



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αρμονική Ανάλυση

Ενότητα: Χώροι L_p - Ασκήσεις

Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα ενότητας

4 Χώροι L_p - Ασκήσεις	4
4.1 Ομάδα Α'	4
4.2 Ομάδα Β'	15

4 Χώροι L_p - Ασκήσεις

4.1 Ομάδα Α΄

1. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leq p < \infty$. Αν $f \in L_p(E)$ δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

$$\lambda(\{|f| \geq \alpha\}) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

Υπόδειξη. Έστω $\alpha > 0$. Παρατηρήστε ότι

$$\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p d\lambda(x) \geq \int_{\{|f| \geq \alpha\}} \alpha^p d\lambda(x) = \alpha^p \lambda(\{|f| \geq \alpha\}).$$

2. Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leq p < \infty$. Αν $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leq |f| < n\}) < \infty.$$

Υπόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n = \{x \in E : n-1 \leq |f| < n\}$. Παρατηρήστε ότι

$$(n-1)^p \lambda(E_n) \leq \int_{E_n} |f|^p d\lambda \leq n^p \lambda(E_n).$$

Επίσης, αφού τα E_n είναι ξένα, από την προσθετικότητα του ολοκληρώματος έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p d\lambda = \int_{\bigcup_{n=k}^{\infty} E_n} |f|^p d\lambda \leq \int_E |f|^p d\lambda$$

για κάθε $k \geq 1$. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f \in L_p(E)$. Τότε, αφού $\frac{n}{n-1} \leq 2$ για κάθε $n \geq 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} n^p \lambda(E_n) &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^p (n-1)^p \lambda(E_n) \leq \sum_{n=2}^{\infty} 2^p (n-1)^p \lambda(E_n) \\ &\leq 2^p \sum_{n=2}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p d\lambda \leq 2^p \int_E |f|^p d\lambda < \infty. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leq |f| < n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(E_n) < \infty.$$

Αντίστροφα, αν η παραπάνω σειρά συγκλίνει, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_E |f|^p d\lambda &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} n^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \lambda(\{n-1 \leq |f| < n\}) < \infty, \end{aligned}$$

άρα $f \in L_p(E)$.

3. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leq p < \infty$. Αν $f_n, f \in L_p(E)$ και $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού στο E , δείξτε ότι

$$\|f_n - f\|_p \rightarrow 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_p$ έχουμε

$$|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leq \|f_n - f\|_p.$$

Συνεπώς, αν $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ έχουμε $\|f_n\|_p - \|f\|_p \rightarrow 0$, δηλαδή $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$.

Για την αντίστροφη ανισότητα, χρησιμοποιούμε την Άσκηση 30 του Κεφαλαίου 2 (γενίκευση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης). Ορίζουμε $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p)$ και $g = 2^{p+1}|f|^p$. Έχουμε

$$\begin{aligned} |f_n - f|^p &\leq (|f_n| + |f|)^p \leq (2 \max\{|f_n|, |f|\})^p = 2^p \max\{|f_n|^p, |f|^p\} \\ &\leq 2^p(|f_n|^p + |f|^p) = g_n. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $g_n \rightarrow g$ σχεδόν παντού (διότι $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού). Επίσης, $g_n, g \in L_1(E)$ (διότι $|f_n|^p, |f|^p \in L_1(E)$) και

$$\int_E |g_n| d\lambda = 2^p \left(\int_E |f_n|^p d\lambda + \int_E |f|^p d\lambda \right) \rightarrow 2^{p+1} \int_E |f|^p d\lambda = \int_E g d\lambda,$$

διότι $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$.

Αφού $|f_n - f|^p \rightarrow 0$ σχεδόν παντού, από την Άσκηση 30 του Κεφαλαίου 2 συμπεραίνουμε ότι

$$\int_E |f_n - f|^p d\lambda \rightarrow 0,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

4. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 < p < \infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p . Αν $f_n \rightarrow f$ στον $L_p(E)$ και $g_n \rightarrow g$ στον $L_q(E)$, δείξτε ότι $f_n g_n \rightarrow f g$ στον $L_1(E)$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\|f_n g_n - f g\|_1 \leq \|f_n(g_n - g)\|_1 + \|g(f_n - f)\|_1 \leq \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q$$

από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ και την ανισότητα Hölder. Επίσης, αφού

$$|\|f_n\|_p - \|f\|_p| \leq \|f_n - f\|_p \rightarrow 0,$$

έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p$, άρα η ακολουθία $(\|f_n\|_p)$ είναι φραγμένη: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|f_n\|_p \leq M$ για κάθε n . Από την υπόθεση έχουμε επίσης $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ και $\|g_n - g\|_q \rightarrow 0$, άρα

$$\|f_n g_n - f g\|_1 \leq M \|g_n - g\|_q + \|f_n - f\|_p \|g\|_q \rightarrow 0.$$

5. Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $1 \leq p < q < \infty$.

(α) Αν $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση, δείξτε ότι

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q [\lambda(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

(β) Δείξτε ότι $L_q(E) \subseteq L_p(E)$.

(γ) Δείξτε ότι $L_q(E) \neq L_p(E)$.

Υπόδειξη. (α) και (β) Υποθέτουμε ότι $\|f\|_q < \infty$, αλλιώς το δεξιό μέλος απειρίζεται και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αν $f \in L_q(E)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_E |f|^p \cdot \mathbf{1} \, d\lambda &\leq \left(\int_E |f|^q \, d\lambda \right)^{p/q} \left(\int_E \mathbf{1} \, d\lambda \right)^{1-p/q} \\ &= \|f\|_q^p (\lambda(E))^{1-p/q}, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις $|f|^p$ και $\mathbf{1}$ με εκθέτες $\frac{q}{p}$ και $\frac{q}{q-p}$ αντίστοιχα. Άρα,

$$\|f\|_p^p \leq \|f\|_q^p (\lambda(E))^{1-\frac{p}{q}} < +\infty,$$

από όπου έπεται ότι $f \in L^p(E)$ και $\|f\|_p \leq \|f\|_q [\lambda(E)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$.

(γ) Έστω $1 \leq p < q < \infty$. Θα ορίσουμε $f \in L_p(E) \setminus L_q(E)$. Αφού $0 < \lambda(E) < \infty$ μπορούμε να βρούμε ξένα μετρήσιμα $E_n \subset E$ με $\lambda(E_n) = \frac{\lambda(E)}{2^n}$ και $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ (εξηγήστε γιατί). Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, της μορφής

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{E_n}(x),$$

όπου $a_n > 0$ που θα επιλεγούν κατάλληλα. Έχουμε

$$\|f\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) a_n^q \quad \text{και} \quad \|f\|_p^p = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) a_n^p.$$

Αν ορίσουμε

$$a_n = 2^{n/q}$$

τότε

$$\|f\|_q^q = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = \infty$$

ενώ

$$\|f\|_p^p = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2^{np/q} = \lambda(E) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n(1-p/q)}} < \infty$$

(έχουμε $\delta = 1 - p/q > 0$ διότι $p < q$, και η γεωμετρική σειρά με λόγο $2^{-(1-p/q)} = 2^{-\delta} < 1$ συγκλίνει).

6. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leq p < q < r < \infty$. Δείξτε ότι κάθε $f \in L_q(E)$ γράφεται στην μορφή $f = g + h$ για κάποιες $g \in L_p(E)$ και $h \in L_r(E)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $B = \{|f| > 1\}$ και ορίζουμε τις $g = f \chi_B$, $h = f - g$. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $f = g + h$. Παρατηρούμε ότι $|f(x)|^p \leq |f(x)|^q$ για κάθε $x \in B$, διότι $p < q$ και $|f(x)| > 1$ αν $x \in B$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_E |g|^p d\lambda &= \int_E |f|^p \chi_B d\lambda = \int_B |f|^p d\lambda \leq \int_B |f|^q d\lambda \\ &\leq \int_E |f|^q d\lambda = \|f\|_q^q < \infty, \end{aligned}$$

διότι $f \in L_q(E)$. Άρα, $g \in L_p(E)$.

Για την h παρατηρούμε ότι $h = f \chi_{E \setminus B}$, και $|h(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in E \setminus B$. Συνεπώς, $|h(x)|^r \leq |h(x)|^q$ για κάθε $x \in E \setminus B$, διότι $q < r$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_E |h|^r d\lambda &= \int_E |f|^r \chi_{E \setminus B} d\lambda = \int_{E \setminus B} |f|^r d\lambda \leq \int_{E \setminus B} |f|^q d\lambda \\ &\leq \int_E |f|^q d\lambda = \|f\|_q^q < \infty, \end{aligned}$$

διότι $f \in L_q(E)$. Άρα, $h \in L_r(E)$.

7. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $1 \leq p < r < \infty$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(E) \cap L_r(E)$ τότε $f \in L_q(E)$ για κάθε $p \leq q \leq r$.

Υπόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p < q < r$. Υπάρχει $t \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε $q = (1-t)p + tr$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις συναρτήσεις $|f|^{(1-t)p}$ και $|f|^{tr}$ με εκθέτες $\frac{1}{1-t}$ και $\frac{1}{t}$ αντίστοιχα, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_E |f|^q d\lambda &= \int_E |f|^{(1-t)p} |f|^{tr} d\lambda \leq \left(\int_E (|f|^{(1-t)p})^{\frac{1}{1-t}} d\lambda \right)^{1-t} \left(\int_E (|f|^{tr})^{\frac{1}{t}} d\lambda \right)^t \\ &= \left(\int_E |f|^p d\lambda \right)^{1-t} \left(\int_E |f|^r d\lambda \right)^t = \|f\|_p^{(1-t)p} \|f\|_r^{tr} < \infty. \end{aligned}$$

Άρα, $f \in L_q(E)$.

8. Έστω E μετρήσιμο σύνολο με $\lambda(E) = 1$ και έστω $f \in L_p(E)$ για κάποιον $p \geq 1$. Δείξτε ότι

$$\ln \|f\|_p \geq \int_E \ln |f| d\lambda.$$

Υπόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\ln \|f\|_p = \ln \left[\left(\int_E |f|^p d\lambda \right)^{1/p} \right] = \frac{1}{p} \ln \left(\int_E |f|^p d\lambda \right),$$

οπότε η ζητούμενη ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\ln \left(\int_E |f|^p d\lambda \right) \geq p \int_E \ln |f| d\lambda = \int_E p \ln |f| d\lambda = \int_E \ln(|f|^p) d\lambda.$$

Θέτοντας $g = |f|^p$ έχουμε ότι η g είναι μη αρνητική, $g \in L_1(E)$, και θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\ln \left(\int_E g d\lambda \right) \geq \int_E \ln g d\lambda.$$

Γράφουμε $g = e^h$, όπου $h = \ln g$. Τότε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln \left(\int_E e^h d\lambda \right) \geq \int_E h d\lambda.$$

Ορίζουμε

$$t_0 = \int_E h d\lambda.$$

Υποθέτουμε ότι $t_0 \in \mathbb{R}$ (αν $t_0 = -\infty$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, και $t_0 < \infty$ διότι $h = \ln g \leq g - 1$ και η $g - 1$ είναι ολοκληρώσιμη στο E). Η συνάρτηση $u(t) := e^t$ είναι κυρτή, άρα για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$e^t - e^{t_0} = u(t) - u(t_0) \geq u'(t_0)(t - t_0) = e^{t_0}(t - t_0).$$

Δηλαδή,

$$e^{h(x)} - e^{t_0} \geq e^{t_0}(h(x) - t_0).$$

Ολοκληρώνοντας στο E και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\lambda(E) = 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_E e^{h(x)} d\lambda(x) - \int_E e^{t_0} d\lambda(x) &\geq e^{t_0} \left[\int_E h(x) d\lambda(x) - \int_E t_0 d\lambda(x) \right] \\ &= e^{t_0} [t_0 - t_0 \lambda(E)] = 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_E e^{h(x)} d\lambda(x) \geq \int_E e^{t_0} d\lambda(x) = e^{t_0},$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\ln \left(\int_E e^{h(x)} d\lambda(x) \right) \geq t_0 = \int_E h d\lambda.$$

9. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $c_1, \dots, c_m > 0$ με $c_1 + \dots + c_m = 1$. Δείξτε ότι: αν $f_1, \dots, f_m : E \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} \right) d\lambda \leq \prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i| d\lambda \right)^{c_i}.$$

Υπόδειξη. Αν $\int_E |f_i| d\lambda = 0$ για κάποιο $i = 1, \dots, m$, τότε $f_i = 0$ σχεδόν παντού, άρα $\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} = 0$ σχεδόν παντού, και τα δύο μέλη της ζητούμενης ανισότητας είναι ίσα με μηδέν.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\int_E |f_i| d\lambda > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$g_i = \frac{1}{\int_E |f_i| d\lambda} f_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Τότε, $\int_E |g_i| d\lambda = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $x \mapsto \ln x$ είναι κοίλη στο

