ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αρμονική Ανάλυση

Ενότητα: Ολοκλήρωμα Riemann και ολοκλήρωμα Lebesgue

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

3 Ολοκλήρωμα Riemann και Ολοκλήρωμα Lebesgue

3.1 Σύγκριση του ολοκληρώματος Lebesgue με το ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Θα γράφουμε $(R)\int_a^b f$ για το ολοκλήρωμα Riemann και $(L)\int_a^b f$ για το ολοκλήρωμα Lebesgue της f (αν αυτά υπάρχουν). Όπως δείχνει το θεώρημα που ακολουθεί, το ολοκλήρωμα Lebesgue επεκτείνει το ολοκλήρωμα Riemann.

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,*

(i) Η f είναι μετρήσιμη.

(ii) Η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

(3.1.0.1)
$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής:

1. Το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.
2. Αν $h \geqslant 0$ μετρήσιμη και $\int_E h = 0$, τότε $h = 0$ σχεδόν παντού στο E. Επομένως, αν $f \leqslant g$ και $\int_E f = \int_E g$, τότε $f = g$ σχεδόν παντού στο E.
3. Αν $s = \sum_{i=1}^{m} t_i \chi_{[a_i,b_i]}$ είναι μια κλιμακωτή συνάρτηση, τότε

(3.1.0.2)
$$(L)\int_a^b f = (R)\int_a^b f.$$

Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Τότε, υπάρχει ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με τις εξής ιδιότητες: $P_n \subset P_{n+1}$ (η P_{n+1} είναι εκλέπτυνση της P_n), $\|P_n\| \to 0$ (τα πλάτη των διαμερίσεων P_n τείνουν στο 0), και

(3.1.0.3)
$$L(f,P_n) \to (R)\int_a^b f \ , \ U(f,P_n) \to (R)\int_a^b f.$$

Έστω ℓ_n η κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b \ell_n = L(f,P_n)$ (δηλαδή, αν $L(f,P_n) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i(x_{i+1}-x_i)$ τότε $\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \chi_{[x_i,x_{i+1})}$) και u_n η αντίστοιχη κλιμακωτή συνάρτηση με $\int_a^b u_n = U(f,P_n)$. Τότε,

(3.1.0.4)
$$\ell_n \leqslant f \leqslant u_n.$$

Από την $P_n \subset P_{n+1}$ έπεται ότι η (ℓ_n) είναι αύξουσα και η (u_n) φθίνουσα, οπότε ορίζονται οι συναρτήσεις $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$, και $\ell \leqslant f \leqslant u$. Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης,

$$(L)\int_a^b u = \lim_n \int_a^b u_n = \lim_n U(f, P_n) = (R)\int_a^b f \tag{3.1.0.5}$$

και

$$(L)\int_a^b \ell = \lim_n \int_a^b \ell_n = \lim_n L(f, P_n) = (R)\int_a^b f. \tag{3.1.0.6}$$

Αφού $\ell \leqslant u$ και $\int_a^b \ell = \int_a^b u$, συμπεραίνουμε ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού. Αφού $\ell \leqslant f \leqslant u$, προκύπτει ότι

$$\ell = f = u \;\; \sigma.\pi. \tag{3.1.0.7}$$

Άρα, η f είναι μετρήσιμη συνάρτηση ως όριο (σχεδόν παντού) ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων. Αυτό αποδεικνύει το (i).

Αφού η f είναι μετρήσιμη και φραγμένη, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Τέλος,

$$(L)\int_a^b f = (L)\int_a^b u = (R)\int_a^b f, \tag{3.1.0.8}$$

δηλαδή έχουμε αποδείξει το (ii). □

Σημείωση. Όπως έχουμε ήδη δει, η κλάση των φραγμένων Lebesgue ολοκληρώσιμων $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι γνήσια μεγαλύτερη από την κλάση των Riemann ολοκληρώσιμων $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Τα παραδείγματα που ακολουθούν δείχνουν ότι η περίπτωση του γενικευμένου ολοκληρώματος Riemann είναι διαφορετική:

Παράδειγμα 1. *Το γενικευμένο ολοκλήρωμα* $(IR)\int_0^\infty (\text{ημ}\, x/x)dx$ *υπάρχει, αλλά το ολοκλήρωμα Lebesgue* $(L)\int_0^\infty (\text{ημ}\, x/x)dx$ *δεν υπάρχει.*

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann σαν μια εναλλάσσουσα σειρά:

$$\begin{aligned}
(IR)\int_0^\infty \frac{\text{ημ}\, x}{x}dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{\text{ημ}\, x}{x}dx \\
&= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\,\text{ημ}\, x|}{x}dx \\
&= \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{|\,\text{ημ}\, x|}{x + (n-1)\pi}dx.
\end{aligned}$$

Από το κριτήριο του Dirichlet, για να δείξουμε ότι αυτή η σειρά συγκλίνει αρκεί να δείξουμε ότι τα ολοκληρώματα φθίνουν στο 0 όταν $n \to \infty$. Όμως, για σταθερό x, η ακολουθία $|\text{ημ}\, x|/(x+(n-1)\pi)$ είναι προφανώς φθίνουσα, άρα η αντίστοιχη ακολουθία των ολοκληρωμάτων είναι φθίνουσα και, για κάθε $n \geqslant 2$,

(3.1.0.9)
$$\int_0^{\pi} \frac{|\text{ημ}\, x|}{x+(n-1)\pi}dx \leqslant \frac{1}{n-1} \to 0.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $(IR)\int_0^\infty (\text{ημ}\, x/x)dx$ υπάρχει.

Αν το ολοκλήρωμα Lebesgue υπήρχε, θα έπρεπε να ισχύει ότι

(3.1.0.10)
$$(L)\int_0^\infty \frac{|\text{ημ}\, x|}{x}dx < +\infty.$$

Όμως, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}(L)\int_0^\infty \frac{|\text{ημ}\, x|}{x}dx &= \sum_{n=1}^\infty \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\text{ημ}\, x|}{x}dx \\ &\geqslant \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi |\text{ημ}\, x|dx = \infty.\end{aligned}$$

Άρα, η $\text{ημ}\, x/x$ δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,+\infty)$. □

Παράδειγμα 2. Θεωρούμε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=0$ αν $x<0$, και

(3.1.0.11)
$$f(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \text{αν} \quad x \in [n, n+1), \ \ n = 0,1,2,\dots.$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα Riemann της f

(3.1.0.12)
$$(IR)\int_0^\infty f(x)dx := \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$$

υπάρχει: είναι ίσο με

(3.1.0.13)
$$(IR)\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n+1}$$

(η τελευταία σειρά συγκλίνει). Όμως,

(3.1.0.14)
$$(L)\int_0^\infty |f| = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} = +\infty,$$

άρα η f δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. □

Τέτοια προβλήματα δεν εμφανίζονται αν η συνάρτηση που μελετάμε είναι μη αρνητική.

Θεώρημα 3.1.2. *Αν $f \geqslant 0$ και το γενικευμένο ολοκλήρωμα $(IR)\int_{-\infty}^{\infty} f$ υπάρχει, τότε η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, και*

(3.1.0.15)
$$(IR)\int f = (L)\int f.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $f_n = f\,\chi_{[-n,n]}$ αυξάνει προς την f. Κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη (στο $[-n,n]$), επομένως μετρήσιμη. Άρα, η f είναι μετρήσιμη. Επίσης,

(3.1.0.16)
$$(L)\int f_n = (R)\int_{-n}^{n} f(x)dx$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή κάθε f_n είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη. Από την υπόθεση, υπάρχει το όριο

(3.1.0.17)
$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_{-n}^{n} f(x)dx = (IR)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα μονότονης σύγκλισης δείχνει ότι

(3.1.0.18)
$$\lim_{n\to\infty}(L)\int f_n = (L)\int f.$$

Άρα, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και

(3.1.0.19)
$$(IR)\int f = (L)\int f.$$

□

Σημείωση. Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για γενικευμένα ολοκληρώματα κάθε είδους (για παράδειγμα, σε ανοικτό φραγμένο διάστημα).

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με έναν χαρακτηρισμό των Riemann ολοκληρώσιμων $f : [a,b] \to \mathbb{R}$: είναι εκείνες οι φραγμένες συναρτήσεις που είναι συνεχείς σχεδόν παντού. Πριν δώσουμε την ακριβή διατύπωση και την απόδειξη, πρέπει να τονίσουμε ότι η συνθήκη «συνεχής σχεδόν παντού» είναι τελείως διαφορετική από την «σχεδόν παντού ίση με συνεχή συνάρτηση». Για παράδειγμα, η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_{\mathbb{Q}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι σχεδόν παντού ίση με την συνεχή (σταθερή) μηδενική συνάρτηση, αλλά δεν είναι συνεχής σε κανένα σημείο του $[a,b]$. Από την άλλη πλευρά, η $\chi_{[0,1/2]} : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής σχεδόν παντού (παντού εκτός από το σημείο 1/2) αλλά δεν είναι σχεδόν παντού ίση με καμία συνεχή $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ (εξηγήστε γιατί). Αυτά τα παραδείγματα δείχνουν ότι οι δύο συνθήκες δεν συγκρίνονται.

Θεώρημα 3.1.3. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

(3.1.0.20)
$$\lambda(\{x \in [a,b] : \text{ η } f \text{ είναι ασυνεχής στο } x\}) = 0.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι συνεχής σχεδόν παντού. Επιλέγουμε ακολουθία (P_n) διαμερίσεων του $[a,b]$ με $P_n \subset P_{n+1}$, $\|P_n\| \to 0$, και θα δείξουμε ότι $U(f,P_n) - L(f,P_n) \to 0$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις ℓ_n, u_n που αντιστοιχούν στην P_n, με $\ell_n \leqslant f \leqslant u_n$, $\int_a^b \ell_n = L(f, P_n)$ και $\int_a^b u_n = U(f, P_n)$. Δηλαδή, αν $P_n = \{a = x_0 < \cdots < x_k = b\}$ ορίζουμε

(3.1.0.21) $$\ell_n = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \chi_{[x_i, x_{i+1})} \ \text{ και } \ u_n = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \chi_{[x_i, x_{i+1})}.$$

Τότε, $\ell_n \nearrow \ell$ και $u_n \searrow u$, όπου $\ell \leqslant f \leqslant u$.

Οι ℓ_n, u_n είναι μετρήσιμες και ομοιόμορφα φραγμένες (από το supremum και το infimum της f στο $[a, b]$). Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

(3.1.0.22) $$\int_a^b \ell_n \to \int_a^b \ell \ \text{ και } \ \int_a^b u_n \to \int_a^b u.$$

Δηλαδή,

(3.1.0.23) $$L(f, P_n) \to \int_a^b \ell \ \text{ και } \ U(f, P_n) \to \int_a^b u.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

(3.1.0.24) $$\int_a^b \ell = \int_a^b u.$$

Αυτό ισχύει για τον εξής λόγο: αν $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ και αν A είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f στο $[a, b]$, τότε για κάθε $x \in [a, b] \setminus (A \cup P)$ έχουμε $\ell(x) = u(x)$. Πράγματι: έστω $x \in [a, b] \setminus (A \cup P)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$ τότε $|f(y) - f(z)| < \varepsilon$. Επιλέγουμε n_0 για το οποίο $\|P_{n_0}\| < \delta$. Αν $[x_i, x_{i+1}]$ είναι το υποδιάστημα της P_{n_0} στο οποίο ανήκει το x, τότε $[x_i, x_{i+1}] \subseteq (x - \delta, x + \delta)$, άρα

(3.1.0.25) $$M_i - m_i = \sup\{f(y) : y \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(z) : z \in [x_i, x_{i+1}]\} \leqslant \varepsilon,$$

δηλαδή $0 \leqslant u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) \leqslant \varepsilon$. Ακόμα,

(3.1.0.26) $$0 \leqslant u(x) - \ell(x) \leqslant u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) \leqslant \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $u(x) = \ell(x)$. Άρα, $\ell = u$ σχεδόν παντού, το οποίο δείχνει ότι $\int_a^b \ell = \int_a^b u$.

