ακολουθίες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (θεώρημα μονότονης σύγκλισης και θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης).

Το ολοκλήρωμα Lebesgue ορίζεται καλά για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση που είναι ορισμένη σε κλειστό διάστημα. Ειδικότερα, οι Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες κατά Lebesgue. Στο επόμενο Κεφάλαιο συγκρίνουμε τα δύο ολοκληρώματα.

1.2.1 Απλές μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 1.2.1. *Έστω $\phi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ απλή μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι η ϕ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν το σύνολο*

(1.2.1.1)
$$\{\phi\neq 0\}=\{x\in\mathbb{R}:\phi(x)\neq 0\}$$

έχει πεπερασμένο μέτρο. Αυτό σημαίνει ότι η κανονική αναπαράσταση της ϕ είναι

(1.2.1.2)
$$\phi=\sum_{i=0}^{n}a_i\chi_{A_i},$$

όπου $a_0=0$ και $A_0=\{\phi=0\}$, οι a_i είναι διακεκριμένοι, τα A_i είναι ξένα και μετρήσιμα, και $\lambda(A_i)<+\infty$ αν $i\neq 0$ (αναγκαστικά, $\lambda(A_0)=\infty$). Το ολοκλήρωμα της ϕ ορίζεται από την

(1.2.1.3)
$$\int\phi\,d\lambda=\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda(A_i).$$

Αν υιοθετήσουμε την σύμβαση $0\cdot\infty=0$, μπορούμε να γράψουμε

(1.2.1.4)
$$\int\phi\,d\lambda=\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda(A_i)=\sum_{a\in\mathbb{R}}a\,\lambda(\{\phi=a\}).$$

Λήμμα 1.2.2. *Έστω ϕ ολοκληρώσιμη απλή συνάρτηση και έστω $\phi=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\chi_{E_i}$ τυχούσα αναπαράσταση της ϕ ώστε τα E_i να είναι ξένα και μετρήσιμα. Τότε,*

(1.2.1.5)
$$\int\phi\,d\lambda=\sum_{i=1}^{n}b_i\lambda(E_i).$$

Απόδειξη. Για κάθε $a\in\mathbb{R}$ θέτουμε $J_a=\{i\leqslant n:b_i=a\}$. Τότε,

(1.2.1.6)
$$\{\phi=a\}=\bigcup_{i\in J_a}E_i$$

και

(1.2.1.7)
$$a\,\lambda(\{\phi=a\})=\sum_{i\in J_a}b_i\lambda(E_i).$$

Άρα,

(1.2.1.8)
$$\int\phi\,d\lambda=\sum_{a\in\mathbb{R}}a\,\lambda(\{\phi=a\})=\sum_{a\in\mathbb{R}}\sum_{i\in J_a}b_i\lambda(E_i)=\sum_{i\in\cup_\lambda J_a}b_i\lambda(E_i)=\sum_{i=1}^{n}b_i\lambda(E_i).$$

Δηλαδή, ισχύει η (1.2.1.5). □

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.2.2 μπορούμε να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα είναι γραμμικό και μονότονο (στην κλάση των απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων).

Πρόταση 1.2.3. *Έστω ϕ και ψ απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.*

(i) *Αν $t, s \in \mathbb{R}$, τότε $\int (t\phi + s\psi)\, d\lambda = t\int \phi\, d\lambda + s\int \psi\, d\lambda$.*

(ii) *Αν $\phi \geqslant \psi$, τότε $\int \phi\, d\lambda \geqslant \int \psi\, d\lambda$.*

Απόδειξη. (i) Θεωρούμε τις κανονικές μορφές

(1.2.1.9)
$$\phi = \sum_{i=0}^{n} a_i \chi_{A_i} \quad \text{και} \quad \psi = \sum_{j=0}^{k} b_j \chi_{B_j},$$

των ϕ και ψ (οι a_i είναι διακεκριμένοι, τα A_i ξένα μετρήσιμα με ένωση το $\mathbb{R}^d$, $a_0 = 0$ και $\lambda(A_i) < \infty$ αν $i \neq 0$ – αντίστοιχες ιδιότητες έχουν τα b_j, B_j). Παρατηρούμε ότι, από την $\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \bigcup_{j=0}^{k} B_j = \mathbb{R}^d$ έπεται ότι

(1.2.1.10)
$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{i=0}^{n}\bigcup_{j=0}^{k}(A_i \cap B_j).$$

Τα $A_i \cap B_j$ είναι ξένα, μετρήσιμα, και έχουν πεπερασμένο μέτρο (με την εξαίρεση του $A_0 \cap B_0$). Επίσης,

(1.2.1.11)
$$\phi = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_i \chi_{A_i \cap B_j} \quad , \quad \psi = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} b_j \chi_{A_i \cap B_j}$$

και

(1.2.1.12)
$$t\phi + s\psi = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(ta_i + sb_j)\chi_{A_i \cap B_j}.$$