$(0, +\infty)$ και την $\sum_{j=1}^m c_j = 1$ βλέπουμε ότι (αν $|g_i(x)| > 0$ για κάθε $i = 1, \dots, m$)

$$\begin{aligned} \ln(|g_1(x)|^{c_1} |g_2(x)|^{c_2} \cdots |g_m(x)|^{c_m}) &= c_1 \ln(|g_1(x)|) + c_2 \ln(|g_2(x)|) + \cdots + c_m \ln(|g_m(x)|) \\ &\leq \ln(c_1 |g_1(x)| + c_2 |g_2(x)| + \cdots + c_m |g_m(x)|), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$|g_1(x)|^{c_1} |g_2(x)|^{c_2} \cdots |g_m(x)|^{c_m} \leq c_1 |g_1(x)| + c_2 |g_2(x)| + \cdots + c_m |g_m(x)|.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που $g_i(x) = 0$ για κάποιο i . Ολοκληρώνοντας, παίρνουμε

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i} \right) d\lambda \leq c_1 \int_E |g_1| d\lambda + \cdots + c_m \int_E |g_m| d\lambda = c_1 + \cdots + c_m = 1.$$

Αφού

$$\prod_{i=1}^m |g_i|^{c_i} = \frac{\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i}}{\prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i| d\lambda \right)^{c_i}},$$

έπεται ότι

$$\int_E \left(\prod_{i=1}^m |f_i|^{c_i} \right) d\lambda \leq \prod_{i=1}^m \left(\int_E |f_i| d\lambda \right)^{c_i}.$$

10. Έστω E μετρήσιμο σύνολο και έστω $p, q \geq 1$. Αν $t \in (0, 1)$ και $r = tp + (1-t)q$ δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\|f\|_r^r \leq \|f\|_p^{tp} \|f\|_q^{(1-t)q}.$$

Υπόδειξη. Η ανισότητα αποδείχθηκε για την Άσκηση 7. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για τις συναρτήσεις $|f|^{tp}$ και $|f|^{(1-t)q}$ με εκθέτες $\frac{1}{t}$ και $\frac{1}{1-t}$ αντίστοιχα, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_E |f|^r d\lambda &= \int_E |f|^{tp} |f|^{(1-t)q} d\lambda \leq \left(\int_E (|f|^{tp})^{\frac{1}{t}} d\lambda \right)^t \left(\int_E (|f|^{(1-t)q})^{\frac{1}{1-t}} d\lambda \right)^{1-t} \\ &= \left(\int_E |f|^p d\lambda \right)^t \left(\int_E |f|^q d\lambda \right)^{1-t} = \|f\|_p^{tp} \|f\|_q^{(1-t)q}. \end{aligned}$$

11. Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geq 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n\|_p \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού στο E , δείξτε ότι $f \in L_p(E)$ και $\|f\|_p \leq 1$.

Υπόδειξη. Αφού $|f_n|^p \rightarrow |f|^p$ σχεδόν παντού στο E , από το λήμμα του Φατου έχουμε

$$\|f\|_p^p = \int_E |f|^p d\lambda = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|^p d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n|^p d\lambda \leq 1,$$

διότι

$$\int_E |f_n|^p d\lambda = \|f_n\|_p^p \leq 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από την υπόθεση.

12. Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών συναρτήσεων στον $L_1(\mathbb{R})$ με $\int f_n d\lambda = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $\delta > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{x: |x| > \delta\}} f_n d\lambda = 0.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p = \infty.$$

Υπόδειξη. Έστω $p > 1$ και q ο συζυγής εκθέτης του, δηλαδή $1/p + 1/q = 1$. Σταθεροποιούμε $\delta > 0$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $g_\delta = \chi_{[-\delta, \delta]}$. Από την ανισότητα Hölder παίρνουμε

$$\begin{aligned} (2\delta)^{1/q} \|f_n\|_p &= \left(\int |g_\delta|^q d\lambda \right)^{1/q} \|f_n\|_p \geq \left| \int f_n g_\delta d\lambda \right| \\ &= \int_{\{x: |x| \leq \delta\}} f_n d\lambda = \int f_n d\lambda - \int_{\{x: |x| > \delta\}} f_n d\lambda \\ &= 1 - \int_{\{x: |x| > \delta\}} f_n d\lambda. \end{aligned}$$

Από την υπόθεση υπάρχει $n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$\int_{\{x: |x| > \delta\}} f_n d\lambda < \frac{1}{2}.$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geq n_0(\delta)$ έχουμε

$$\|f_n\|_p > \frac{1}{2} \frac{1}{(2\delta)^{1/q}}.$$

Έπεται ότι

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_p \geq \frac{1}{2} \frac{1}{(2\delta)^{1/q}}$$

για κάθε $\delta > 0$, και αφήνοντας το $\delta \rightarrow 0^+$ παίρνουμε $\liminf_n \|f_n\|_p = +\infty$. Άρα, $\|f_n\|_p \rightarrow 0$.

13. Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geq 1$ και έστω $f \in L_p(E)$. Δείξτε ότι

$$\int_E |f|^p d\lambda = p \int_0^\infty t^{p-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) d\lambda_1(t).$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Tonelli. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
 \int_E |f(x)|^p d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \chi_E(x) d\lambda(x) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^{|f(x)|} pt^{p-1} d\lambda_1(t) \right) \chi_E(x) d\lambda(x) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_0^\infty pt^{p-1} \chi_{[0,|f(x)|)}(t) d\lambda_1(t) \right) \chi_E(x) d\lambda(x) \\
 &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_E(x) \chi_{[0,|f(x)|)}(t) d\lambda(x) \right) pt^{p-1} d\lambda_1(t) \\
 &= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{\{x \in E : |f(x)| > t\}}(x) d\lambda(x) \right) pt^{p-1} d\lambda_1(t) \\
 &= \int_0^\infty \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) pt^{p-1} d\lambda_1(t).
 \end{aligned}$$

14. Έστω E μετρήσιμο σύνολο, έστω $p \geq 1$ και έστω (f_n) ακολουθία στον $L_p(E)$ με $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$. Έστω (g_n) ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων στο E με $g_n \rightarrow g$ σχεδόν παντού στο E . Δείξτε ότι $\|f_n g_n - f g\|_p \rightarrow 0$.

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|g_n\|_\infty \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $g_n \rightarrow g$ σχεδόν παντού, εύκολα ελέγχουμε ότι $\|g\|_\infty \leq M$ (υπάρχει $Z \subset E$ με $\lambda(Z) = 0$ ώστε, για κάθε $x \in E \setminus Z$ ισχύουν οι $|g_n(x)| \leq M$ για κάθε n και $g_n(x) \rightarrow g(x)$, άρα για κάθε $x \in E \setminus Z$ έχουμε $|g(x)| \leq M$).