Αντίστροφα: Υποθέτουμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$. Επιλέγουμε ακολουθία διαμερίσεων $(P_n)_n$ με $P_n \subseteq P_{n+1}$ για κάθε n και

(3.1.0.27) $$L(f, P_n) \to \int_a^b f \ , \ \ U(f, P_n) \to \int_a^b f.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε τις κλιμακωτές συναρτήσεις ℓ_n και u_n που αντιστοιχούν στην P_n, με $\ell_n \leqslant f \leqslant u_n$ και

$$\int_a^b \ell_n = L(f, P_n)\ , \quad \int_a^b u_n = U(f, P_n). \tag{3.1.0.28}$$

Η ακολουθία (ℓ_n) είναι αύξουσα και η (u_n) είναι φθίνουσα. Έστω $\ell = \lim_n \ell_n$ και $u = \lim_n u_n$. Τότε $\ell \leqslant f \leqslant u$ και από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$$\int_a^b \ell = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \ell_n = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n) = \int_a^b f \tag{3.1.0.29}$$

και

$$\int_a^b u = \lim_{n\to\infty} \int_a^b u_n = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \int_a^b f. \tag{3.1.0.30}$$

Άρα,

$$\int_a^b \ell = \int_a^b u. \tag{3.1.0.31}$$

Αφού $\ell \leqslant u$, έπεται ότι $\ell = u$ σχεδόν παντού.

Έστω $C = \{x \in [a, b] : \ell(x) = u(x)\}$ και έστω $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x \in C \setminus P$ η f είναι συνεχής στο x. Πράγματι: Έστω $x \in C \setminus P$ και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\ell(x) = u(x)$, άρα υπάρχει n_0 με $0 \leqslant u_{n_0}(x) - \ell_{n_0}(x) < \varepsilon$. Αυτό σημαίνει ότι αν (x_i, x_{i+1}) είναι το υποδιάστημα της P_{n_0} στο οποίο ανήκει το x, τότε

$$\sup\{f(y) : y \in [x_i, x_{i+1}]\} - \inf\{f(z) : z \in [x_i, x_{i+1}]\} < \varepsilon. \tag{3.1.0.32}$$

Έπεται ότι η f είναι συνεχής στο x (εξηγήστε γιατί).

Συμπεραίνουμε ότι αν A είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f, τότε $A \subseteq ([a, b] \setminus C) \cup P$, άρα $\lambda(A) = 0$. □

3.2 Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue

Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το αόριστο ολοκλήρωμα της f:

$$F(x) = \int_a^x f(y)dy, \qquad a \leqslant x \leqslant b. \tag{3.2.0.33}$$

Γνωρίζουμε ότι αν $x \in [a, b]$ και η f είναι συνεχής στο x τότε η F είναι παραγωγίσιμη στο x και $F'(x) = f(x)$. Γνωρίζουμε επίσης ότι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue.

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, η F είναι παραγωγίσιμη στο x αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}, \tag{3.2.0.34}$$

το οποίο, στην περίπτωσή μας, παίρνει την μορφή

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)dy = \lim_{|I|\to 0}\frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy \tag{3.2.0.35}$$

αν χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $I=(x,x+h)$ και γράψουμε $|I|$ για το μήκος του διαστήματος I. Θα αλλάξουμε λίγο το πλαίσιο, θεωρώντας το όριο

$$\lim_{\substack{|I|\to 0\\ x\in I}}\frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy, \tag{3.2.0.36}$$

όπου, πλέον, θεωρούμε όλα τα ανοικτά διαστήματα I τα οποία περιέχουν το x και αφήνουμε το μήκος τους να πάει στο μηδέν. Παρατηρήστε ότι η ποσότητα $\frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy$ είναι η μέση τιμή της f στο διάστημα I. Πάλι, είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι, αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε

$$\lim_{\substack{|I|\to 0\\ x\in I}}\frac{1}{|I|}\int_I f(y)dy = f(x) \tag{3.2.0.37}$$

σε κάθε σημείο συνέχειας της f (άρα, σχεδόν παντού στο $[a,b]$).

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει είναι το εξής: δίνεται μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ (θα γράφουμε $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$). Είναι σωστό ότι

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y) = f(x) \tag{3.2.0.38}$$

σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^d$; Με B συμβολίζουμε ανοικτές μπάλες του $\mathbb{R}^d$: για δοθέν x θεωρούμε εκείνες τις μπάλες που περιέχουν το x και αφήνουμε τον όγκο τους (ισοδύναμα, την ακτίνα τους) να πάει στο μηδέν.

Παρατηρήστε ότι η (3.2.0.38) ισχύει σε κάθε σημείο συνέχειας της f. Αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής στο x και αν θεωρήσουμε τυχόν $\varepsilon>0$ τότε υπάρχει $\delta>0$ ώστε: αν $|y-x|<\delta$ τότε $|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$. Τότε, για κάθε μπάλα B που περιέχει το x και έχει ακτίνα μικρότερη από $\delta/2$, όλα τα $y\in B$ ικανοποιούν την $|y-x|<\delta$, απ¨ όπου παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left|f(x)-\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y)\right| &= \left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B (f(x)-f(y))\,d\lambda(y)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(x)-f(y)|\,d\lambda(y)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται η (3.2.0.38).

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το **θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue**, το οποίο δίνει κάτι πολύ ισχυρότερο.

Θεώρημα 3.2.1 (θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue). *Αν $f\in\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$ τότε*

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y) = f(x) \tag{3.2.0.39}$$

σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue λ στον $\mathbb{R}^d$.

Για την απόδειξη θα χρειαστεί να κάνουμε βαθύτερη μελέτη της συμπεριφοράς των μέσων τιμών μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης σε μπάλες. Στην επόμενη παράγραφο εισάγουμε τη **μεγιστική συνάρτηση** των Hardy και Littlewood και μελετάμε την συνάρτηση κατανομής της με τη βοήθεια του λήμματος κάλυψης του Vitali.

3.2.1 Η μεγιστική συνάρτηση των Hardy και Littlewood

Ορισμός 3.2.2 (μεγιστική συνάρτηση). *Έστω $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Ορίζουμε τη μεγιστική συνάρτηση f^* της f ως εξής:*

(3.2.1.1)
$$f^*(x) = \sup_{x\in B} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y)|\, d\lambda(y), \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλες τις ανοικτές μπάλες που περιέχουν το x. Με λίγα λόγια, αντικαθιστούμε το (ζητούμενο) όριο των μέσων τιμών του Θεωρήματος 3.2.1 με το supremum τους, και την f με την $|f|$.

Οι βασικές ιδιότητες της f^* δίνονται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Τότε:*

(i) Η f^* είναι μετρήσιμη.

(ii) Ισχύει $f^*(x) < \infty$ σχεδόν παντού.

(iii) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

(3.2.1.2)
$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{C_d}{\alpha} \|f\|_1,$$

όπου $\|f\|_1 = \int |f| d\lambda$ και $C_d = 3^d$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η f^* είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\alpha > 0$ το σύνολο $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^d : f^*(x) > \alpha\}$ είναι ανοικτό. Πράγματι, αν $f^*(x) > \alpha$ τότε υπάρχει μπάλα B_x η οποία περιέχει το x και για την οποία

(3.2.1.3)
$$\frac{1}{\lambda(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\, d\lambda(y) > \alpha,$$

και τότε, για κάθε $z \in B_x$ έχουμε

(3.2.1.4)
$$f^*(z) \geqslant \frac{1}{\lambda(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\, d\lambda(y) > \alpha,$$

δηλαδή $B_x \subseteq E_\alpha$.

Ο ισχυρισμός (ii) είναι συνέπεια του ισχυρισμού (iii). Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

(3.2.1.5)
$$\{x : f^*(x) = \infty\} \subseteq \{x : f^*(x) > \alpha\},$$

άρα

(3.2.1.6)
$$\lambda(\{x : f^*(x) = \infty\}) \leqslant \lambda(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{C_d}{\alpha}\|f\|_1.$$

Αφήνοντας το $\alpha \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι $\lambda(\{x : f^*(x) = \infty\}) = 0$.

Παρατήρηση 3.2.4. *Η βασική ανισότητα (3.2.1.2) είναι μια* ***ασθενούς τύπου*** *ανισότητα, με την έννοια ότι υπολείπεται του ισχυρισμού ότι $\|f^*\|_1 \leqslant C_d\|f\|_1$. Πράγματι, αν είχαμε κάτι τέτοιο τότε, από την ανισότητα Markov, για κάθε $\alpha > 0$ θα γράφαμε*

(3.2.1.7) $$\lambda(\{x : f^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f^*\|_1 \leqslant \frac{C_d}{\alpha}\|f\|_1.$$

Στην πραγματικότητα, η f^* δεν είναι (σχεδόν ποτέ) ολοκληρώσιμη, και η (3.2.1.2) είναι η καλύτερη πληροφορία που θα μπορούσαμε να πάρουμε για την κατανομή της συναρτήσει της $\|f\|_1$.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού (iii) θα χρησιμοποιήσουμε ένα λήμμα κάλυψης του Vitali.

Λήμμα 3.2.5. *Έστω $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_N\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια από ανοικτές μπάλες στον $\mathbb{R}^d$. Μπορούμε να βρούμε $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant N$ ώστε οι μπάλες $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ να είναι ξένες ανά δύο και να ισχύει*

(3.2.1.8) $$\lambda\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell\right) \leqslant 3^d \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{i_j}).$$

Απόδειξη. Η επιλογή των B_{i_j} γίνεται με τον πιο φυσιολογικό τρόπο. Στο πρώτο βήμα, επιλέγουμε μία από τις μπάλες, την B_{i_1}, έτσι ώστε να έχει την μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα. Κατόπιν, την αφαιρούμε από την $\mathcal{B}$ μαζί με όλες τις μπάλες της $\mathcal{B}$ που την τέμνουν. Οι υπόλοιπες μπάλες σχηματίζουν μια υποοικογένεια $\mathcal{B}'$ της $\mathcal{B}$ στην οποία επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία. Επιλέγουμε μία από τις μπάλες της $\mathcal{B}'$, την B_{i_2}, έτσι ώστε να έχει την μεγαλύτερη δυνατή ακτίνα. Κατόπιν, την αφαιρούμε από την $\mathcal{B}'$ μαζί με όλες τις μπάλες της $\mathcal{B}'$ που την τέμνουν. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, μετά από N το πολύ βήματα, έχουμε επιλέξει κάποιες (ξένες) μπάλες $B_{i_1}, \ldots, B_{i_k}$ και η διαδικασία τερματίζεται.