Από το Λήμμα (1.2.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int (t\phi + s\psi)\, d\lambda &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(ta_i + sb_j)\lambda(A_i \cap B_j) \\
&= t\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_i \lambda(A_i \cap B_j) + s\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} b_j \lambda(A_i \cap B_j) \\
&= t\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{k} \lambda(A_i \cap B_j) + s\sum_{j=0}^{k} b_j \sum_{i=0}^{n} \lambda(A_i \cap B_j) \\
&= t\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda(A_i) + s\sum_{j=0}^{k} b_j \lambda(B_j) \\
&= t\int \phi\, d\lambda + s\int \psi\, d\lambda.
\end{aligned}$$

(ii) Αν $\phi \geqslant \psi$, τότε η $\phi - \psi$ είναι απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση με μη αρνητικές τιμές. Από το (i),

(1.2.1.13)
$$\int \phi\, d\lambda - \int \psi\, d\lambda = \int (\phi - \psi)\, d\lambda \geqslant 0.$$

Η τελευταία ανισότητα είναι προφανής από την (1.2.1.3), αφού $\phi - \psi \geqslant 0$. □

Πόρισμα 1.2.4. *Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $E_1, \ldots, E_n$ – όχι αναγκαστικά ξένα – μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E_i) < \infty, i = 1, \ldots, n$. Τότε,*

(1.2.1.14)
$$\int \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} \right) d\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(E_i).$$

Απόδειξη. Κάθε χ_{E_i} είναι απλή και ολοκληρώσιμη, διότι $\lambda(E_i) < \infty$. Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος για απλές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. □

Ορισμός 1.2.5. *Έστω ϕ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $\mathbb{R}^d$ ορίζουμε*

(1.2.1.15)
$$\int_E \phi \, d\lambda := \int \phi \chi_E \, d\lambda.$$

Η $\phi\chi_E$ είναι απλή και ολοκληρώσιμη: αν $\phi = \sum a_i \chi_{A_i}$, τότε $\phi\chi_E = \sum a_i \chi_{A_i}\chi_E = \sum a_i \chi_{A_i \cap E}$ και τα σύνολα $A_i \cap E$ έχουν πεπερασμένο μέτρο, διότι τα σύνολα A_i έχουν πεπερασμένο μέτρο. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (1.2.1.15) ορίζεται καλά.

Στην περίπτωση που $E = [a, b]$, θα χρησιμοποιούμε και τον συμβολισμό

(1.2.1.16)
$$\int_a^b \phi \, d\lambda := \int_{[a,b]} \phi \, d\lambda.$$

Γενικά, θα αποφεύγουμε τον συμβολισμό $\int_a^b \phi(x)dx$ για το ολοκλήρωμα Lebesgue (ώστε να μην υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης με το ολοκλήρωμα Riemann).

Παρατήρηση 1.2.6. *Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια απλή παρατήρηση. Η συνάρτηση του Dirichlet $\chi_{\mathbb{Q}} : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι απλή και ολοκληρώσιμη (το $\mathbb{Q}$ είναι μετρήσιμο). Έχουμε*

(1.2.1.17)
$$\int_a^b \chi_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = 0$$

για κάθε κλειστό διάστημα $[a, b]$. Θυμηθείτε ότι η $\chi_{\mathbb{Q}}$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

1.2.2 Μη αρνητικές συναρτήσεις

Ορισμός 1.2.7. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε το* **ολοκλήρωμα Lebesgue** *της f ως εξής:*

(1.2.2.1)
$$\int f \, d\lambda = \sup \left\{ \int \phi \, d\lambda \mid 0 \leqslant \phi \leqslant f, \phi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}.$$

Η ποσότητα αυτή είναι καλά ορισμένη (η μηδενική συνάρτηση είναι απλή ολοκληρώσιμη και $0 \leqslant f$), μη αρνητική και μπορεί να πάρει την τιμή $+\infty$. Θα λέμε ότι η f είναι **Lebesgue ολοκληρώσιμη** *αν $\int f \, d\lambda < +\infty$.*

Παρατηρήσεις 1.2.8. *(α) Το πρώτο πράγμα που πρέπει να εξασφαλίσουμε είναι ότι ο νέος ορισμός του ολοκληρώματος συμφωνεί με τον ορισμό του ολοκληρώματος της §2.2.1 στην περίπτωση των μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Δηλαδή ότι, αν η $\phi \geqslant 0$ είναι απλή ολοκληρώσιμη, τότε*

$$\int \phi \, d\lambda = \sup \left\{ \int \psi \, d\lambda \mid 0 \leqslant \psi \leqslant \phi, \psi \text{ απλή ολοκληρώσιμη} \right\}. \tag{1.2.2.2}$$

Αυτό είναι άμεσο, από τη μονοτονία του ολοκληρώματος απλών συναρτήσεων - Πρόταση (1.2.3) - και από την $0 \leqslant \phi \leqslant \phi$.