Θα χρησιμοποιήσουμε την απλή παρατήρηση ότι αν $u \in L_p(E)$ και $v \in L_\infty(E)$ τότε $uv \in L_p(E)$ και

$$\|uv\|_p^p = \int_E |u|^p |v|^p d\lambda \leq \int_E |u|^p \|v\|_\infty^p d\lambda = \|v\|_\infty^p \|u\|_p^p.$$

δηλαδή

$$\|uv\|_p \leq \|v\|_\infty \|u\|_p.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
 \|f_n g_n - f g\|_p &= \|(f_n - f)g_n + f(g_n - g)\|_p \leq \|(f_n - f)g_n\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \\
 &\leq \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \leq M \|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p.
 \end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος έχουμε $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$, άρα $M \|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

Για τον δεύτερο όρο χρησιμοποιούμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: έχουμε

$$|f(g_n - g)|^p = |f|^p |g_n - g|^p \leq |f|^p (|g_n| + |g|)^p \leq (2M)^p |f|^p$$

σχεδόν παντού, και η $(2M)^p |f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη, διότι $f \in L_p(E)$ (ως $\|\cdot\|_p$ -όριο των $f_n \in L_p(E)$). Επίσης, $|f(g_n - g)|^p \rightarrow 0$ σχεδόν παντού, διότι $|f(x)| < \infty$ σχεδόν παντού και $g_n(x) - g(x) \rightarrow 0$ σχεδόν παντού. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, και έχουμε

$$\int_E |f(g_n - g)|^p d\lambda \rightarrow 0,$$

δηλαδή $\|f(g_n - g)\|_p \rightarrow 0$. Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\|f_n g_n - f g\|_p \leq M \|f_n - f\|_p + \|f(g_n - g)\|_p \rightarrow 0.$$

15. Έστω $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ ορίζουμε $f_t(x) = f(x + t)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε t έχουμε $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και $\int f_t = \int f$.

(β) $\lim_{t \rightarrow 0} \int |f - f_t| = 0$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε πρώτα την $f = \chi_E$, όπου E μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R}^d με $\lambda(E) < \infty$. Έχουμε $f_t(x) = \chi_E(x + t) = \chi_{-t+E}(x)$, άρα $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και

$$\int f_t d\lambda = \lambda(-t + E) = \lambda(E) = \int f d\lambda.$$

Λόγω γραμμικότητας, συμπεραίνουμε εύκολα ότι αν ϕ είναι μια απλή ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}^d$ ισχύει $\phi_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και

$$\int \phi_t d\lambda = \int \phi d\lambda.$$

Έστω τώρα $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ με $f \geq 0$. Θεωρούμε ακολουθία απλών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ϕ_n με $\phi_n \nearrow f$. Έστω $t \in \mathbb{R}^d$. Έχουμε $(\phi_n)_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $(\phi_n)_t \nearrow f_t$, και

$$\int (\phi_n)_t d\lambda = \int \phi_n d\lambda.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης,

$$\int f_t d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\phi_n)_t d\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi_n d\lambda = \int f d\lambda.$$

Έτσι βλέπουμε ότι $f_t \in L_1(\mathbb{R}^d)$ και $\int f_t = \int f$.

Στη γενική περίπτωση, όπου $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, γράφουμε $f = f^+ - f^-$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο για τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις f^+ και f^- .

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Ο χώρος $C_c(\mathbb{R}^d)$ των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνός στον $L^1(\mathbb{R})$, άρα μπορούμε να βρούμε $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$ ώστε $\|f - g\|_1 < \varepsilon$. Έστω $K = \text{supp}(g)$. Η g είναι συνεχής, με φορέα το συμπαγές K , άρα είναι ομοιόμορφα συνεχής. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|x - y| < \delta$ τότε $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2\lambda(K)}$. Τότε, για κάθε $|t| < \delta$ έχουμε

$$\|g - g_t\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x) - g(x+t)| d\lambda(x) = \int_{K \cup (K-t)} |g(x) - g(x+t)| d\lambda(x) < \varepsilon.$$

Τώρα, γράφουμε

$$\|f - f_t\|_1 \leq \|f - g\|_1 + \|g - g_t\|_1 + \|g_t - f_t\|_1 < 3\varepsilon,$$

χρησιμοποιώντας και την $\|f - g\|_1 = \|f_t - g_t\|_1$, η οποία ισχύει για κάθε t από το (α).

16. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R}^d με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Υπόδειξη. Έστω $0 \neq f \in L_\infty(E)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_p^p = \int_E |f(x)|^p d\lambda \leq \int_E \|f\|_\infty^p d\lambda = \|f\|_\infty^p \lambda(E) < \infty,$$

άρα $f \in L_p(E)$. Επίσης,

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty [\lambda(E)]^{1/p} \rightarrow \|f\|_\infty$$

καθώς το $p \rightarrow \infty$, άρα $\limsup_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$.

Από την άλλη πλευρά, αν $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$, τότε το σύνολο $B_\varepsilon = \{x \in X : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon\}$ έχει θετικό μέτρο, και

$$\|f\|_p^p \geq \int_{B_\varepsilon} |f(x)|^p d\lambda \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \lambda(B_\varepsilon),$$

άρα

$$\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \lim_{p \rightarrow \infty} [\lambda(B_\varepsilon)]^{1/p} = \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon \in (0, \|f\|_\infty)$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $\liminf_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty$, και έπεται ότι $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

17. Έστω $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$. Δώστε παραδείγματα μετρήσιμων συναρτήσεων $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τα εξής:

(α) $f \in L_p(0, \infty)$ αν και μόνο αν $p_0 < p < p_1$.

(β) $f \in L_p(0, \infty)$ αν και μόνο αν $p_0 \leq p \leq p_1$.

(γ) $f \in L_p(0, \infty)$ αν και μόνο αν $p = p_0$.

Δοκιμάστε συναρτήσεις της μορφής $f(x) = x^{-a} |\ln x|^b$.

Υπόδειξη. (α) Θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_1}} \chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0}} \chi_{[1,\infty)}(x)$. Παρατηρήστε ότι αν $p_0 < p < p_1$ τότε

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^p d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{p/p_0}} d\lambda(x) < \infty.$$

Επίσης, αν $p \leq p_0$ έχουμε

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^p d\lambda(x) \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{p/p_0}} d\lambda(x) = \infty,$$

ενώ αν $p \geq p_1$ έχουμε

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^p d\lambda(x) \geq \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) = \infty.$$

(β) Θεωρούμε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_1}} \chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0} (\ln(x+1))^{2/p_0}} \chi_{[1,\infty)}(x)$. Παρατηρήστε ότι αν $p_0 \leq p \leq p_1$ τότε

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^p d\lambda(x) = \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{p/p_0} (\ln(x+1))^{2p/p_0}} d\lambda(x) < \infty.$$

Επίσης, αν $p < p_0$ έχουμε

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^p d\lambda(x) \geq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{p/p_0} (\ln(x+1))^{2p/p_0}} d\lambda(x) = \infty,$$

ενώ αν $p > p_1$ έχουμε

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^p d\lambda(x) \geq \int_0^1 \frac{1}{x^{p/p_1}} d\lambda(x) = \infty.$$

(γ) Θεωρήστε την $f(x) = \frac{1}{x^{1/p_0}} \chi_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^{1/p_0} (\ln(x+1))^{2/p_0}} \chi_{[1,\infty)}(x)$.