Για την απόδειξη της (3.2.1.8) θα χρησιμοποιήσουμε την εξής παρατήρηση: αν B και B' είναι δύο ανοικτές μπάλες με $B \cap B' \neq \emptyset$ και αν η ακτίνα $r(B)$ της B είναι μεγαλύτερη ή ίση από την ακτίνα $r(B')$ της B', τότε η B' περιέχεται στην μπάλα $\tilde{B}$ που έχει το ίδιο κέντρο με την B και ακτίνα $r(\tilde{B}) = 3r(B)$. Η απόδειξη είναι απλή συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας.

Συμβολίζοντας με $\tilde{B}_{i_j}$ τη μπάλα που έχει το ίδιο κέντρο με την B_{i_j} και ακτίνα $r(\tilde{B}_{i_j}) = 3r(B_{i_j})$, και παρατηρώντας ότι κάθε $B_\ell \in \mathcal{B}$ τέμνει κάποια B_{i_j} για την οποία $r(B_\ell) \leqslant r(B_{i_j})$, συμπεραίνουμε ότι

(3.2.1.9) $$\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \tilde{B}_{i_j}.$$

Άρα,

(3.2.1.10) $$\lambda\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_\ell\right) \leqslant \lambda\left(\bigcup_{j=1}^{k} \tilde{B}_{i_j}\right) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda(\tilde{B}_{i_j}) = 3^d \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{i_j}).$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει την (3.2.1.8).

$\dashv$

Απόδειξη του ισχυρισμού (iii). Έστω $\alpha > 0$. Ορίζουμε $E_\alpha = \{x : f^*(x) > \alpha\}$ και για κάθε $x \in E_\alpha$ επιλέγουμε ανοικτή μπάλα B_x με $x \in B_x$ και

(3.2.1.11) $$\frac{1}{\lambda(B_x)} \int_{B_x} |f(y)|\, d\lambda(y) > \alpha.$$

Ισοδύναμα,

$$\lambda(B_x) < \frac{1}{\alpha} \int_{B_x} |f(y)|\, d\lambda(y). \tag{3.2.1.12}$$

Θεωρούμε τυχόν συμπαγές $K \subseteq E_\alpha$. Έχουμε $K \subseteq \bigcup_{x\in K} B_x$, άρα υπάρχει πεπερασμένη οικογένεια $\mathcal{B} = \{B_{x_1}, \ldots, B_{x_N}\}$ ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{N} B_{x_\ell}. \tag{3.2.1.13}$$

Από το λήμμα του Vitali μπορούμε να βρούμε $1 \leqslant i_1, \ldots, i_k \leqslant N$ ώστε οι μπάλες $B_{x_{i_j}}$, $j = 1, \ldots, k$, να είναι ξένες, και

$$\lambda\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_{x_\ell}\right) \leqslant 3^d \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{x_{i_j}}). \tag{3.2.1.14}$$

Αφού οι $B_{x_{i_1}}, \ldots, B_{x_{i_k}}$ είναι ξένες, συνδυάζοντας τις (3.2.1.12) και (3.2.1.14) γράφουμε

$$\begin{aligned}
\lambda(K) &\leqslant \lambda\left(\bigcup_{\ell=1}^{N} B_{x_\ell}\right) \leqslant 3^d \sum_{j=1}^{k} \lambda(B_{x_{i_j}}) \\
&\leqslant \frac{3^d}{\alpha} \sum_{j=1}^{k} \int_{B_{x_{i_j}}} |f(y)|\, d\lambda(y) = \frac{3^d}{\alpha} \int_{\bigcup_{j=1}^{k} B_{x_{i_j}}} |f(y)|\, d\lambda(y) \\
&\leqslant \frac{3^d}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\, d\lambda(y) = \frac{3^d}{\alpha} \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Αφού $\lambda(E_\alpha) = \sup\{\lambda(K) : K$ συμπαγές υποσύνολο του $E_\alpha\}$, έπεται το ζητούμενο. □

3.2.2 Το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 3.2.1 και παρουσιάζουμε κάποιες παραλλαγές και κάποιες σημαντικές εφαρμογές του.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Έστω $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $\alpha > 0$, το σύνολο

$$E_\alpha = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \limsup_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \left|\frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) - f(x)\right| > 2\alpha\right\} \tag{3.2.2.1}$$

έχει μέτρο $\lambda(E_\alpha) = 0$. Τότε, το σύνολο $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n}$ έχει μέτρο $\lambda(E) = 0$, και για κάθε $x \notin E$ ισχύει

$$\limsup_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \left|\frac{1}{\lambda(B)} \int_B f(y)\, d\lambda(y) - f(x)\right| = 0, \tag{3.2.2.2}$$

δηλαδή,

(3.2.2.3) $$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y) = f(x).$$

Σταθεροποιούμε $\alpha > 0$ και για τυχόν $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε συνεχή συνάρτηση g με συμπαγή φορέα, η οποία ικανοποιεί την

(3.2.2.4) $$\|f - g\|_1 < \varepsilon.$$

(Το γεγονός ότι μια τέτοια προσέγγιση είναι πάντα δυνατή θα αποδειχθεί στο επόμενο κεφάλαιο). Αφού η g είναι συνεχής, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ έχουμε

(3.2.2.5) $$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B g(y)\,d\lambda(y) = g(x).$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y) - f(x) &= \frac{1}{\lambda(B)}\int_B (f(y)-g(y))\,d\lambda(y) + \frac{1}{\lambda(B)}\int_B g(y)\,d\lambda(y) - g(x)\\ &\quad + g(x) - f(x),\end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y) - f(x)\right| &\leqslant \frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y)-g(y)|\,d\lambda(y) + \left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B g(y)\,d\lambda(y) - g(x)\right|\\ &\quad + |g(x) - f(x)|\\ &\leqslant (f-g)^*(x) + \left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B g(y)\,d\lambda(y) - g(x)\right| + |g(x)-f(x)|,\end{aligned}$$

άρα

$$\limsup_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \left|\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y) - f(x)\right| \leqslant (f-g)^*(x) + |g(x)-f(x)|.$$

Αν λοιπόν ορίσουμε

(3.2.2.6) $$F_\alpha = \{x : (f-g)^*(x) > \alpha\} \quad \text{και} \quad G_\alpha = \{x : |f(x)-g(x)| > \alpha\},$$

έχουμε $E_\alpha \subseteq F_\alpha \cup G_\alpha$ (αν $u + v > 2\alpha$ τότε είτε $u > \alpha$ ή $v > \alpha$).

Τώρα, χρησιμοποιώντας την

(3.2.2.7) $$\lambda(F_\alpha) = \lambda(\{x : (f-g)^*(x) > \alpha\}) \leqslant \frac{3^d}{\alpha}\|f-g\|_1$$

(βλέπε Θεώρημα 3.2.3 (iii)) και την

(3.2.2.8) $$\lambda(G_\alpha) = \lambda(\{x : |f(x)-g(x)| > \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f-g\|_1$$

που είναι άμεση από την ανισότητα του Markov, παίρνουμε

(3.2.2.9) $$\lambda(E_\alpha) \leqslant \lambda(F_\alpha) + \lambda(G_\alpha) \leqslant \frac{3^d+1}{\alpha}\|f-g\|_1 = \frac{C_d'}{\alpha}\varepsilon,$$

όπου $C_d' = 3^d + 1$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\lambda(E_\alpha) = 0$, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 3.2.6. *Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.1 είναι το γεγονός ότι: αν $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^d)$ τότε $|f(x)| \leqslant f^*(x)$ σχεδόν παντού (εξηγήστε γιατί).*

Ορισμός 3.2.7. *Μια μετρήσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^d$ λέγεται* ***τοπικά ολοκληρώσιμη*** *αν για κάθε μπάλα $B \subset \mathbb{R}^d$ η συνάρτηση $f(x)\chi_B(x)$ είναι ολοκληρώσιμη. Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ την κλάση των τοπικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.*

Παρατηρούμε ότι αν $f \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ και αν σταθεροποιήσουμε μια ανοικτή μπάλα B_0 (π.χ. την $B(0,k)$ για κάποιον $k \in \mathbb{N}$) τότε για κάθε $x \in B_0$ έχουμε

(3.2.2.10)
$$\frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\,d\lambda(y) = \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)\chi_{B_0}(y)\,d\lambda(y)$$

αν θεωρήσουμε B που περιέχει το x και είναι αρκετά μικρή ώστε να περιέχεται στην B_0. Εφαρμόζοντας λοιπόν το θεώρημα παραγώγισης για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f \cdot \chi_{B_0}$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y) = f(x)$$

σχεδόν παντού στην B_0. Κάνοντας την ίδια δουλειά με $B_0 = B(0,k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ έχουμε την ακόλουθη επέκταση του Θεωρήματος 3.2.1:

Θεώρημα 3.2.8. *Αν $f \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ τότε*

(3.2.2.11)
$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y) = f(x)$$

σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue λ στον $\mathbb{R}^d$. □

Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε κάτι ισχυρότερο. Δίνουμε πρώτα έναν ορισμό.

Ορισμός 3.2.9. *Έστω $f \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Το* ***σύνολο Lebesgue*** *$Leb(f)$ της f αποτελείται από όλα τα $x \in \mathbb{R}^d$ για τα οποία $|f(x)| < \infty$ και*

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B |f(y) - f(x)|\,d\lambda(y) = 0.$$

Στην Παράγραφο 3.2.1 είδαμε ότι αν η f είναι συνεχής στο x τότε $x \in Leb(f)$. Επίσης, είναι φανερό ότι αν $x \in Leb(f)$ τότε

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)}\int_B f(y)d\lambda(y) = f(x).$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι αν $f \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^d)$ τότε σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ ανήκει στο σύνολο Lebesgue της f.

Θεώρημα 3.2.10. *Έστω $f \in \mathcal{L}_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Τότε,*

(3.2.2.12)
$$\lambda(\mathbb{R}^d \setminus Leb(f)) = 0.$$

Απόδειξη. Έστω $q \in \mathbb{Q}$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.8 για την τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $|f(y) - q|$ βλέπουμε ότι υπάρχει $E_q \subset \mathbb{R}^d$ με $\lambda(E_q) = 0$ ώστε: αν $x \notin E_q$ τότε

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - q|\, d\lambda(y) = |f(x) - q|.$$

Θέτουμε $E = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} E_q$. Τότε, $\lambda(E) = 0$ και θα δείξουμε ότι: αν $x \notin E$ και $|f(x)| < \infty$ τότε $x \in Leb(f)$.

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε ρητό q με $|f(x) - q| < \varepsilon$. Γράφουμε

$$\frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) \leqslant \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - q|\, d\lambda(y) + |f(x) - q| \tag{3.2.2.13}$$

για κάθε μπάλα B με $x \in B$, και αφήνοντας το $\lambda(B) \to 0$ παίρνουμε

$$\limsup_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) \leqslant |f(x) - q| + |f(x) - q| < 2\varepsilon, \tag{3.2.2.14}$$

διότι $x \notin E_q$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{1}{\lambda(B)} \int_B |f(y) - f(x)|\, d\lambda(y) = 0,$$

δηλαδή $x \in Leb(f)$.