Παρατηρήστε ότι, με τον νέο ορισμό, έχουμε τώρα ορίσει το $\int \phi$ για κάθε μη αρνητική απλή μετρήσιμη συνάρτηση (δεν απαιτούμε την $\lambda(\{\phi \neq 0\}) < \infty$). Ειδικότερα, αν A είναι οποιοδήποτε μετρήσιμο σύνολο, τότε $\int \chi_A \, d\lambda = \lambda(A)$. Αυτό έπεται από τον ορισμό στην περίπτωση που $\lambda(A) < \infty$, ενώ αν $\lambda(A) = \infty$ έχουμε $\chi_A \geqslant \chi_{A \cap [-n,n]^d}$ άρα

$$\int \chi_A \, d\lambda \geqslant \sup_n \int \chi_{A \cap [-n,n]^d} \, d\lambda = \sup_n \lambda(A \cap [-n,n]^d) = \lambda(A) = \infty. \tag{1.2.2.3}$$

(β) Από τον ορισμό έπονται άμεσα οι εξής ιδιότητες:

1. *Αν $0 \leqslant f \leqslant g$ τότε $\int f \, d\lambda \leqslant \int g \, d\lambda$.*
2. *Αν $t > 0$ και $f \geqslant 0$ τότε $\int (tf) \, d\lambda = t \int f \, d\lambda$.*

(γ) Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση και έστω E μετρήσιμο σύνολο. Ορίζουμε

$$\int_E f \, d\lambda = \int f \chi_E \, d\lambda. \tag{1.2.2.4}$$

Αν $f : E \to [0, \infty]$, επεκτείνουμε την f σε μια συνάρτηση $\tilde{f} : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ θέτοντας $\tilde{f}(x) = 0$ αν $x \notin E$, και ορίζουμε

$$\int_E f \, d\lambda = \int \tilde{f} \, d\lambda. \tag{1.2.2.5}$$

Παρατηρήστε ότι η $\tilde{f}$ είναι μετρήσιμη και $\int_E \tilde{f} \, d\lambda = \int \tilde{f} \, d\lambda = \int_E f \, d\lambda$.

(δ) Μερικές ακόμα χρήσιμες ιδιότητες προκύπτουν εύκολα από τον ορισμό (1.2.2.4):

(iii) Αν $\lambda(E) = 0$ και $f \geqslant 0$, τότε $\int_E f \, d\lambda = 0$. Πράγματι, αν η ϕ είναι απλή ολοκληρώσιμη και $0 \leqslant \phi \leqslant f \chi_E$, τότε $\phi \chi_E = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ όπου $\lambda(E_i) = 0$, άρα

$$\int \phi \, d\lambda = \int \phi \chi_E \, d\lambda = 0. \tag{1.2.2.6}$$

(iv) Αν $E \subset F$ και $f \geqslant 0$, τότε $\int_E f \, d\lambda \leqslant \int_F f \, d\lambda$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f \chi_E \leqslant f \chi_F$.

(v) Αν $0 \leqslant f \leqslant M$ στο E, τότε $\int_E f \, d\lambda \leqslant M \lambda(E)$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f \chi_E \leqslant M \chi_E$.

Η ανισότητα της επόμενης Πρότασης είναι απλή αλλά, όπως θα δούμε στη συνέχεια, εξαιρετικά σημαντική.

Θεώρημα 1.2.9 (ανισότητα του Markov). *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $a > 0$,*

(1.2.2.7)
$$\int f\, d\lambda \geqslant \int_{\{f\geqslant a\}} f\, d\lambda \geqslant a\, \lambda(\{x : f(x) \geqslant a\}).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $f \geqslant a$ στο $\{f \geqslant a\}$. Άρα,

(1.2.2.8)
$$\int f\, d\lambda \geqslant \int_{\{f\geqslant a\}} d\lambda \geqslant \int_{\{f\geqslant a\}} a\, d\lambda = a\, \lambda(\{f \geqslant a\}).$$

Πόρισμα 1.2.10. *Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [0,\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η f παίρνει πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού: $\lambda(\{f = +\infty\}) = 0$.*

Απόδειξη. Γράφουμε

(1.2.2.9)
$$\{f = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f \geqslant n\}.$$

Από την ανισότητα του Markov έχουμε

(1.2.2.10)
$$0 \leqslant \lambda(\{f = +\infty\}) \leqslant \lambda(E_n) \leqslant \frac{1}{n} \int f\, d\lambda \to 0$$

όταν $n \to \infty$. Άρα,

(1.2.2.11)
$$\lambda(\{f = +\infty\}) = 0.$$

□

Το πρώτο θεμελιώδες θεώρημα για το ολοκλήρωμα Lebesgue είναι το **θεώρημα μονότονης σύγκλισης**. Μεταξύ άλλων, θα μας εξασφαλίσει τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος Lebesgue για μη αρνητικές συναρτήσεις. Για την απόδειξή του θα χρειαστούμε ένα Λήμμα.

Λήμμα 1.2.11. *Έστω ϕ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν (E_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων και $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, τότε*

(1.2.2.12)
$$\int_E \phi = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \phi.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε $\phi = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$, όπου $a_i > 0$ και τα A_i είναι ξένα μετρήσιμα σύνολα με πεπερασμένο μέτρο. Τότε,

(1.2.2.13)
$$\int_E \phi\, d\lambda = \int \phi \chi_E\, d\lambda = \sum_{i=1}^{m} a_i \lambda(A_i \cap E).$$

Αφού $E_n \nearrow E$, έχουμε $\lambda(A_i \cap E_n) \nearrow \lambda(A_i \cap E)$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$.