18. Έστω E, F μετρήσιμα υποσύνολα του \mathbb{R}^d με $0 < \lambda(E), \lambda(F) < \infty$.

(α) Δείξτε ότι η $\chi_E * \chi_F$ είναι συνεχής συνάρτηση.

(β) Δείξτε ότι υπάρχουν $x_0 \in \mathbb{R}^d$ και $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|x - x_0| < \varepsilon$ τότε $\lambda(E \cap (F + x)) > 0$. Δηλαδή, το $E - F$ έχει μη κενό εσωτερικό.

Υπόδειξη. (α) Γράφουμε

$$\begin{aligned} |(\chi_E * \chi_F)(x) - (\chi_E * \chi_F)(y)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} [\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)] \chi_F(z) d\lambda(z) \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z). \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $f(z) = \chi_E(x-z)$, τότε $\chi_E(y-z) = \chi_E(x-z-(x-y)) = f(z+(x-y)) = f_{x-y}(z)$ με την ορολογία της Άσκησης 15. Αφού $\lambda(E) < \infty$, έχουμε $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Έπεται ότι

$$\lim_{y \rightarrow x} \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_E(x-z) - \chi_E(y-z)| d\lambda(z) = \lim_{x \rightarrow y} \int_{\mathbb{R}^d} |f - f_{x-y}| d\lambda = 0$$

από την Άσκηση 15(β).

(β) Παρατηρούμε πρώτα ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ώστε

$$\lambda(E \cap (F + x_0)) > 0.$$

Θέτουμε $F_1 = F + x_0$. Η συνάρτηση

$$f(x) := (\chi_{-E} * \chi_{F_1})(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{-E}(x-z) \chi_{F_1}(z) d\lambda(z) = \lambda((x+E) \cap F_1)$$

είναι συνεχής, από το πρώτο ερώτημα. Όμως,

$$f(0) = \lambda(E \cap F_1) = \lambda(E \cap (F + x_0)) > 0.$$

Άρα, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε: αν $|u| < \varepsilon$ τότε

$$f(u) = \lambda((E+u) \cap (F+x_0)) > 0.$$

Ειδικότερα, για κάθε $|u| < \varepsilon$ έχουμε $E \cap (F+x_0-u) = -u + (E+u) \cap (F+x_0) \neq \emptyset$, και θέτοντας $x = x_0 - u$ έχουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ με $|x-x_0| < \varepsilon$ ισχύει $E \cap (F+x) \neq \emptyset$.

4.2 Ομάδα Β'

19. Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο \mathbb{R} . Υποθέτουμε ότι κάθε f_n μηδενίζεται έξω από το $[0, 1/n]$ και

$$\int_0^{1/n} f_n(t) dt = 1.$$

Έστω $g \in L_1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε $g_n = f_n * g$. Δείξτε ότι $\|g_n - g\|_1 \rightarrow 0$ καθώς το $n \rightarrow \infty$.

Υπόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned} \|g_n\|_1 &= \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)| d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x-t) f_n(t) d\lambda(t) \right| d\lambda(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x-t)| f_n(t) d\lambda(t) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)| d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \|g\|_1 d\lambda(t). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\|g_n\|_1 \leq \|g\|_1 < +\infty.$$

Αρχικά δείχνουμε ότι

$$\|g_n - g\|_1 \leq \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \|g_t - g\|_1 d\lambda(t),$$

όπου $g_t(x) = g(x - t)$. Πράγματι,

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} |g(x - t) - g(x)| f_n(t) d\lambda(t),$$

άρα

$$\begin{aligned} \|g_n - g\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x - t) - g(x)| f_n(t) d\lambda(t) d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n(t) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x - t) - g(x)| d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \|g_t - g\|_1 f_n(t) d\lambda(t). \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την Άσκηση 15 (β) υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|t| < \delta$ τότε $\|g_t - g\|_1 < \varepsilon$. Έστω $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \delta$. Για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|g_n - g\|_1 &\leq \int_{\mathbb{R}} \|g_t - g\|_1 f_n(t) d\lambda(t) = \int_{[0, 1/n]} \|g_t - g\|_1 f_n(t) d\lambda(t) \\ &< \varepsilon \int_{[0, 1/n]} f_n(t) d\lambda(t) \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

και έπεται ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_1 = 0$.

20. Έστω $p, q, r \geq 1$ με $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Δείξτε ότι: αν $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ και $g \in L_q(\mathbb{R}^d)$ τότε $f * g \in L_r(\mathbb{R}^d)$ και

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Υπόδειξη. Θέτουμε $a = 1 - \frac{p}{r}$ και $b = 1 - \frac{q}{r}$. Παρατηρούμε ότι $r \geq p$ και $r \geq q$ λόγω των υποθέσεων ότι $p, r, q \geq 1$ και $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$. Ορίζουμε $p_1 = \frac{pr}{r-p}$ και $p_2 = \frac{rq}{r-q}$. Τότε, $p_1, p_2 \geq 1$ και $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{r} = 1$. Γράφουμε

$$|(f * g)(x)| = \left| \int f(x - y)g(y) d\lambda(y) \right| \leq \int (|f(x - y)|^{1-a} |g(y)|^{1-b}) |f(x - y)|^a |g(y)|^b d\lambda(y).$$

Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 9 έχουμε

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\leq \left(\int |f(x-y)|^{(1-a)r} |g(y)|^{(1-b)r} d\lambda(y) \right)^{1/r} \left(\int |f(x-y)|^{ap_1} d\lambda(y) \right)^{1/p_1} \\ &\quad \times \left(\int |g(y)|^{bp_2} d\lambda(y) \right)^{1/p_2} \\ &= \left(\int |f(x-y)|^{(1-a)r} |g(y)|^{(1-b)r} d\lambda(y) \right)^{1/r} \|f\|_{ap_1}^a \|g\|_{bp_2}^b. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $(1-a)r = p$ και $(1-b)r = q$. Υψώνοντας στην r και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|f * g\|_r^r &\leq \|f\|_{ap_1}^{ar} \|g\|_{bp_2}^{br} \left[\int \left(\int |f(x-y)|^p d\lambda(x) \right) |g(y)|^q d\lambda(y) \right] \\ &\leq \|f\|_{ap_1}^{ar} \|g\|_{bp_2}^{br} \|f\|_p^p \|g\|_q^q. \end{aligned}$$

Όμως, $ap_1 = p$ και $bp_2 = q$. Άρα,

$$\|f * g\|_r^r \leq \|f\|_p^{p+ar} \|g\|_q^{q+br} = \|f\|_p^r \|g\|_q^r,$$

δηλαδή, $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

21. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R}^d με $0 < \lambda(E) < \infty$ και έστω $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $p \geq 1$ και σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\lambda(\{x \in E : |f(x)| \geq t\}) \leq \frac{C}{t^p}$$

για κάθε $t > 0$. Δείξτε ότι $f \in L_r(E)$ για κάθε $1 \leq r < p$.