$\boxed{+}$

Μία ενδιαφέρουσα και χρήσιμη εφαρμογή του θεωρήματος παραγώγισης του Lebesgue αφορά την δομή των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 3.2.11. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Λέμε ότι το $x \in \mathbb{R}^d$ είναι* ***σημείο πυκνότητας*** *του E αν*

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{\lambda(E\cap B)}{\lambda(B)} = 1. \tag{3.2.2.15}$$

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ και για κάθε ανοικτή μπάλα B που περιέχει το x και έχει αρκετά μικρή ακτίνα, ισχύει

$$\lambda(E\cap B) \geqslant (1-\varepsilon)\lambda(B). \tag{3.2.2.16}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.8 στην τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση χ_E παίρνουμε αμέσως το εξής:

Θεώρημα 3.2.12. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Τότε, σχεδόν κάθε σημείο του E είναι σημείο πυκνότητας του E και σχεδόν κάθε $x \notin E$ δεν είναι σημείο πυκνότητας του E – ακριβέστερα, σχεδόν όλα τα $x \notin E$ είναι σημεία πυκνότητας του $\mathbb{R}^d \setminus E$, άρα ικανοποιούν την*

$$\lim_{\substack{\lambda(B)\to 0\\ x\in B}} \frac{\lambda(E\cap B)}{\lambda(B)} = 0. \tag{3.2.2.17}$$

3.3 Συναρτήσεις φραγμένης κύμανσης

3.3.1 Ορισμός και παραδείγματα

Ορισμός 3.3.1. *Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι μια διαμέριση του $[a, b]$, ονομάζουμε* **κύμανση της ϕ ως προς την** *P τον αριθμό*

(3.3.1.1) $$V(\phi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)|.$$

Μια πρώτη βασική παρατήρηση είναι ότι «η κύμανση της ϕ μεγαλώνει αν εκλεπτύνουμε τη διαμέριση».

Λήμμα 3.3.2. *Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ και P, Q δύο διαμερίσεις του $[a, b]$. Αν $P \subseteq Q$, τότε*

(3.3.1.2) $$V(\phi, P) \leqslant V(\phi, Q).$$

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ και έστω $x_k < y < x_{k+1}$ για κάποιο $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Αν θεωρήσουμε τη διαμέριση $P_1 = P \cup \{y\}$, τότε απλή εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας δίνει

$$\begin{aligned} V(\phi, P) &= \sum_{j=0}^{n-1} |\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)| \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} |\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)| + |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)| + \sum_{j=k+1}^{n-1} |\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)| \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} |\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)| + |\phi(y) - \phi(x_k)| + |\phi(x_{k+1}) - \phi(y)| \\ &+ \sum_{j=k+1}^{n-1} |\phi(x_{j+1}) - \phi(x_j)| \\ &= V(\phi, P_1). \end{aligned}$$

Στη γενική περίπτωση η Q προκύπτει από την P με την προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων $y_1, \ldots, y_m$, οπότε

(3.3.1.3) $$V(\phi, P) \leqslant V(\phi, P \cup \{y_1\}) \leqslant \cdots \leqslant V(\phi, P \cup \{y_1, \ldots, y_m\}) = V(\phi, Q).$$

□

Ορισμός 3.3.3. *Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$. Η* **κύμανση** *της ϕ στο $[a, b]$ είναι η ποσότητα*

(3.3.1.4) $$V(\phi) = \sup\{V(\phi, P) \mid P \ \text{διαμέριση του} \ [a, b]\}.$$

Αν $V(\phi) < +\infty$ τότε λέμε ότι η ϕ έχει **φραγμένη κύμανση** *(αν $V(\phi) = +\infty$, λέμε ότι η ϕ έχει άπειρη κύμανση). Όταν θέλουμε να τονίσουμε το διάστημα στο οποίο υπολογίζεται η κύμανση της ϕ θα γράφουμε $V(\phi \mid a, b)$.*

Μια τεχνική παρατήρηση η οποία συχνά απλουστεύει τον υπολογισμό της κύμανσης είναι η εξής (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση).

Λήμμα 3.3.4. *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω Q διαμέριση του $[a,b]$. Τότε,*

$$V(\phi) = \sup\{V(\phi, P) \mid P \text{ διαμέριση του } [a,b]\,,\ P \supseteq Q\}. \tag{3.3.1.5}$$

Μία από τις συνέπειες του Λήμματος 3.3.4 είναι η «προσθετικότητα της κύμανσης ως προς διαδοχικά υποδιαστήματα»:

Πρόταση 3.3.5. *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ και έστω $\gamma \in (a,b)$. Τότε,*

$$V(\phi \mid a,b) = V(\phi \mid a,\gamma) + V(\phi \mid \gamma, b). \tag{3.3.1.6}$$

Ειδικότερα,

$$V(\phi \mid \gamma,\delta) \leqslant V(\phi \mid a,b) \tag{3.3.1.7}$$

για κάθε $[\gamma,\delta] \subset [a,b]$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την διαμέριση $Q = \{a < \gamma < b\}$ του $[a,b]$. Από το Λήμμα 3.3.4 έχουμε

$$\begin{aligned} V(\phi \mid a,b) &= \sup\{V(\phi,P) \mid P \text{ διαμέριση του } [a,b]\,,\ P \supseteq Q\} \\ &= \sup\{V(\phi,P) \mid P \text{ διαμέριση του } [a,b]\,,\ \gamma \in P\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε διαμέριση P του $[a,b]$ που περιέχει το γ είναι της μορφής $P = P_1 \cup P_2$ όπου P_1 διαμέριση του $[a,\gamma]$ και P_2 διαμέριση του $[\gamma,b]$. Επιπλέον, από τον ορισμό της κύμανσης ως προς διαμέριση, ισχύει

$$V(\phi, P \mid a,b) = V(\phi, P_1 \mid a,\gamma) + V(\phi, P_2 \mid \gamma, b). \tag{3.3.1.8}$$

Αντίστροφα, κάθε ζευγάρι διαμερίσεων P_1, P_2 των $[a,\gamma]$ και $[\gamma,b]$ αντίστοιχα, δίνει μια διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$ του $[a,b]$ η οποία περιέχει το γ. Χρησιμοποιώντας και την (3.3.1.8) βλέπουμε ότι

$$\{V(\phi, P \mid a,b) \mid \gamma \in P\} = \{V(\phi, P_1 \mid a,\gamma) + V(\phi, P_2 \mid \gamma, b)\} \tag{3.3.1.9}$$

(το πρώτο σύνολο είναι πάνω από όλες τις διαμερίσεις P του $[a,b]$ που περιέχουν το γ ενώ το δεύτερο πάνω από όλα τα ζευγάρια διαμερίσεων των $[a,\gamma]$ και $[\gamma,b]$). Παίρνοντας supremum και στα δύο μέλη έχουμε

$$\begin{aligned} V(\phi \mid a,b) &= \sup_{\gamma\in P} V(\phi, P \mid a,b) = \sup_{P_1} V(\phi, P_1 \mid a,\gamma) + \sup_{P_2} V(\phi, P_2 \mid \gamma, b) \\ &= V(\phi \mid a,\gamma) + V(\phi \mid \gamma, b). \end{aligned}$$

Με επαγωγή μπορούμε να δείξουμε ότι αν γράψουμε το $[a,b]$ σαν ένωση $[a,a_1]\cup[a_1,a_2]\cup\cdots\cup[a_{s-1},a_s]$ οσωνδήποτε διαδοχικών διαστημάτων, τότε

$$V(\phi \mid a,b) = \sum_{i=0}^{s-1} V(\phi \mid a_i, a_{i+1}) \tag{3.3.1.10}$$

όπου $a_0 = a$ και $a_s = b$. Από την (3.3.1.10) έπεται αμέσως η (3.3.1.7). □

Τα παραδείγματα που ακολουθούν εξηγούν τον ορισμό της κύμανσης: είναι ένα μέτρο της ολικής μεταβολής των τιμών της ϕ στο $[a,b]$. Λίγη σκέψη δείχνει ότι οι συναρτήσεις που έχουν φραγμένη κύμανση είναι υποχρεωτικά φραγμένες:

Λήμμα 3.3.6. *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν $V(\phi) < +\infty$ τότε η ϕ είναι φραγμένη.*

Απόδειξη. Έστω $x \in (a,b)$. Θεωρούμε τη διαμέριση $P_x = \{a < x < b\}$ του $[a,b]$. Τότε,

(3.3.1.11) $$|\phi(x) - \phi(a)| \leqslant |\phi(x) - \phi(a)| + |\phi(b) - \phi(x)| = V(\phi, P_x) \leqslant V(\phi),$$

άρα

(3.3.1.12) $$|\phi(x)| \leqslant V(\phi) + |\phi(a)|.$$

Έπεται ότι $|\phi(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [a,b]$, όπου $M = \max\{V(\phi) + |\phi(a)|, |\phi(b)|\}$. □

Παραδείγματα 3.3.7. *(α) Αν η $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη, τότε*

(3.3.1.13) $$V(\phi) = |\phi(b) - \phi(a)|.$$

Για παράδειγμα, αν η ϕ είναι αύξουσα τότε για κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ έχουμε

(3.3.1.14) $$V(\phi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} (\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)) = \phi(b) - \phi(a).$$

Άρα,

(3.3.1.15) $$V(\phi) = \sup_P V(\phi, P) = \phi(b) - \phi(a).$$

(β) Λέμε ότι η $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι **κατά τμήματα μονότονη** *αν υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος σημεία $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_s = b$ στο $[a,b]$ ώστε η ϕ να είναι μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, s-1$. Από την Πρόταση 3.3.5 και το Παράδειγμα (α),*

(3.3.1.16) $$V(\phi \mid a, b) = \sum_{i=0}^{s-1} V(\phi \mid a_i, a_{i+1}) = \sum_{i=0}^{s-1} |\phi(a_{i+1}) - \phi(a_i)|.$$

Ειδικότερα, η ϕ έχει φραγμένη κύμανση.

(γ) Έστω $\gamma \in (a,b)$ και έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με $\phi(\gamma) = 1$ και $\phi(x) = 0$ αλλιώς. Η ϕ είναι αύξουσα στο $[a,\gamma]$ και φθίνουσα στο $[\gamma, b]$. Άρα,

(3.3.1.17) $$V(\phi) = |\phi(\gamma) - \phi(a)| + |\phi(b) - \phi(\gamma)| = 2$$

από το Παράδειγμα (β).

(δ) Υπάρχουν φραγμένες συναρτήσεις που δεν έχουν φραγμένη κύμανση. Ένα παράδειγμα μας δίνει η συνάρτηση g του Dirichlet στο $[0,1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε ρητούς q_k και άρρητους α_k με $0 < q_1 < \alpha_1 < \cdots < q_n < \alpha_n < 1$. Αν P είναι η διαμέριση του $[0,1]$ που σχηματίζουν όλα αυτά τα σημεία,

(3.3.1.18) $$V(g) \geqslant V(g, P) \geqslant \sum_{k=1}^{n} |g(\alpha_k) - g(q_k)| = n.$$

Αφού $V(g) \geqslant n$ για κάθε n, η g έχει άπειρη κύμανση.

(ε) Υπάρχουν συνεχείς $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ που δεν έχουν φραγμένη κύμανση. Ένα παράδειγμα είναι το εξής: Γράφουμε το $[0,1]$ στη μορφή

(3.3.1.19)
$$[0,1] = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}].$$

Σε κάθε διάστημα $[1/2^n, 1/2^{n-1}]$ ορίζουμε μια «τριγωνική συνάρτηση» ως εξής: θέτουμε $\phi(1/2^n) = 0 = \phi(1/2^{n-1})$, $\phi(3/2^{n+1}) = 1/n$ (ο $3/2^{n+1}$ είναι το μέσο του διαστήματος) και επεκτείνουμε γραμμικά στα $[1/2^n, 3/2^{n+1}]$ και $[3/2^{n+1}, 1/2^{n-1}]$. Με αυτόν τον τρόπο η ϕ έχει οριστεί και είναι συνεχής στο $(0,1]$.