Άρα,

$$\int \phi \, d\lambda = \sum_{i=1}^{m} a_i \lambda(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lim_{n\to\infty} \lambda(A_i \cap E_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda(A_i \cap E_n) = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \phi \, d\lambda.$$

□

Θεώρημα 1.2.12 (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης). *Έστω (f_n) αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

$$\int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda. \tag{1.2.2.14}$$

Απόδειξη. Αφού η (f_n) είναι αύξουσα, η συνάρτηση

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_n f_n(x) \tag{1.2.2.15}$$

ορίζεται καλά, είναι μη αρνητική και μετρήσιμη. Επίσης,

$$\int f_n \, d\lambda \leqslant \int f_{n+1} \, d\lambda \leqslant \int f \, d\lambda \tag{1.2.2.16}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα το $\lim \int f_n \, d\lambda$ υπάρχει και

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda \leqslant \int f \, d\lambda. \tag{1.2.2.17}$$

Για να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα, αρκεί να δείξουμε το εξής: Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ϕ με $0 \leqslant \phi \leqslant f$,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda \geqslant (1-\varepsilon) \int \phi \, d\lambda. \tag{1.2.2.18}$$

Στην περίπτωση που $\int f \, d\lambda < \infty$, παίρνοντας supremum ως προς ϕ συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda \geqslant (1-\varepsilon) \int f \, d\lambda$ για κάθε $0 < \varepsilon < 1$, απ' όπου έπεται το ζητούμενο. Στην περίπτωση που $\int f \, d\lambda = \infty$, παίρνοντας πάλι supremum ως προς ϕ, συμπεραίνουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = +\infty = \int f \, d\lambda$.

Έστω ϕ απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $0 \leqslant \phi \leqslant f$. Θεωρούμε την ακολουθία μετρήσιμων συνόλων $E_n = \{f_n \geqslant (1-\varepsilon)\phi\}$. Αφού η (f_n) είναι αύξουσα, έχουμε $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n. Δηλαδή, η (E_n) είναι αύξουσα.

Παρατηρούμε ότι αν $f(x) > 0$, τότε $f_n(x) \to f(x) > (1-\varepsilon)\phi(x)$, άρα $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Αν πάλι $f(x) = 0$, τότε $\phi(x) = 0$, άρα $x \in E_n$ για κάθε n. Επομένως, $E_n \nearrow \mathbb{R}^d$. Από τη μονοτονία του ολοκληρώματος,

$$\int f_n \, d\lambda \geqslant \int_{E_n} f_n \, d\lambda \geqslant \int_{E_n} (1-\varepsilon)\phi \, d\lambda = (1-\varepsilon) \int_{E_n} \phi \, d\lambda \tag{1.2.2.19}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.2.11 παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda \geqslant (1-\varepsilon) \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \phi \, d\lambda = (1-\varepsilon) \int \phi \, d\lambda. \tag{1.2.2.20}$$

Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, μπορούμε να δώσουμε μια πληρέστερη διατύπωση του Θεωρήματος 1.1.15 για την προσέγγιση μιας μετρήσιμης συνάρτησης από απλές.

Θεώρημα 1.2.13. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία (ψ_n) μη αρνητικών απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $\psi_n \leqslant f$ με τις εξής ιδιότητες: $f = \lim_{n\to\infty} \psi_n$ και $\int f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \psi_n\, d\lambda$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.1.15 υπάρχει αύξουσα ακολουθία (ϕ_n) μη αρνητικών απλών μετρήσιμων συναρτήσεων με $\phi_n \nearrow f$. Ορίζουμε $\psi_n = \phi_n \chi_{[-n,n]^d}$. Κάθε ψ_n είναι ολοκληρώσιμη, γιατί $\lambda(\{\psi_n \neq 0\}) \leqslant \lambda([-n,n]^d) < \infty$. Αφού $\chi_{[-n,n]^d} \nearrow 1$, εύκολα ελέγχουμε ότι $\psi_n \nearrow f$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, $\int \psi_n\, d\lambda \nearrow \int f\, d\lambda$. □

Έχοντας στην διάθεσή μας το προηγούμενο θεώρημα, και χρησιμοποιώντας την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις, μπορούμε να αποδείξουμε την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις.

Θεώρημα 1.2.14. *Έστω f και g μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

$$\int (f+g)\, d\lambda = \int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda. \tag{1.2.2.21}$$

Ειδικότερα, αν E και F είναι ξένα μετρήσιμα σύνολα, τότε

$$\int_{E\cup F} f\, d\lambda = \int_E f\, d\lambda + \int_F f\, d\lambda. \tag{1.2.2.22}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.2.13, υπάρχουν αύξουσες ακολουθίες (ϕ_n) και (ψ_n) μη αρνητικών, απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με $\phi_n \nearrow f$ και $\psi_n \nearrow g$. Τότε, $\phi_n + \psi_n \nearrow f + g$ και, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\begin{aligned}\int (f+g)\, d\lambda &= \lim_{n\to\infty} \int (\phi_n + \psi_n)\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \left(\int \phi_n\, d\lambda + \int \psi_n\, d\lambda \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \phi_n\, d\lambda + \lim_{n\to\infty} \int \psi_n\, d\lambda = \int f\, d\lambda + \int g\, d\lambda.\end{aligned}$$