Υπόδειξη. Έστω $q \leq r < p$. Χρησιμοποιώντας την Άσκηση 13 γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_E |f(x)|^r d\lambda(x) &= \int_0^\infty r t^{r-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 r t^{r-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) d\lambda(t) \\ &\quad + \int_1^\infty r t^{r-1} \lambda(\{x \in E : |f(x)| > t\}) d\lambda(t) \\ &\leq \int_0^1 r t^{r-1} \lambda(E) d\lambda(t) + \int_1^\infty r t^{r-1} \frac{C}{t^p} d\lambda(t) \\ &= \lambda(E) \int_0^1 r t^{r-1} d\lambda(t) + Cr \int_1^\infty t^{r-p-1} d\lambda(t) \\ &= \lambda(E) + \frac{Cr}{p-r} < \infty, \end{aligned}$$

διότι

$$\int_1^{\infty} t^{r-p-1} d\lambda(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{M^{r-p}}{r-p} - \frac{1}{r-p} \right) = \frac{1}{p-r},$$

αφού $r - p < 0$.

Έπεται ότι $f \in L_r(E)$.

22. Έστω $r > 1$ και $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $\|f_n\|_r \leq M$ για κάθε n . Υποθέτουμε ότι $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού στο $(0, 1)$. Δείξτε ότι για κάθε $1 \leq p < r$ ισχύει $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

Υπόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι, από το λήμμα του Fatou,

$$\int_0^1 |f|^r d\lambda \leq \liminf \int_0^1 |f_n|^r d\lambda \leq M^r,$$

διότι $\|f\|_r \leq m$ για κάθε n . Έπεται ότι

$$\int_0^1 |f_n - f|^r d\lambda \leq \int_0^1 2^r (|f_n|^r + |f|^r) d\lambda \leq 2^{r+1} M^r.$$

Έστω $\delta > 0$. Αφού $f_n \rightarrow f$ σχεδόν παντού, υπάρχει $E \subseteq (0, 1)$ με $\lambda(E) > 1 - \delta$, τέτοιο ώστε $f_n \rightarrow f$ ομοιόμορφα στο E . Για τυχόν $1 \leq p < r$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n - f|^p d\lambda &= \int_E |f_n - f|^p d\lambda + \int_{E^c} |f_n - f|^p d\lambda \\ &\leq \int_E |f_n - f|^p d\lambda + [\lambda(E^c)]^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_{E^c} |f_n - f|^r d\lambda \right)^{\frac{p}{r}} \\ &< \int_E |f_n - f|^p d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} \left(\int_0^1 |f_n - f|^r d\lambda \right)^{\frac{p}{r}} \\ &\leq \int_E |f_n - f|^p d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r. \end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta > 0$ ώστε

$$\delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r < \frac{\varepsilon^p}{2},$$

και μετά $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $|f_n(x) - f(x)|^p < \frac{\varepsilon^p}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in E$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\int_0^1 |f_n - f|^p d\lambda \leq \int_E |f_n - f|^p d\lambda + \delta^{1-\frac{p}{r}} 2^{r+1} M^r < \frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p,$$

δηλαδή $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$. Άρα, $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$.

23. Δίνεται φραγμένη Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που μηδενίζεται έξω από το $[-1, 1]$. Για κάθε $h > 0$ ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$\phi_h(f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι $\|\phi_h(f)\|_2 \leq \|f\|_2$ και $\|\phi_h(f) - f\|_2 \rightarrow 0$ όταν $h \rightarrow 0^+$.

Υπόδειξη. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) d\lambda(t) \right|^2 &= \frac{1}{4h^2} \left(\int_{x-h}^{x+h} f^2(t) d\lambda(t) \right) \left(\int_{x-h}^{x+h} \mathbf{1}^2 d\lambda(t) \right) \\ &= \frac{1}{4h^2} \left(\int_{x-h}^{x+h} f^2(t) d\lambda(t) \right) \cdot (2h) \\ &= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f^2(t) d\lambda(t). \end{aligned}$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|\phi_h(f)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) d\lambda(t) \right|^2 d\lambda(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f^2(t) d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[x-h, x+h](t) f^2(t) d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\ &= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[x-h, x+h](t) d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi[t-h, t+h](x) d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \frac{1}{2h} \int_{\mathbb{R}} f^2(t) (2h) d\lambda(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f^2(t) d\lambda(t) = \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|\phi_h(f)\|_2 \leq \|f\|_2$.

Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρούμε πρώτα ότι αν η g είναι συνεχής με συμπαγή φορέα τότε $\phi_h(g) \rightarrow g$ ομοιόμορφα καθώς το $h \rightarrow 0$ και $\|\phi_h(g) - g\|_2 \rightarrow 0$ αφού $\phi_h(g) - g \equiv 0$ έξω από κάποιο κλειστό διάστημα (αν π.χ. $0 < h < 1$). Κατόπιν, θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε g συνεχής, με συμπαγή φορέα, ώστε $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι $\phi_h(f - g) = \phi_h(f) - \phi_h(g)$, και χρησιμοποιώντας το πρώτο ερώτημα γράφουμε

$$\begin{aligned} \|\phi_h(f) - f\|_2 &\leq \|\phi_h(f) - \phi_h(g)\|_2 + \|\phi_h(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2 \\ &= \|\phi_h(f - g)\|_2 + \|\phi_h(g) - g\|_2 + \|g - f\|_2 \\ &\leq \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\|g - f\|_2 < \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0^+$ παίρνουμε

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \|\phi_h(f) - f\|_2 \leq \lim_{h \rightarrow 0^+} \|\phi_h(g) - g\|_2 + 2\varepsilon = 2\varepsilon,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0^+$ έχουμε

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \|\phi_h(f) - f\|_2 = 0,$$

δηλαδή $\|\phi_h(f) - f\|_2 \rightarrow 0$.

24. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R} , με $0 < \lambda(E) < \infty$. Δείξτε ότι $n \cdot (\chi_E * \chi_{[0,1/n]}) \rightarrow \chi_E$ σχεδόν παντού καθώς $n \rightarrow \infty$.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι

$$\chi_E(x) = n \int_{\mathbb{R}} \chi_E(x) \chi_{[0,1/n]}(z) d\lambda(z).$$

Από το θεώρημα παραγωγίσις του Lebesgue έχουμε

$$\begin{aligned} |n(\chi_E * \chi_{[0,1/n]})(x) - \chi_E(x)| &= \left| n \int_{\mathbb{R}} [\chi_E(x-z) - \chi_E(x)] \chi_{[0,1/n]}(z) d\lambda(z) \right| \\ &\leq \frac{1}{1/n} \int_{[0,1/n]} |\chi_E(x-z) - \chi_E(x)| d\lambda(z) \\ &= \frac{1}{1/n} \int_{[x-1/n, x]} |\chi_E(t) - \chi_E(x)| d\lambda(t) \rightarrow \chi_E(x) \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \text{Leb}(\chi_E)$, δηλαδή σχεδόν παντού στο \mathbb{R} .

25. Έστω $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ ισχύει $f \cdot g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Δείξτε ότι $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $g \notin L_\infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\lambda(A_n) > 0$, όπου $A_n = \{x : |g(x)| \geq n\}$. Ορίζουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \text{sign}(g(x)) \chi_{A_n}(x).$$

Παρατηρούμε ότι

$$|f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x),$$

και, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Βερρο Levi, ότι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| d\lambda(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x) d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x) d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty. \end{aligned}$$

Άρα, $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Όμως,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x) d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x) |g(x)| d\lambda(x) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} n \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \chi_{A_n}(x) d\lambda(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n^2 \lambda(A_n)} \lambda(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση.

26. Έστω $1 \leq p < \infty$ και $f \in L_p[0, 1]$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$f_n = 2^n \sum_{k=1}^{2^n} a_{n,k}(f) \chi_{J_{n,k}},$$

όπου $J_{n,k} = \left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right)$ και $a_{n,k}(f) = \int_{J_{n,k}} f d\lambda$. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

Υπόδειξη. Υποθέτουμε ότι $1 < p < \infty$. Δείχνουμε πρώτα ότι $\|f - f_n\|_p \leq 4\|f\|_p$. Αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p , έχουμε

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_p^p &= \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |f(x) - 2^n a_{n,k}(f)|^p d\lambda(x) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left| \int_{J_{n,k}} (f(x) - f(y)) d\lambda(y) \right|^p d\lambda(x) \\ &\leq \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left(\int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p d\lambda(y) [\lambda(J_{n,k})]^{p/q} \right) d\lambda(x) \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \cdot 2^{-np/q} \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p d\lambda(y) d\lambda(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^{2^n} 2^n \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} |f(x) - f(y)|^p d\lambda(y) d\lambda(x) \\
 &\leq \sum_{k=1}^{2^n} 2^n \int_{J_{n,k}} \int_{J_{n,k}} 2^p (|f(x)|^p + |f(y)|^p) d\lambda(y) d\lambda(x) \\
 &= \sum_{k=1}^{2^n} 2^n 2^p \cdot 2\lambda(J_{n,k}) \int_{J_{n,k}} |f(x)|^p d\lambda(x) \\
 &= 2^{p+1} \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |f(x)|^p d\lambda(x) \\
 &= 2^{p+1} \|f\|_p^p \leq 4^p \|f\|_p^p.
 \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|f - f_n\|_p \leq 4\|f\|_p$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι αν η g είναι συνεχής και αν ορίσουμε αντίστοιχα τις g_n , τότε $\|g - g_n\|_p \rightarrow 0$. Πράγματι, για το τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in [0, 1]$ και $|x - y| \leq \delta$ να έχουμε $|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon$. Βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $1/2^{n_0} \leq \delta$, και για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
 \|g - g_n\|_p^p &= \sum_{k=1}^{2^n} \int_{J_{n,k}} |g(x) - 2^n a_{n,k}(g)|^p d\lambda(x) \\
 &= \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left| \int_{J_{n,k}} (g(x) - g(y)) d\lambda(y) \right|^p d\lambda(x) \\
 &\leq \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \left(\int_{J_{n,k}} |g(x) - g(y)|^p d\lambda(y) [\lambda(J_{n,k})]^{p/q} \right) d\lambda(x) \\
 &\leq \sum_{k=1}^{2^n} 2^{np} \int_{J_{n,k}} \lambda(J_{n,k}) \varepsilon^p 2^{-np/q} d\lambda(x) \\
 &= 2^n 2^{np} (2^{-n})^2 \varepsilon^p 2^{-np/q} = \varepsilon^p,
 \end{aligned}$$

δηλαδή $\|g - g_n\|_p \leq \varepsilon$.

Θεωρούμε τώρα $f \in L_p[0, 1]$ και για τυχόν $\varepsilon > 0$ βρίσκουμε συνεχή g με $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Παρατηρήστε ότι $a_{k,n}(f - g) = a_{k,n}(f) - a_{k,n}(g)$, άρα $(f - g)_n = f_n - g_n$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
 \|f - f_n\|_p &\leq \|f - g\|_p + \|g - g_n\|_p + \|g_n - f_n\|_p \\
 &\leq \|f - g\|_p + \|g - g_n\|_p + \|(g_n - f_n) - (g - f)\|_p + \|g - f\|_p \\
 &= \|f - g\|_p + \|g - g_n\|_p + \|(g - f)_n - (g - f)\|_p + \|g - f\|_p \\
 &\leq \|f - g\|_p + \|g - g_n\|_p + 4\|g - f\|_p + \|g - f\|_p \\
 &\leq 6\varepsilon + \|g - g_n\|_p.
 \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \rightarrow \infty$ παίρνουμε

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|g - g_n\|_p + 6\varepsilon = 6\varepsilon,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon \rightarrow 0^+$ έχουμε

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0,$$

δηλαδή $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$.