Θέτουμε $\phi(0) = 0$. Τότε, η ϕ είναι συνεχής και στο 0: παρατηρήστε ότι

(3.3.1.20)
$$0 \leqslant x < \frac{1}{2^{n-1}} \Longrightarrow 0 \leqslant \phi(x) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Θεωρούμε την διαμέριση

(3.3.1.21)
$$P_n = \left\{0 < \frac{1}{2^n} < \frac{3}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{3}{2^n} < \cdots < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1\right\}.$$

Τότε,

(3.3.1.22)
$$V(\phi, P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}.$$

Αφού η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ αποκλίνει, συμπεραίνουμε ότι η ϕ έχει άπειρη κύμανση.

(ζ) Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά M. Δηλαδή,

(3.3.1.23)
$$|\phi(x) - \phi(y)| \leqslant M \cdot |x - y|$$

για κάθε $x, y \in [a,b]$. Τότε, η ϕ έχει φραγμένη κύμανση: Αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, τότε

(3.3.1.24)
$$V(\phi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)| \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) = M \cdot (b - a).$$

Έπεται ότι

(3.3.1.25)
$$V(\phi) \leqslant M \cdot (b-a) < +\infty.$$

Ειδικότερα, αν η ϕ είναι παραγωγίσιμη και η ϕ' είναι φραγμένη στο $[a,b]$ τότε η ϕ έχει φραγμένη κύμανση. Πράγματι, χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής βλέπουμε ότι η ϕ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά

(3.3.1.26)
$$M = \sup\{|\phi'(x)| \mid a \leqslant x \leqslant b\}.$$

3.3.2 Ο χώρος των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης

Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό διάστημα. Γράφουμε $BV[a,b]$ για το σύνολο όλων των συναρτήσεων $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ που έχουν φραγμένη κύμανση. Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι το σύνολο $BV[a,b]$ είναι άλγεβρα συναρτήσεων: είναι γραμμικός χώρος και αν $\phi, \psi \in BV[a,b]$ τότε το γινόμενο $\phi \cdot \psi \in BV[a,b]$.

Πρόταση 3.3.8. *Έστω $\phi, \psi \in BV[a,b]$ και έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε,*

1. *$\phi + \psi \in BV[a,b]$ και $V(\phi+\psi) \leqslant V(\phi) + V(\psi)$.*
2. *$t \cdot \phi \in BV[a,b]$ και $V(t\cdot\phi) = |t| \cdot V(\phi)$.*
3. *$\phi \cdot \psi \in BV[a,b]$ και $V(\phi\cdot\psi) \leqslant \|\phi\|_\infty V(\psi) + \|\psi\|_\infty V(\phi)$, όπου $\|\phi\|_\infty = \sup\{|\phi(x)| : a \leqslant x \leqslant b\}$ και $\|\psi\|_\infty = \sup\{|\psi(x)| : a \leqslant x \leqslant b\}$. Το Λήμμα 3.3.6 δείχνει ότι οι $\|\phi\|_\infty$, $\|\psi\|_\infty$ ορίζονται καλά.*

Απόδειξη. Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Από την

$$\begin{aligned} V(\phi+\psi, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(x_{k+1}) + \psi(x_{k+1}) - \phi(x_k) - \psi(x_k)| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |\psi(x_{k+1}) - \psi(x_k)| \\ &= V(\phi, P) + V(\psi, P) \end{aligned}$$

έπεται ότι

$$V(\phi+\psi) \leqslant V(\phi) + V(\psi) < +\infty. \tag{3.3.2.1}$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό αρκεί να παρατηρήσετε ότι

$$\begin{aligned} V(t\cdot\phi, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |t\cdot\phi(x_{k+1}) - t\cdot\phi(x_k)| \\ &= |t| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)| \\ &= |t| \cdot V(\phi, P). \end{aligned}$$

Τέλος, με κατάλληλες προσθαφαιρέσεις και εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} V(\phi\cdot\psi, P) &= \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(x_{k+1})\psi(x_{k+1}) - \phi(x_k)\psi(x_k)| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\phi(x_{k+1})| \cdot |\psi(x_{k+1}) - \psi(x_k)| + \sum_{k=0}^{n-1} |\psi(x_k)| \cdot |\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)| \\ &\leqslant \|\phi\|_\infty V(\psi, P) + \|\psi\|_\infty V(\phi, P), \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η

$$V(\phi\cdot\psi) \leqslant \|\phi\|_\infty V(\psi) + \|\psi\|_\infty V(\phi). \tag{3.3.2.2}$$

□

Στην περίπτωση που η $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και η ϕ' είναι Riemann ολοκληρώσιμη, η κύμανση της ϕ δίνεται από το ολοκλήρωμα Riemann της $|\phi'|$:

Θεώρημα 3.3.9. *Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αν η ϕ' είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε $\phi \in BV[a,b]$ και*

$$V(\phi) = \int_a^b |\phi'(t)|\, dt. \tag{3.3.2.3}$$

Απόδειξη. Η ϕ' έχει υποτεθεί Riemann ολοκληρώσιμη, άρα είναι φραγμένη συνάρτηση. Αυτό αποδεικνύει ότι $\phi \in BV[a,b]$ (η ϕ είναι Lipschitz συνεχής). Επιπλέον η $|\phi'|$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη, άρα το δεξιό μέλος της (3.3.2.3) ορίζεται καλά.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε διαμερίσεις P_1 και P_2 του $[a,b]$ τέτοιες ώστε

$$V(\phi) - \varepsilon < V(\phi, P_1) \leqslant V(\phi) \tag{3.3.2.4}$$

και

$$U(|\phi'|, P_2) - L(|\phi'|, P_2) < \varepsilon. \tag{3.3.2.5}$$

Αν $P = P_1 \cup P_2 = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$, τότε οι (3.3.2.4) και (3.3.2.5) ισχύουν με την P στη θέση των P_1 και P_2 αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής σε κάθε $[x_k, x_{k+1}]$ βρίσκουμε $t_k \in (x_k, x_{k+1})$ με

$$|\phi(x_{k+1}) - \phi(x_k)| = |\phi'(t_k)| \cdot (x_{k+1} - x_k). \tag{3.3.2.6}$$

Άρα,

$$V(\phi, P) = \sum_{k=0}^{n-1} |\phi'(t_k)| \cdot (x_{k+1} - x_k). \tag{3.3.2.7}$$

Από την (3.3.2.5) έχουμε

$$\Big| \int_a^b |\phi'(t)| dt - \sum_{k=0}^{n-1} |\phi'(t_k)|(x_{k+1} - x_k) \Big| < \varepsilon. \tag{3.3.2.8}$$

Συνδυάζοντας τις (3.3.2.7) και (3.3.2.8) παίρνουμε

$$\Big| \int_a^b |\phi'(t)| dt - V(\phi, P) \Big| < \varepsilon, \tag{3.3.2.9}$$

και από την (3.3.2.4) έπεται ότι

$$\Big| \int_a^b |\phi'(t)| dt - V(\phi) \Big| < 2\varepsilon. \tag{3.3.2.10}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έχουμε αποδείξει το ζητούμενο. □

3.3.3 Χαρακτηρισμός των συναρτήσεων φραγμένης κύμανσης

Έστω $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με φραγμένη κύμανση. Από την Πρόταση 3.3.5 η ϕ έχει φραγμένη κύμανση σε κάθε διάστημα $[a,x]$ όπου $x \in [a,b]$ (στην περίπτωση που $x = a$, η κύμανση της ϕ στο $[a,x]$ ορίζεται να είναι ίση με μηδέν). Μπορούμε επομένως να ορίσουμε μια συνάρτηση $v_\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$v_\phi(x) = V(\phi \mid a, x). \tag{3.3.3.1}$$

Η v_ϕ λέγεται **συνάρτηση ολικής κύμανσης** της ϕ. Από την Πρόταση 3.3.5 έχουμε

$$v_\phi(y) - v_\phi(x) = V(\phi \mid a, y) - V(\phi \mid a, x) = V(\phi \mid x, y) \geqslant 0 \tag{3.3.3.2}$$

αν $x < y$ στο $[a, b]$. Άρα, η v_ϕ είναι αύξουσα συνάρτηση.

Επίσης, θεωρώντας τη διαμέριση $P_{xy} = \{x < y\}$ του $[x, y]$ έχουμε

(3.3.3.3) $$\phi(y) - \phi(x) \leqslant |\phi(y) - \phi(x)| \leqslant V(\phi \mid x, y) = v_\phi(y) - v_\phi(x),$$

δηλαδή

(3.3.3.4) $$v_\phi(x) - \phi(x) \leqslant v_\phi(y) - \phi(y)$$

αν $x < y$ στο $[a, b]$. Άρα, η $v_\phi - \phi$ είναι αύξουσα συνάρτηση.

Από τις (3.3.3.2) και (3.3.3.4) προκύπτει εύκολα ο εξής χαρακτηρισμός των συναρτήσεων με φραγμένη κύμανση.

Θεώρημα 3.3.10. *Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$. Η ϕ έχει φραγμένη κύμανση αν και μόνο αν γράφεται σαν διαφορά $\phi = \phi_1 - \phi_2$ δύο αυξουσών συναρτήσεων.*

Απόδειξη. Έστω $\phi \in BV[a, b]$. Είδαμε ότι οι συναρτήσεις v_ϕ και $v_\phi - \phi$ είναι αύξουσες. Γράφοντας

(3.3.3.5) $$\phi = v_\phi - (v_\phi - \phi)$$

έχουμε περιγράψει την ϕ σαν διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων.

Αντίστροφα, αν $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι δυο αύξουσες συναρτήσεις, τότε $\phi_1, \phi_2 \in BV[a, b]$ και, αφού ο $BV[a, b]$ είναι γραμμικός χωρος, έχουμε $\phi_1 - \phi_2 \in BV[a, b]$. □

Παρατήρηση 3.3.11. *Η ανάλυση $\phi = \phi_1 - \phi_2$ δεν είναι μοναδική. Αν $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε αύξουσα συνάρτηση, τότε $\phi = (\phi_1 + f) - (\phi_2 + f)$ και οι $\phi_1 + f, \phi_2 + f$ είναι προφανώς αύξουσες.*

Αν η ϕ είναι συνεχής συνάρτηση με φραγμένη κύμανση, τότε οι ϕ_1, ϕ_2 του Θεωρήματος 3.3.10 μπορούν να υποτεθούν συνεχείς. Η απόδειξη θα βασιστεί στο εξής Λήμμα.

Λήμμα 3.3.12. *Έστω $\phi \in BV[a, b]$ και έστω $\gamma \in [a, b]$. Η ϕ είναι συνεχής στο γ αν και μόνο αν η v_ϕ είναι συνεχής στο γ.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι τα πλευρικά όρια των ϕ και v_ϕ καθώς $y \to x^+$ ή $y \to x^-$ υπάρχουν: οι μονότονες συναρτήσεις έχουν αυτήν την ιδιότητα, άρα και οι διαφορές μονότονων συναρτήσεων. Θα δείξουμε ότι η ϕ είναι συνεχής από δεξιά στο $\gamma \in [a, b)$ αν και μόνο αν η v_ϕ είναι συνεχής από δεξιά στο γ (δουλεύοντας όμοια με τα όρια από αριστερά, παίρνουμε το συμπέρασμα).