Για την δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την προσθετικότητα του ολοκληρώματος για απλές συναρτήσεις. Το δεύτερο συμπέρασμα του Θεωρήματος προκύπτει από το πρώτο αν θεωρήσουμε τις $f\chi_E$ και $f\chi_F$: αφού τα E και F είναι ξένα, έχουμε $f\chi_E + f\chi_F = f\chi_{E\cup F}$. □

Η επόμενη Πρόταση ουσιαστικά δείχνει ότι αν δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις συμπίπτουν σχεδόν παντού, τότε τα ολοκληρώματά τους είναι ίσα (το ολοκλήρωμα δεν μεταβάλλεται αν αλλάξουμε τις τιμές μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε ένα σύνολο μέτρου 0).

Πρόταση 1.2.15. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, $\int f\, d\lambda = 0$ αν και μόνο αν $f = 0$ σχεδόν παντού.*

Απόδειξη. Αν $f = 0$ σχεδόν παντού, τότε $\lambda(\{f > 0\}) = 0$. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 1.2.8 (γ) βλέπουμε ότι

$$\int f\, d\lambda = \int_{\{f=0\}} f\, d\lambda + \int_{\{f>0\}} f\, d\lambda = 0 + 0 = 0. \tag{1.2.2.23}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\int f\,d\lambda = 0$. Για κάθε n ορίζουμε $E_n = \{f \geqslant 1/n\}$. Από την ανισότητα του Markov,

(1.2.2.24) $$\lambda(E_n) = \lambda(\{f \geqslant 1/n\}) \leqslant n \int f\,d\lambda = 0,$$

δηλαδή $\lambda(E_n) = 0$. Αφού $E_n \nearrow \{f > 0\}$, συμπεραίνουμε ότι

(1.2.2.25) $$\lambda(\{f > 0\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) = 0.$$

Δηλαδή, $f = 0$ σχεδόν παντού. □

Το Θεώρημα Beppo Levi που ακολουθεί είναι ουσιαστικά αναδιατύπωση του Θεωρήματος Μονότονης Σύγκλισης: το ολοκλήρωμα Lebesgue για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις είναι αριθμήσιμα προσθετικό.

Θεώρημα 1.2.16 (Beppo Levi). *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

(1.2.2.26) $$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\,d\lambda.$$

Απόδειξη. Οι f_n είναι μη αρνητικές, επομένως η $f := \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ορίζεται καλά και είναι το κατά σημείο όριο της αύξουσας ακολουθίας $s_N = \sum_{n=1}^{N} f_n$ (υπάρχει βέβαια το ενδεχόμενο να έχουμε $f(x) = \infty$ για κάποια x).

Από την (πεπερασμένη) προσθετικότητα του ολοκληρώματος για μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις, έχουμε

(1.2.2.27) $$\int s_N\,d\lambda = \int \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) d\lambda = \sum_{n=1}^{N} \int f_n\,d\lambda \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n\,d\lambda.$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας εξασφαλίζει ότι

(1.2.2.28) $$\int s_N\,d\lambda \nearrow \int f\,d\lambda = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\lambda,$$

δηλαδή το ζητούμενο. □

Πόρισμα 1.2.17. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση και έστω (E_n) ακολουθία ξένων μετρήσιμων συνόλων. Τότε,*

(1.2.2.29) $$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f\,d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f\,d\lambda.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τις $f_n = f\chi_{E_n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Αφού τα E_n είναι ξένα, έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f\chi_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$. □

Ορισμός 1.2.18. *Έστω $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Μια συνολοσυνάρτηση $\Phi : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ λέγεται* **μέτρο στην** $\mathcal{A}$ *αν ικανοποιεί τα εξής:*

- $\Phi(\emptyset) = 0$.
- *Αν (E_n) είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$, τότε $\Phi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(E_n)$.*

Το μέτρο Lebesgue λ στην σ-άλγεβρα $\mathcal{M}$ των Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι ένα παράδειγμα μέτρου.

Σύμφωνα με αυτόν τον γενικό ορισμό, τα αποτελέσματά μας για το ολοκλήρωμα Lebesgue μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων δείχνουν το εξής:

Θεώρημα 1.2.19. *Έστω f μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε συνολοσυνάρτηση $\Phi_f : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ ως εξής: αν $E \in \mathcal{M}$, θέτουμε*

(1.2.2.30)
$$\Phi_f(E) = \int_E f\, d\lambda.$$

Τότε, η Φ_f είναι μέτρο. □

Σημείωση. Παρατηρήστε ότι το μέτρο Lebesgue λ αντιστοιχεί στην συνολοσυνάρτηση Φ που ορίζεται από την σταθερή συνάρτηση $f \equiv 1$.

Το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μας λέει ότι αν μια ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων f_n αυξάνει κατά σημείο στην f, τότε μπορούμε να «εναλλάξουμε τα όρια»: το ολοκλήρωμα του ορίου είναι το όριο των ολοκληρωμάτων. Το Λήμμα του Fatou που ακολουθεί μας δίνει αντίστοιχη πληροφορία στην περίπτωση που έχουμε κατά σημείο σύγκλιση αλλά δεν έχουμε την υπόθεση της μονοτονίας για την ακολουθία (f_n).

Θεώρημα 1.2.20 (Λήμμα του Fatou). *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε,*

(1.2.2.31)
$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\lambda \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\lambda.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (g_n), όπου $g_n = \inf\{f_k : k \geqslant n\}$. Κάθε g_n είναι μη αρνητική και μετρήσιμη, η (g_n) είναι αύξουσα, και

(1.2.2.32)
$$g_n \nearrow \liminf_{n\to\infty} f_n.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

(1.2.2.33)
$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\lambda.$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \leqslant f_k$ για κάθε $k \geqslant n$, οπότε η μονοτονία του ολοκληρώματος μας δίνει

(1.2.2.34)
$$\int g_n\, d\lambda \leqslant b_n := \inf_{k\geqslant n} \int f_k\, d\lambda.$$

Η ακολουθία (b_n) είναι φθίνουσα και συγκλίνει στο $\liminf_n \int f_n\, d\lambda$. Άρα,

(1.2.2.35)
$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\lambda \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\lambda.$$

□

Πόρισμα 1.2.21. *Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων. Αν $f_n \to f$ $\sigma.\pi.$ και το $\lim\limits_n \int f_n \, d\lambda$ υπάρχει, τότε*

(1.2.2.36)
$$\int f \, d\lambda \leqslant \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda.$$

1.2.3 Η γενική περίπτωση

Ορισμός 1.2.22. *(α) Έστω $f : \mathbb{R}^d \to [-\infty, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, οι συναρτήσεις $f^+ = \max\{f, 0\}$ και $f^- = -\min\{f, 0\}$ είναι μετρήσιμες και μη αρνητικές. Επίσης, ικανοποιούν τις*

(1.2.3.1)
$$f = f^+ - f^- \quad \text{και} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Τα ολοκληρώματα $\int f^+ \, d\lambda$ και $\int f^- \, d\lambda$ ορίζονται καλά και αν τουλάχιστον μία από τις f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμη, τότε το **ολοκλήρωμα της** *f ορίζεται από την*

(1.2.3.2)
$$\int f \, d\lambda = \int f^+ \, d\lambda - \int f^- \, d\lambda$$

(μπορεί βέβαια να παίρνει την τιμή $+\infty$ ή $-\infty$). Αν οι f^+, f^- είναι και οι δύο ολοκληρώσιμες, τότε το ολοκλήρωμα της f είναι πραγματικός αριθμός και λέμε ότι **η** *f* **είναι ολοκληρώσιμη**.

(β) Αν η $f : \mathbb{R}^d \to [-\infty, \infty]$ είναι μετρήσιμη και E είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, τότε λέμε ότι **η** *f* **είναι ολοκληρώσιμη στο** *E αν*

(1.2.3.3)
$$\int_E f^+ \, d\lambda = \int f^+ \chi_E \, d\lambda < \infty \quad \text{και} \quad \int_E f^- \, d\lambda = \int f^- \chi_E \, d\lambda < \infty,$$

και ορίζουμε

(1.2.3.4)
$$\int_E f \, d\lambda = \int_E f^+ \, d\lambda - \int_E f^- \, d\lambda = \int f \chi_E \, d\lambda.$$

(γ) Αν η $f : E \to [-\infty, +\infty]$ είναι μετρήσιμη, τότε επεκτείνουμε την f στον $\mathbb{R}^d$ θέτοντας $f \equiv 0$ στο E^c, συνεπώς,

(1.2.3.5)
$$\int_E f \, d\lambda = \int f \chi_E \, d\lambda = \int f \, d\lambda.$$

Παρατηρήσεις 1.2.23. *(α) Αν $f \geqslant 0$ τότε $f = f^+$ και $f^- \equiv 0$, συνεπώς ο ορισμός που δώσαμε συμφωνεί με αυτόν της Παραγράφου §2.2.*

(β) Από τον ορισμό είναι φανερό ότι η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν

(1.2.3.6)
$$\int |f| \, d\lambda = \int f^+ \, d\lambda + \int f^- \, d\lambda < +\infty,$$

δηλαδή αν και μόνο αν η $|f|$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη (θυμηθείτε ότι αυτό δεν ισχύει για το ολοκλήρωμα Riemann). Σε αυτήν την περίπτωση,

(1.2.3.7)
$$\left| \int f \, d\lambda \right| \leqslant \int |f| \, d\lambda.$$

(γ) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\lambda(\{f^+ = +\infty\}) = \lambda(\{f^- = +\infty\}) = 0, \tag{1.2.3.8}$$

άρα

$$\lambda(\{x : f(x) = +\infty\} \cup \{x : f(x) = -\infty\}) = 0. \tag{1.2.3.9}$$

Δηλαδή, η f είναι πεπερασμένη σχεδόν παντού.