Η μία κατεύθυνση είναι απλή: είδαμε ότι αν $x < y$ στο $[a, b]$ τότε $|\phi(y) - \phi(x)| \leqslant v_\phi(y) - v_\phi(x)$. Παίρνοντας όρια καθώς $y \to x^+$ έχουμε

(3.3.3.6) $$v_\phi(x+) - v_\phi(x) \geqslant |\phi(x+) - \phi(x)|.$$

Αν η v_ϕ είναι συνεχής από δεξιά, η (3.3.3.6) δείχνει ότι $\phi(x+) = \phi(x)$. Δηλαδή, η ϕ είναι συνεχής από δεξιά.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η ϕ είναι συνεχής από δεξιά στο $\gamma \in [a, b)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|\phi(\gamma) - \phi(x)| < \varepsilon/2$ αν $\gamma \leqslant x < \gamma + \delta$. Θεωρούμε διαμέριση $P = \{\gamma = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[\gamma, b]$ με την ιδιότητα

(3.3.3.7) $$V(\phi \mid \gamma, b) < V(\phi, P \mid \gamma, b) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Η (3.3.3.7) εξακολουθεί να ισχύει αν στη θέση της P πάρουμε οποιαδήποτε εκλέπτυνσή της. Αν λοιπόν $\gamma < t < \min\{\gamma+\delta, x_1\}$ και $P_t = \{t < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ έχουμε

$$\begin{aligned} V(\phi \mid \gamma, b) - \frac{\varepsilon}{2} &< V(\phi, P \cup \{t\} \mid \gamma, b) \\ &= |\phi(t) - \phi(\gamma)| + V(\phi, P_t \mid t, b) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + V(\phi \mid t, b). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\begin{aligned} v_\phi(t) - v_\phi(\gamma) &= \big(V(\phi \mid a, b) - V(\phi \mid t, b)\big) - \big(V(\phi \mid a, b) - V(\phi \mid \gamma, b)\big) \\ &= V(\phi \mid \gamma, b) - V(\phi \mid t, b) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Δείξαμε ότι $0 \leqslant v_\phi(t) - v_\phi(\gamma) < \varepsilon$ αν $\gamma < t < \min\{\gamma+\delta, x_1\}$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η v_ϕ είναι συνεχής από δεξιά στο γ. □

Άμεση συνέπεια του Λήμματος 3.3.12 είναι το εξής.

Θεώρημα 3.3.13. *Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Η ϕ έχει φραγμένη κύμανση αν και μόνο αν γράφεται σαν διαφορά δύο συνεχών και αυξουσών συναρτήσεων.* □

3.4 Παραγωγισιμότητα μονότονων συναρτήσεων

Αφετηρία αυτής της παραγράφου είναι το ερώτημα να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη που να εξασφαλίζει ότι κάποια συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την

(3.4.0.8) $$g(x) - g(a) = \int_a^x g'(t)\, d\lambda(t), \quad \text{για κάθε } x \in [a, b].$$

Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζουμε ότι αν η g είναι παραγωγίσιμη και η g' είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann τότε η (3.4.0.8) ισχύει. Για να επεκτείνουμε αυτό το αποτέλεσμα, απαραίτητη προϋπόθεση είναι η g να είναι (τουλάχιστον) σχεδόν παντού παραγωγίσιμη. Κατόπιν, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος ως ολοκλήρωμα Lebesgue και να προσπαθήσουμε να δούμε ποιές είναι οι συνθήκες που εξασφαλίζουν (και είναι απαραίτητες για) την ισότητα.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι οι συναρτησεις φραγμένης κύμασης είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμες.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση φραγμένης κύμανσης. Τότε, η ϕ είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού.*

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.10, η ϕ γράφεται στη μορφή $\phi = g_1 - g_2$, όπου $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσες συναρτήσεις. Έπεται ότι, για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1 μπορούμε να θεωρήσουμε μια αύξουσα συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ και να αποδείξουμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού. Θα δώσουμε την απόδειξη κάνοντας την πρόσθετη υπόθεση ότι η g είναι συνεχής (η απόδειξη στη γενική περίπτωση έχει περισσότερες τεχνικές λεπτομέρειες αλλά χρησιμοποιεί παρόμοιες ιδέες, και την παραλείπουμε). Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα του F. Riesz.

Λήμμα 3.4.2 (το λήμμα του ανατέλλοντος ηλίου, F. Riesz)**.** *Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Έστω E το σύνολο των $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία υπάρχει $h = h_x > 0$ ώστε*

(3.4.0.9)
$$g(x+h) > g(x).$$

Αν το E είναι μη κενό, τότε είναι ανοικτό σύνολο, άρα γράφεται ως ξένη ένωση $E = \bigcup_k (a_k, b_k)$, όπου κάθε (a_k, b_k) είναι ανοικτό διάστημα ή ημιευθεία. Για κάθε φραγμένο διάστημα (a_k, b_k) αυτής της ένωσης, ισχύει

(3.4.0.10)
$$g(b_k) - g(a_k) = 0.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το E είναι μη κενό. Παρατηρούμε ότι είναι ανοικτό: αν $x \in E$ τότε υπάρχει $h > 0$ ώστε $g(x+h) > g(x)$, και λόγω της συνέχειας της g στο x μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε $x + \delta < x + h$ και $g(y) < g(x+h)$ για κάθε $y \in (x-\delta, x+\delta)$. Τότε, $(x-\delta, x+\delta) \subseteq E$: πράγματι, αν $y \in (x-\delta, x+\delta)$, τότε $x + h = y + (x+h-y)$ και $h_1 : x+h-y > x+h-(x+\delta) > 0$ (άρα, για το $y + h_1$ έχουμε $g(y) < g(x+h) = g(y+h_1)$). Τότε, γνωρίζουμε ότι το E γράφεται στη μορφή $E = \bigcup_k (a_k, b_k)$, όπου κάθε (a_k, b_k) είναι ανοικτό διάστημα ή ημιευθεία και τα (a_k, b_k) είναι ξένα ανά δύο.

Θεωρούμε ένα φραγμένο διάστημα (a_k, b_k) από αυτήν την ένωση. Τότε, $a_k \notin E$ και από τον ορισμό του E δεν μπορούμε να έχουμε $g(b_k) > g(a_k)$. Δηλαδή, $g(b_k) \leqslant g(a_k)$.

Ας υποθέσουμε ότι $g(b_k) < g(a_k)$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $\gamma \in (a_k, b_k)$ ώστε $g(\gamma) = \frac{g(a_k)+g(b_k)}{2}$. Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε το γ να είναι το μέγιστο σημείο του (a_k, b_k) με αυτήν την ιδιότητα. Αφού $\gamma \in E$, υπάρχει $u > \gamma$ με $g(u) > g(\gamma)$. Επίσης, αφού $b_k \notin E$ έχουμε $g(x) \leqslant g(b_k)$ για κάθε $x \geqslant b_k$. Όμως, $g(u) > g(\gamma) > g(b_k)$. Άρα, $u < b_k$. Εφαρμόζοντας ξανά το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής βρίσκουμε $\gamma_1 \in (u, b_k)$ με $g(\gamma_1) = g(\gamma)$. Αυτό είναι άτοπο, γιατί $\gamma_1 > \gamma$ και είχαμε υποθέσει ότι το γ είναι το μέγιστο σημείο του (a_k, b_k) στο οποίο η g παίρνει την τιμή $\frac{g(a_k)+g(b_k)}{2}$. □

Τροποποιώντας ελαφρά το επιχείρημα της προηγούμενης απόδειξης παίρνουμε επίσης το εξής.

Πόρισμα 3.4.3. *Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Έστω E το σύνολο των $x \in (a,b)$ για τα οποία υπάρχει $h = h_x > 0$ ώστε*

(3.4.0.11)
$$g(x+h) > g(x).$$

Τότε, το E είναι είτε κενό ή ανοικτό σύνολο, και στην δεύτερη περίπτωση γράφεται στη μορφή $E = \bigcup_k (a_k, b_k)$, όπου κάθε (a_k, b_k) είναι φραγμένο ανοικτό διάστημα και $g(a_k) = g(b_k)$, με μόνη πιθανή εξαίρεση την περίπτωση όπου $a_k = a$, οπότε έχουμε μόνο την $g(a_k) \leqslant g(b_k)$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1 δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς:

Ορισμός 3.4.4. *Για κάθε $x \in [a,b]$ και $h \neq 0$ με $x + h \in [a,b]$ ορίζουμε*

(3.4.0.12)
$$\Delta_h(f)(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Οι αριθμοί Dini της f στο x ορίζονται ως εξής:

$$D^+(f)(x) = \limsup_{h \to 0^+} \Delta_h(f)(x)$$
$$D_+(f)(x) = \liminf_{h \to 0^+} \Delta_h(f)(x)$$
$$D^-(f)(x) = \limsup_{h \to 0^-} \Delta_h(f)(x)$$
$$D_-(f)(x) = \liminf_{h \to 0^-} \Delta_h(f)(x).$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1. Έστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής αύξουσα συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι $D_+(g)(x) \leqslant D^+(g)(x)$ και $D_-(g)(x) \leqslant D^-(g)(x)$ για κάθε $x \in [a, b]$. Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε τα εξής:

(α) $D^+(g)(x) < \infty$ σχεδόν παντού στο $[a, b]$, και

(β) $D^+(g)(x) \leqslant D_-(g)(x)$ σχεδόν παντού στο $[a, b]$.

Έχοντας αποδείξει τα παραπάνω, εφαρμόζοντας το (β) για την αύξουσα συνάρτηση $h(x) = -g(-x)$ βλέπουμε ότι $D^-(g)(x) \leqslant D_+(g)(x)$ σχεδόν παντού. Άρα, σχεδόν παντού στο $[a, b]$ έχουμε

(3.4.0.13)
$$D^+(g)(x) \leqslant D_-(g)(x) \leqslant D^-(g)(x) \leqslant D_+(g)(x) \leqslant D^+(g)(x) < \infty$$

και έπεται ότι η $g'(x)$ υπάρχει σχεδόν παντού.

Σταθεροποιούμε $s > 0$ και ορίζουμε

(3.4.0.14)
$$E_s := \{x \in [a, b] : D^+(g)(x) > s\}.$$

Αποδεικνύουμε αρχικά ότι το E_s είναι μετρήσιμο σύνολο (οι λεπτομέρειες αφήνονται για την Άσκηση 12). Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 3.4.3 για την συνάρτηση $w(x) = g(x) - sx$ βλέπουμε ότι $E_s \subseteq \bigcup_k (a_k, b_k)$, όπου $g(b_k) - g(a_k) \geqslant s(b_k - a_k)$. Άρα,

(3.4.0.15)
$$\lambda(E_s) \leqslant \sum_k (b_k - a_k) \leqslant \frac{1}{s} \sum_k (g(b_k) - g(a_k)) \leqslant \frac{1}{s}(g(b) - g(a)).$$

Έπεται ότι $\lim_{s\to\infty} \lambda(E_s) = 0$. Αφού $\{x : D^+(g)(x) = \infty\} \subseteq E_s$ για κάθε $s > 0$, συμπεραίνουμε ότι $D^+(g)(x) < \infty$ σχεδόν παντού.