(δ) Αν $\lambda(E) = 0$, τότε $\int_E f\, d\lambda = 0$, διότι $\int_E f^+\, d\lambda = 0$ και $\int_E f^-\, d\lambda = 0$.

(ε) Αν οι f και g είναι μετρήσιμες, η g είναι ολοκληρώσιμη, και $|f| \leqslant |g|$ σχεδόν παντού, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int |f|\, d\lambda \leqslant \int |g|\, d\lambda$.

(στ) Αν $f = f_1 - f_2$, όπου f_1, f_2 μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int f\, d\lambda = \int f_1\, d\lambda - \int f_2\, d\lambda. \tag{1.2.3.10}$$

Πράγματι, από την $f^+ - f^- = f_1 - f_2$ παίρνουμε $f^+ + f_2 = f^- + f_1$, άρα

$$\int f^+\, d\lambda + \int f_2\, d\lambda = \int f^-\, d\lambda + \int f_1\, d\lambda, \tag{1.2.3.11}$$

δηλαδή

$$\int f^+\, d\lambda - \int f^-\, d\lambda = \int f_1\, d\lambda - \int f_2\, d\lambda, \tag{1.2.3.12}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο.

(ζ) Αν $\lambda(E) < \infty$ και η $f : E \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και μετρήσιμη, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη. Όπως θα δούμε στο επόμενο Κεφάλαιο, κάθε φραγμένη Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Θα δούμε επίσης ότι τα δύο ολοκληρώματα (Riemann και Lebesgue) συμπίπτουν.

1.2.4 Ιδιότητες του ολοκληρώματος

Θεώρημα 1.2.24 (γραμμικότητα). *Έστω $f, g : E \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε, η $f + g$ ορίζεται καλά σχεδόν παντού και*

$$\int_E (f + g)\, d\lambda = \int_E f\, d\lambda + \int_E g\, d\lambda. \tag{1.2.4.1}$$

Επίσης, αν $t \in \mathbb{R}$ τότε η tf είναι ολοκληρώσιμη, και

$$\int (tf)\, d\lambda = t \int f\, d\lambda. \tag{1.2.4.2}$$

Απόδειξη. Αφού οι f, g είναι ολοκληρώσιμες, παίρνουν πεπερασμένη τιμή σχεδόν παντού, άρα η $f + g$ ορίζεται σχεδόν παντού. Επίσης,

(1.2.4.3) $$(f + g)^+ \leqslant f^+ + g^+ \ \text{ και } \ (f + g)^- \leqslant f^- + g^-,$$

άρα

(1.2.4.4) $$\int (f + g)^+ \, d\lambda < +\infty \ \text{ και } \ \int (f + g)^- \, d\lambda < +\infty,$$

δηλαδή η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Γράφουμε $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$. Τότε, από την Παρατήρηση (στ) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int (f + g) \, d\lambda &= \int (f^+ + g^+) \, d\lambda - \int (f^- + g^-) \, d\lambda \\ &= \int f^+ \, d\lambda + \int g^+ \, d\lambda - \int f^- \, d\lambda - \int g^- \, d\lambda \\ &= \int f \, d\lambda + \int g \, d\lambda.\end{aligned}$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι: αν $t > 0$, τότε $(tf)^+ = tf^+$ και $(tf)^- = tf^-$, άρα η tf είναι ολοκληρώσιμη και

(1.2.4.5) $$\int (tf) \, d\lambda = \int (tf)^+ \, d\lambda - \int (tf)^- \, d\lambda = t \int f^+ \, d\lambda - t \int f^- \, d\lambda = t \int f \, d\lambda.$$

Αν $t < 0$, τότε $(tf)^+ = -tf^-$ και $(tf)^- = -tf^+$, άρα η tf είναι ολοκληρώσιμη και

(1.2.4.6) $$\int (tf) \, d\lambda = \int (tf)^+ \, d\lambda - \int (tf)^- \, d\lambda = -t \int f^- \, d\lambda + t \int f^+ \, d\lambda = t \int f \, d\lambda.$$

Αν $t = 0$, δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. □

Πόρισμα 1.2.25. *Έστω E μετρήσιμο σύνολο. Το σύνολο των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : E \to [-\infty, +\infty]$ είναι γραμμικός χώρος.* □

Θεώρημα 1.2.26 (μονοτονία). *Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες και $f \leqslant g$ σχεδόν παντού, τότε $\int f \, d\lambda \leqslant \int g \, d\lambda$. Ειδικότερα, αν $f = g$ σχεδόν παντού, τότε $\int f \, d\lambda = \int g \, d\lambda$.*

Απόδειξη. Από την $f \leqslant g$ έπεται ότι $f^+ \leqslant g^+$ και $f^- \geqslant g^-$ σχεδόν παντού. Άρα,

(1.2.4.7) $$\int f^+ \, d\lambda - \int f^- \, d\lambda \leqslant \int g^+ \, d\lambda - \int g^- \, d\lambda,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 1.2.27 (προσθετικότητα). *Έστω f ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν τα A, B είναι μετρήσιμα και $A \cap B = \emptyset$, τότε*