Στη συνέχεια σταθεροποιούμε $R > r$ και ορίζουμε

(3.4.0.16)
$$E_{r,R} = \{x \in [a, b] : D^+(g)(x) > R \;\text{ και }\; D_-(g)(x) < r\}.$$

Θα δείξουμε ότι $\lambda(E_{r,R}) = 0$. Παρατηρώντας ότι

(3.4.0.17)
$$\{x : D_-(g)(x) < D^+(g)(x)\} = \bigcup_{r,R\in\mathbb{Q}, r<R} E_{r,R}$$

βλέπουμε μετά ότι $\lambda(\{x : D_-(g)(x) < D^+(g)(x)\}) = 0$, δηλαδή $D^+(g)(x) \leqslant D_-(g)(x)$ σχεδόν παντού, και αυτό αποδεικνύει το (β).

Υποθέτουμε ότι $\lambda(E_{r,R}) > 0$. Αφού $R > r$, μπορούμε να βρούμε ανοικτό σύνολο U ώστε $E_{r,R} \subset U \subset (a, b)$ και $\lambda(U) < (R/r)\lambda(E_{r,R})$. Γράφουμε το U σαν ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων, $U = \bigcup_n I_n$. Σταθεροποιούμε κάποιο n και εφαρμόζουμε το Πόρισμα 3.4.3 για την συνάρτηση $\ell(x) = -g(-x) + rx$ στο διάστημα $-I_n$. Γυρίζοντας πίσω στο (a, b) παίρνουμε μια ξένη ένωση διαστημάτων $\bigcup_k (a_k, b_k)$, η οποία περιέχεται στο I_n, τέτοια ώστε

(3.4.0.18)
$$g(b_k) - g(a_k) \leqslant r(b_k - a_k).$$

Εφαρμόζοντας όμως το Πόρισμα 3.4.3 για την $m(x) = g(x) - Rx$ στο (a_k, b_k), βρίσκουμε μια νέα ξένη ένωση διαστημάτων $U_n = \bigcup_{k,j} (a_{k,j}, b_{k,j})$ με $(a_{k,j}, b_{k,j}) \subset (a_k, b_k)$ για κάθε k και j, ώστε

(3.4.0.19)
$$g(b_{k,j}) - g(a_{k,j}) \geqslant R(b_{k,j} - a_{k,j}).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\begin{aligned}\lambda(U_n) &= \sum_{k,j}(b_{k,j}-a_{k,j}) \leqslant \frac{1}{R}\sum_k\left(\sum_j(g(b_{k,j})-g(a_{k,j}))\right)\\ &\leqslant \frac{1}{R}\sum_k(g(b_k)-g(a_k)) \leqslant \frac{r}{R}\sum_k(b_k-a_k)\\ &\leqslant \frac{r}{R}\lambda(I_n).\end{aligned}$$

Αφού $D^+(g)(x) > R$ και $D_-(g)(x) < r$ για κάθε $x \in E_{r,R}$, έχουμε $E_{r,R}\cap I_n \subseteq U_n \subseteq I_n$. Άρα,

$$\begin{aligned}\lambda(E_{r,R}) &= \sum_n \lambda(E_{r,R}\cap I_n) \leqslant \sum_n \lambda(U_n)\\ &\leqslant \frac{r}{R}\sum_n \lambda(I_n) = \frac{r}{R}\lambda(U) < \lambda(E_{r,R}).\end{aligned}$$

Αυτό είναι άτοπο, άρα $\lambda(E_{r,R}) = 0$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Είδαμε ότι οι αύξουσες συνεχείς συναρτήσεις $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες σχεδόν παντού. Αυτό που μπορούμε να πούμε σχετικά με την (3.4.0.8) είναι το εξής.

Πρόταση 3.4.5. *Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσα και συνεχής. Τότε, η g' ορίζεται σχεδόν παντού στο $[a,b]$ και είναι μετρήσιμη και μη αρνητική. Τέλος,*

(3.4.0.20)
$$\int_a^b g'(x)d\lambda(x) \leqslant g(b)-g(a).$$

Απόδειξη. Επεκτείνουμε την g σε συνεχή αύξουσα συνάρτηση, θέτοντας $g \equiv g(b)$ στο $[b,\infty)$ και $g \equiv g(a)$ στο $(-\infty,a]$. Η g' ορίζεται σχεδόν παντού από το Θεώρημα 3.4.1. Είναι μετρήσιμη, διότι οι συναρτήσεις

(3.4.0.21)
$$u_n(x) = \frac{g\left(x+\frac{1}{n}\right)-g(x)}{1/n}$$

είναι μετρήσιμες και $u_n(x) \to g'(x)$ σχεδόν παντού στο $[a,b]$. Επίσης, αφού η g είναι αύξουσα, έχουμε $u_n \geqslant 0$ άρα και $g' = \lim_{n\to\infty} u_n \geqslant 0$.

Από το λήμμα του Fatou έχουμε

(3.4.0.22)
$$\int_a^b g'(x)d\lambda(x) \leqslant \liminf_n \int_a^b u_n(x)d\lambda(x).$$

Όμως,

$$\begin{aligned}\int_a^b u_n(x)d\lambda(x) &= n\int_a^b g(x+1/n)d\lambda(x) - n\int_a^b g(x)d\lambda(x)\\ &= n\int_{a+1/n}^{b+1/n} g(y)d\lambda(y) - n\int_a^b g(x)d\lambda(x)\end{aligned}$$

$$= n \int_b^{b+1/n} g(x) d\lambda(x) - n \int_a^{a+1/n} g(x) d\lambda(x).$$

Αφού η g είναι συνεχής, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/n} \int_a^{a+1/n} g(x) d\lambda(x) = g(a) \text{ και } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1/n} \int_b^{b+1/n} g(x) d\lambda(x) = g(b). \tag{3.4.0.23}$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.4.0.20). □

Παρατήρηση 3.4.6. *Η συνάρτηση Cantor-Lebesgue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι αύξουσα και συνεχής. Έχουμε δει ότι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1] \setminus C$. Αφού $\lambda(C) = 0$, έχουμε $f'(x) = 0$ σχεδόν παντού. Θυμηθείτε ότι $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Έτσι, έχουμε*

$$\int_0^1 f'(x) d\lambda(x) = 0 < 1 = f(1) - f(0). \tag{3.4.0.24}$$

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι η ανισότητα στην (3.4.0.20) μπορεί να είναι γνήσια.

3.5 Απόλυτα συνεχείς συναρτήσεις

Ορισμός 3.5.1. *Μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται* **απολύτως συνεχής** *αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν (a_k, b_k), $1 \leqslant k \leqslant N$ είναι ξένα ανά δύο υποδιαστήματα του $[a,b]$ με $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$ τότε $\sum_{k=1}^{N} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$.*

Παρατηρήσεις 3.5.2. *(α) Από τον ορισμό είναι άμεσο (πάρτε $N = 1$) ότι κάθε απολύτως συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής (ισοδύναμα, συνεχής).*

(β) Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι απολύτως συνεχής, τότε η f έχει φραγμένη κύμανση. Με βάση τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου, η f γράφεται ως διαφορά $f = \phi_1 - \phi_2$ δύο συνεχών αυξουσών συναρτήσεων $\phi_1, \phi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$. Επίσης, η συνάρτηση $v_\phi(x) = V(\phi \mid a, x)$ είναι συνεχής, και μάλιστα απολύτως συνεχής στο $[a,b]$.

(γ) Αν $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε η $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, d\lambda(x) \tag{3.5.0.25}$$

είναι απολύτως συνεχής. Αυτό προκύπτει από το εξής: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν E είναι ένα μετρήσιμο υποσύνολο του $[a,b]$ με $\lambda(E) < \delta$ τότε

$$\int_E f\, d\lambda < \varepsilon. \tag{3.5.0.26}$$

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την συνάρτηση $g_n(x) = \min\{|f(x)|, n\}$. Παρατηρήστε ότι $g_n \leqslant n$. Η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα και $g_n \to |f|$. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\lambda = \int |f|\, d\lambda. \tag{3.5.0.27}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\int (|f| - g_n)\, d\lambda = \int |f|\, d\lambda - \int g_n\, d\lambda < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.5.0.28}$$

Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2n}$. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda(E) < \delta$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_E |f|\, d\lambda &= \int_E g_n\, d\lambda + \int_E (|f| - g_n)\, d\lambda \leqslant \int_E g_n\, d\lambda + \int (|f| - g_n)\, d\lambda \\ &\leqslant n\lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2} < n\frac{\varepsilon}{2n} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Έστω τώρα (a_k, b_k), $1 \leqslant k \leqslant N$ ξένα ανά δύο υποδιαστήματα του $[a, b]$ με $\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} |F(b_k) - F(a_k)| &= \sum_{k=1}^{N} \left| \int_{a_k}^{b_k} f\, d\lambda \right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \int_{a_k}^{b_k} |f|\, d\lambda \\ &= \int_{\bigcup_{k=1}^{N} (a_k, b_k)} |f|\, d\lambda < \varepsilon,\end{aligned}$$

διότι

$$\lambda\left(\bigcup_{k=1}^{N} (a_k, b_k)\right) = \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) < \delta. \tag{3.5.0.29}$$

Έπεται ότι η F είναι απολύτως συνεχής. □

Η τελευταία παρατήρηση δείχνει ότι η απόλυτη συνέχεια είναι αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί μια σχεδόν παντού παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [a,, b] \to \mathbb{R}$ ώστε να έχουμε την

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f(t)\, d\lambda(t) \tag{3.5.0.30}$$

για κάθε $x \in [a, b]$. ΄Οπως θα δούμε, η συνθήκη αυτή είναι και ικανή.

Θεώρημα 3.5.3. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού στο $[a, b]$. Επιπλέον, αν $f'(x) = 0$ σχεδόν παντού, τότε η f είναι σταθερή.*

Το γεγονός ότι η f είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού προκύπτει από τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου και από την παρατήρηση ότι κάθε απολύτως συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής και έχει φραγμένη κύμανση, άρα γράφεται ως διαφορά δύο συνεχών αυξουσών συναρτήσεων. Για να δείξουμε ότι η υπόθεση «$f'(x) = 0$ σχεδόν παντού» συνεπάγεται ότι η f είναι σταθερή, θα χρειαστούμε κάποια λήμματα κάλυψης του Vitali, τα οποία περιγράφουμε στο γενικότερο πλαίσιο του $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 3.5.4. *Λέμε ότι μια οικογένεια $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$ από μπάλες είναι* **Vitali κάλυψη** *ενός συνόλου $E \subset \mathbb{R}^d$ αν για κάθε $x \in E$ και για κάθε $\eta > 0$ υπάρχει μια μπάλα $B_j \in \mathcal{B}$ τέτοια ώστε $x \in B_j$ και $\lambda(B_j) < \eta$. Δηλαδή, αν κάθε $x \in E$ καλύπτεται από μπάλες της οικογένειας $\mathcal{B}$ με οσοδήποτε μικρό μέτρο.*

Λήμμα 3.5.5. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$. Αν $\mathcal{B}$ είναι μια Vitali κάλυψη του E τότε, για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένες το πλήθος μπάλες $B_1, \ldots, B_N$ στην $\mathcal{B}$ οι οποίες είναι ξένες ανά δύο και ικανοποιούν την*

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E) - \delta. \tag{3.5.0.31}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγικά το Λήμμα 3.2.5. Θέτουμε $\gamma = 3^{-d}$. Για δοθέν $0 < \delta < \lambda(E)$, μπορούμε να βρούμε συμπαγές $E' \subseteq E$ με $\lambda(E') \geqslant \delta$. Τότε, το E' καλύπτεται από μια πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathcal{B}$, και το Λήμμα 3.2.5 μας εξασφαλίζει ότι υπάρχουν ξένες ανά δύο μπάλες $B_1, \ldots, B_{N_1} \in \mathcal{B}$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{N_1} \lambda(B_i) \geqslant \gamma\lambda(E') \geqslant \gamma\delta. \tag{3.5.0.32}$$

Κρατάμε τις $B_1, \ldots, B_{N_1}$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν $\sum_{i=1}^{N_1} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E) - \delta$ τότε έχουμε ήδη αποδείξει το ζητούμενο.
2. Αν $\sum_{i=1}^{N_1} \lambda(B_i) < \lambda(E) - \delta$, ορίζουμε $E_2 = E \setminus \bigcup_{i=1}^{N_1} \overline{B_i}$ και, αφού $\lambda(E_2) \geqslant \lambda(E) - \sum_{i=1}^{N_1} \lambda(B_i) > \delta$, βρίσκουμε συμπαγές $E_2' \subseteq E_2$ με $\lambda(E_2') \geqslant \delta$. Αφού η $\mathcal{B}$ είναι Vitali κάλυψη του E, εύκολα ελέγχουμε ότι οι μπάλες της $\mathcal{B}$ που είναι ξένες προς την $\bigcup_{i=1}^{N_1} \overline{B_i}$ εξακολουθούν να καλύπτουν το E_2'. Άρα, το E_2' καλύπτεται από μια πεπερασμένη υποοικογένεια της $\mathcal{B}$, και το Λήμμα 3.2.5 μας εξασφαλίζει ότι υπάρχουν ξένες ανά δύο μπάλες $B_{N_1+1}, \ldots, B_{N_2} \in \mathcal{B}$ ώστε

$$\sum_{i=N_1+1}^{N_2} \lambda(B_i) \geqslant \gamma\lambda(E_2') \geqslant \gamma\delta. \tag{3.5.0.33}$$

   Δηλαδή,

$$\sum_{i=1}^{N_2} \lambda(B_i) \geqslant 2\gamma\delta. \tag{3.5.0.34}$$

Κρατάμε τις $B_1, \ldots, B_{N_2}$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Αν $\sum_{i=1}^{N_2} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E) - \delta$ τότε έχουμε ήδη αποδείξει το ζητούμενο. Αν $\sum_{i=1}^{N_2} \lambda(B_i) < \lambda(E) - \delta$, βρίσκουμε ξένες μπάλες $B_{N_2+1}, \ldots, B_{N_3} \in \mathcal{B}$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{N_3} \lambda(B_i) \geqslant 3\gamma\delta. \tag{3.5.0.35}$$

Αν συνεχίσουμε έτσι, και αν έχουμε κάνει k βήματα, έχουμε επιλέξει ξένες μπάλες από την $\mathcal{B}$ ώστε το άθροισμα των μέτρων τους να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από $k\gamma\delta$. Έτσι, είτε θα πετύχουμε το ζητούμενο διότι $\sum_{i=1}^{N_s} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E) - \delta$ στο s-βήμα της διαδικασίας, ή κάποια στιγμή θα φτάσουμε στο k-βήμα για τον μικρότερο k που ικανοποιεί την $k\gamma\delta \geqslant \lambda(E) - \delta$, οπότε θα έχουμε πάλι το ζητούμενο, διότι

(3.5.0.36) $$\sum_{i=1}^{N_k} \lambda(B_i) \geqslant k\gamma\delta \geqslant \lambda(E) - \delta.$$

$\boxed{+}$

Πόρισμα του Λήμματος 3.5.5 είναι το εξής.

Λήμμα 3.5.6. *Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ με $\lambda(E) < \infty$. Αν $\mathcal{B}$ είναι μια Vitali κάλυψη του E τότε, για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένες το πλήθος μπάλες $B_1, \ldots, B_N$ στην $\mathcal{B}$ οι οποίες είναι ξένες ανά δύο και ικανοποιούν την*

(3.5.0.37) $$\lambda\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) < 2\delta.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ανοικτλο σύνολο $G \supseteq E$ με $\lambda(G \setminus E) < \delta$. Οι μπάλες από την $\mathcal{B}$ που, επιπλέον, περιέχονται στο G εξακολουθούν να σχηματίζουν Vitali κάλυψη $\mathcal{B}'$ του E. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.5.5 βρίσκουμε πεπερασμένες το πλήθος μπάλες $B_1, \ldots, B_N$ στην $\mathcal{B}'$ οι οποίες είναι ξένες ανά δύο και ικανοποιούν την

(3.5.0.38) $$\sum_{i=1}^{N} \lambda(B_i) \geqslant \lambda(E) - \delta.$$

Τότε,

(3.5.0.39) $$\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) \subseteq G,$$

και τα δύο σύνολα στο αριστερό μέλος είναι ξένα. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\lambda\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B_i\right) &\leqslant \lambda(G) - \lambda\left(\bigcup_{i=1}^{N} B_i\right)\\ &< \lambda(E) + \delta - (\lambda(E) - \delta) = 2\delta.\end{aligned}$$

$\boxed{+}$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.3. Υποθέτουμε ότι η f είναι απολύτως συνεχής και ότι $f'(x) = 0$ σχεδόν παντού, και θα δείξουμε ότι η f είναι σταθερή. Αρκεί να δείξουμε ότι $f(b) = f(a)$, διότι μετά μπορούμε να επαναλάβουμε το ίδιο επιχείρημα στο διάστημα $[a, x]$ και να συμπεράνουμε ότι $f(x) = f(a)$ για κάθε $a < x \leqslant b$. Θεωρούμε το σύνολο E των $x \in (a, b)$ για τα οποία υπάρχει η $f'(x)$ και είναι ίση με μηδέν. Από την υπόθεση έχουμε $\lambda(E) = b - a$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $x \in E$ έχουμε

(3.5.0.40) $$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| = 0,$$

άρα, για κάθε $\eta > 0$ μπορούμε να βρούμε $I_x = (a_x, b_x) \subset [a, b]$ τέτοιο ώστε

(3.5.0.41) $$x \in I_x, \quad b_x - a_x < \eta, \quad \text{και} \quad |f(b_x) - f(a_x)| < \varepsilon(b_x - a_x).$$

Η οικογένεια όλων αυτών των διαστημάτων είναι κάλυψη του E κατά Vitali. Από το Λήμμα 3.5.6, για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος τέτοια διαστήματα $I_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, \ldots, N$, τα οποία είναι ξένα ανά δύο και ικανοποιούν την

(3.5.0.42) $$\sum_{i=1}^{N} \lambda(I_i) \geqslant \lambda(E) - \delta = (b - a) - \delta.$$

Ταυτόχρονα έχουμε $|f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon(b_i - a_i)$, άρα

(3.5.0.43) $$\sum_{i=1}^{N} |f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \leqslant \varepsilon(b - a),$$

διότι τα (a_i, b_i) είναι ξένα ανά δύο και περιέχονται στο $[a, b]$.

Το συμπλήρωμα της ένωσης $\bigcup_{i=1}^{N} I_i$ στο $[a, b]$ είναι μια πεπερασμένη ένωση κλειστών διαστημάτων $\bigcup_{j=1}^{N} [u_j, v_j]$, και από την (3.5.0.43) έχουμε

(3.5.0.44) $$\sum_{j=1}^{M} (v_j - u_j) \leqslant \delta.$$

Χρησιμοποιώντας την απόλυτη συνέχεια της f μπορούμε να επιλέξουμε το δ αρκετά μικρό ώστε να έχουμε

(3.5.0.45) $$\sum_{j=1}^{M} |f(v_j) - f(u_j)| \leqslant \varepsilon.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leqslant \sum_{i=1}^{N} |f(b_i) - f(a_i)| + \sum_{j=1}^{M} |f(v_j) - f(u_j)| \\ &\leqslant \varepsilon(b - a) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f(b) - f(a) = 0$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να δείξουμε ότι οι απολύτως συνεχείς συναρτήσεις είναι ακριβώς εκείνες οι συναρτήσεις που ικανοποιούν την (3.4.0.8).

Θεώρημα 3.5.7. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ απολύτως συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $f'(x)$ ορίζεται σχεδόν παντού, και η f' είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, για κάθε $x \in [a, b]$,*

(3.5.0.46) $$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) d\lambda(t).$$

Ειδικότερα,

(3.5.0.47) $$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) d\lambda(t).$$

Αντίστροφα, αν η $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει απολύτως συνεχής συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g'(x) = h(x)$ σχεδόν παντού. Μπορούμε μάλιστα να πάρουμε την $g(x) = \int_a^x h(x)d\lambda(x)$.

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής συνάρτηση με φραγμένη κύμανση, άρα είναι παραγώγίσιμη σχεδόν παντού, από το Θεώρημα 3.4.1. Επίσης, η f' είναι ολοκληρώσιμη, από την Πρόταση 3.4.5. Ορίζουμε $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

(3.5.0.48)
$$g(x) = \int_a^x f'(x)d\lambda(x).$$

Τότε, η g είναι απολύτως συνεχής από την Παρατήρηση 3.5.2 (γ). Άρα, η $g - f$ είναι απολύτως συνεχής. Από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue έχουμε ότι

(3.5.0.49)
$$g'(x) = f'(x) \ \text{ σχεδόν παντού.}$$

Τώρα, το Θεώρημα 3.5.3 δείχνει ότι η $g - f$ είναι σταθερή. Από την $g(x) - f(x) = g(a) - f(a)$ έπεται ότι

(3.5.0.50)
$$f(x) - f(a) = g(x) - g(a) = g(x) = \int_a^x f'(t)d\lambda(t)$$

για κάθε $x \in [a,b]$.

Το αντίστροφο προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι αν η $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη τότε η $g(x) = \int_a^x h(x)d\lambda(x)$, $x \in [a,b]$, είναι απολύτως συνεχής και, από το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue, $g'(x) = h(x)$ σχεδόν παντού.

$\boxed{+}$

Μια κλάση απολύτως συνεχών συναρτήσεων μας δίνουν οι Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις. Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί την $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$ για κάποια σταθερά $L > 0$ και για κάθε $x, y \in [a,b]$ τότε είναι φανερό ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε πεπερασμένη οικογένεια ξένων ανά δύο υποδιαστημάτων (a_k, b_k), $1 \leqslant k \leqslant N$ του $[a,b]$ με $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \varepsilon/L$ ισχύει

(3.5.0.51)
$$\sum_{k=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| \leqslant L \sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \varepsilon.$$

Από το Θεώρημα 3.5.7 έπεται άμεσα το εξής.

Πόρισμα 3.5.8. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $f'(x)$ ορίζεται σχεδόν παντού, και η f' είναι ολοκληρώσιμη. Επιπλέον, για κάθε $x \in [a,b]$,*

(3.5.0.52)
$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)d\lambda(t).$$