(1.2.4.8) $$\int_{A \cup B} f \, d\lambda = \int_A f \, d\lambda + \int_B f \, d\lambda.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

(1.2.4.9) $$\begin{aligned}\int_{A \cup B} f \, d\lambda &= \int f \, \chi_{A \cup B} \, d\lambda = \int f \, (\chi_A + \chi_B) \, d\lambda \\ &= \int f \, \chi_A \, d\lambda + \int f \, \chi_B \, d\lambda = \int_A f \, d\lambda + \int_B f \, d\lambda.\end{aligned}$$

□

1.2.5 Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

Το βασικό θεώρημα σύγκλισης για ακολουθίες γενικών (όχι αναγκαστικά μη αρνητικών) ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

Θεώρημα 1.2.28 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης)**.** *Έστω $f_n : E \to [-\infty, +\infty]$ ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν παντού και ότι υπάρχει $g : E \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη, ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leqslant g$ σχεδόν παντού. Τότε, οι f_n και η f είναι ολοκληρώσιμες, και*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda. \tag{1.2.5.1}$$

Απόδειξη. Αφού $|f_n| \leqslant g$ και η g είναι ολοκληρώσιμη, κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη, από την παρατήρηση (ε). Η f είναι μετρήσιμη ως όριο (σχεδόν παντού) μετρήσιμων συναρτήσεων, και

$$|f_n| \leqslant g \Longrightarrow |f| \leqslant g. \tag{1.2.5.2}$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Για να δείξουμε την σύγκλιση της ακολουθίας των ολοκληρωμάτων, θα εφαρμόσουμε το Λήμμα του Fatou για τις ακολουθίες μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων $(g + f_n)$ και $(g - f_n)$ (παρατηρήστε ότι $|f_n| \leqslant g \Longrightarrow -g \leqslant f_n \leqslant g$).

Αφού $g + f_n \to g + f$ και $g - f_n \to g - f$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_E g \, d\lambda + \int_E f \, d\lambda &= \int_E (g + f) \, d\lambda \leqslant \liminf_n \int_E (g + f_n) \, d\lambda \\ &= \int_E g \, d\lambda + \liminf_n \int_E f_n \, d\lambda \end{aligned} \tag{1.2.5.3}$$

και

$$\begin{aligned} \int_E g \, d\lambda - \int_E f \, d\lambda &= \int_E (g - f) \, d\lambda \leqslant \liminf_n \int_E (g - f_n) \, d\lambda \\ &= \int_E g \, d\lambda - \limsup_n \int_E f_n \, d\lambda. \end{aligned} \tag{1.2.5.4}$$

Άρα,

$$\limsup_n \int_E f_n \, d\lambda \leqslant \int_E f \, d\lambda \leqslant \liminf_n \int_E f_n \, d\lambda, \tag{1.2.5.5}$$

το οποίο μας δίνει το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 1.2.29 (θεώρημα φραγμένης σύγκλισης)**.** *Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) < +\infty$ και έστω (f_n) ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο E. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ και ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leqslant M$ στο E για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda. \tag{1.2.5.6}$$

Απόδειξη. Αφού $\lambda(E) < +\infty$, η σταθερή συνάρτηση $g \equiv M$ είναι ολοκληρώσιμη στο E. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. □

Πόρισμα 1.2.30. *Έστω $f : \mathbb{R} \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση*

(1.2.5.7)
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f := \int_{(-\infty,x]} f \, d\lambda$$

είναι συνεχής.

Απόδειξη. Γράφουμε $F(x) = \int f \cdot \chi_{(-\infty,x]}$. Παρατηρούμε ότι αν $x_n \to x$ τότε

(1.2.5.8)
$$f(y)\chi_{(-\infty,x_n]}(y) \to f(y)\chi_{(-\infty,x]}(y)$$

για κάθε $y \neq x$ (εξηγήστε γιατί). Επίσης,

(1.2.5.9)
$$|f \cdot \chi_{(-\infty,x_n]}| \leqslant |f|$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, $F(x_n) \to F(x)$. Αυτό αποδεικνύει ότι η F είναι συνεχής. □

Παραδείγματα 1.2.31. *(α) Αν η $f : E \to [-\infty, +\infty]$ είναι ολοκληρώσιμη και (E_n) είναι μία αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συνόλων με $E_n \nearrow E$, τότε*

(1.2.5.10)
$$\int_E f \, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f \, d\lambda.$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $f\,\chi_{E_n} \to f$ και $|f\,\chi_{E_n}| \leqslant |f|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κατόπιν, εφαρμόζουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

(β) Έστω $f : [0,1] \to [-\infty, +\infty]$ ολοκληρώσιμη. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, η $f_n(x) = x^n f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη, και

(1.2.5.11)
$$\int_0^1 x^n f(x) \to 0.$$

Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $|x^n f(x)| \leqslant |f(x)|$ στο $[0,1]$ και ότι $f_n(x) = x^n f(x) \to 0$ σχεδόν παντού (για όλα τα $x \neq 1$ με $f(x) \neq \pm\infty$), και μετά να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.