27. Έστω $1 < p < \infty$ και έστω $f \in L_p[0, \infty)$. Δείξτε ότι

$$\left| \int_0^x f(t) d\lambda(t) \right| \leq \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}$$

για κάθε $x > 0$ και ότι

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1-\frac{1}{p}}} \int_0^x f(t) d\lambda(t) = 0.$$

Υπόδειξη. Έστω q ο συζυγής εκθέτης του p και έστω $x > 0$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder γράφουμε

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x f(t) d\lambda(t) \right| &\leq \int_0^x |f(t)| d\lambda(t) = \int_0^\infty |f(t)| \chi_{[0,x]}(t) d\lambda(t) \\ &\leq \|f\|_p \|\chi_{[0,x]}\|_q = \|f\|_p x^{1/q} = \|f\|_p x^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε την

$$\begin{aligned} \|\chi_{[0,x]}\|_q &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]}^q d\lambda \right)^{1/q} \\ &= \left(\int_0^\infty \chi_{[0,x]} d\lambda \right)^{1/q} = [\lambda([0, x])]^{1/q} = x^{1/q}. \end{aligned}$$

Για το δεύτερο ερώτημα, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|f \chi_{[\alpha, \infty)}\|_p = \left(\int_\alpha^\infty |f|^p d\lambda \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Μπορούμε να βρούμε τέτοιο α , διότι $|f|^p \chi_{[0,\alpha]} \nearrow |f|^p$ καθώς το $\alpha \rightarrow \infty$, και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_\alpha^\infty |f|^p d\lambda = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty |f|^p d\lambda - \int_0^\alpha |f|^p d\lambda \right) = 0.$$

Για κάθε $x > \alpha$ μπορούμε να γράψουμε

$$(*) \quad \frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^x f(t) d\lambda(t) \right| \leq \frac{1}{x^{1/q}} \int_0^\alpha |f(t)| d\lambda(t) + \frac{1}{x^{1/q}} \int_\alpha^x |f(t)| d\lambda(t).$$

Από την επιλογή του α έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{1/q}} \int_{\alpha}^x |f(t)| d\lambda(t) &\leq \frac{1}{x^{1/q}} \|f\|_p \|\chi_{[\alpha,x]}\|_q \\ &= \frac{(x-\alpha)^{1/q}}{x^{1/q}} \|f\|_p < \|f\|_p \\ &\leq \|f\|_p < \varepsilon \end{aligned}$$

για κάθε $x > \alpha$, άρα η (*) δίνει

$$\frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^x f(t) d\lambda(t) \right| \leq \frac{1}{x^{1/q}} \int_0^{\alpha} |f(t)| d\lambda(t) + \varepsilon$$

για κάθε $x > \alpha$. Όμως,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/q}} \int_0^{\alpha} |f(t)| d\lambda(t) = 0,$$

άρα

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^x f(t) d\lambda(t) \right| \leq 0 + \varepsilon = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{1/q}} \left| \int_0^x f(t) d\lambda(t) \right| = 0,$$

και έπεται το ζητούμενο.

28. Υποθέτουμε ότι $f \in L_p(\mathbb{R})$ για κάθε $1 \leq p < 2$ και επιπλέον ότι

$$\sup_{1 \leq p < 2} \|f\|_p < +\infty.$$

Δείξτε ότι $f \in L_2(\mathbb{R})$ και

$$\|f\|_2 = \lim_{p \rightarrow 2^-} \|f\|_p.$$

Υπόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\lambda \leq M^p$$

για κάθε $p \in [1, 2)$. Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{2-1/n} d\lambda \leq M^{2-1/n}.$$

Από το λήμμα του Φατου και από το γεγονός ότι $|f|^{2-1/n} \rightarrow |f|^2$ σχεδόν παντού, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} |f|^{2-1/n} d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} M^{2-1/n} = M^2 < \infty.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $f \in L_2(\mathbb{R})$.

Για να δείξουμε ότι $\lim_{p \rightarrow 2^-} \|f\|_p = \|f\|_2$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $p_n \in [1, 2)$ με $p_n \uparrow 2$ ισχύει

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f\|_{p_n} = \|f\|_2.$$

Για το σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} d\lambda \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\lambda.$$

Κατόπιν, θα έχουμε

$$\|f\|_{p_n} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} d\lambda \right)^{\frac{1}{p_n}} \rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_2$$

διότι $\frac{1}{p_n} \rightarrow \frac{1}{2}$. Θεωρούμε τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n = |f|^2 \chi_{\{|f| < 1\}} + |f|^{p_n} \chi_{\{|f| \geq 1\}}$ και $g_n = |f|^2 \chi_{\{|f| \geq 1\}} + |f|^{p_n} \chi_{\{|f| < 1\}}$, και παρατηρούμε ότι:

(α) $f_n \leq |f|^{p_n} \leq g_n$ για κάθε n , άρα

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda.$$

(β) Η (f_n) είναι αύξουσα (διότι η (p_n) είναι αύξουσα) και $f_n \nearrow |f|^2$ σχεδόν παντού, άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\lambda.$$

(γ) Η (g_n) είναι φθίνουσα και $g_n \searrow |f|^2$ σχεδόν παντού. Επίσης, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} g_1 d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\lambda + \int_{\mathbb{R}} |f|^{p_1} d\lambda \leq M^2 + M^{p_1} < \infty,$$

άρα, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης για την $(g_1 - g_n)$,

$$\int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\lambda.$$

Από τα (α), (β), (γ) και από το κριτήριο ισοσυγκλινοσών ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^{p_n} d\lambda \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\lambda.$$

29. Έστω $f \in L_1[0, 1]$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $C > 0$ ώστε

$$\int_A |f| d\lambda \leq C\sqrt{\lambda(A)}$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο $A \subseteq [0, 1]$. Δείξτε ότι $f \in L_p[0, 1]$ για κάθε $1 \leq p < 2$. Είναι αναγκαστικά η f στον $L_2[0, 1]$;

Υπόδειξη. Από την υπόθεση και από την ανισότητα Μαρκον, αν $A_t = \{|f| \geq t\}$, $t > 0$, έχουμε

$$t\lambda(A_t) \leq \int_{A_t} |f| d\lambda \leq C\sqrt{\lambda(A_t)},$$

δηλαδή

$$\lambda(A_t) \leq \frac{C^2}{t^2}.$$

Έστω $1 \leq p < 2$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f|^p &= \int_0^\infty pt^{p-1} \lambda(\{|f| \geq t\}) d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 pt^{p-1} \lambda(\{|f| \geq t\}) d\lambda(t) + \int_1^\infty pt^{p-1} \lambda(\{|f| \geq t\}) d\lambda(t) \\ &\leq \int_0^1 pt^{p-1} d\lambda(t) + \int_1^\infty pt^{p-1} + C^2p \int_1^\infty t^{p-3} d\lambda(t) < \infty \end{aligned}$$

διότι $p - 3 < -1$. Άρα, $f \in L_p([0, 1])$.

30. Έστω $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$(*) \quad \int_E \exp(f(x)) d\lambda(x) = 1.$$

όπου $E = \text{supp}(f)$. Αποδείξτε ότι $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ για κάθε $1 \leq p < \infty$ και $\|f\|_p \leq Cp$, όπου $C > 0$ μια απόλυτη σταθερά. Δώστε παράδειγμα μετρήσιμης συνάρτησης f που ικανοποιεί την (*) αλλά $f \notin L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Υπόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $g(t) = t^p e^{-t}$, $t > 0$. Έχουμε $g'(t) = (pt^{p-1} - t^p)e^{-t}$, άρα η g έχει μέγιστο στο $t_0 = p$. Δηλαδή,

$$t^p \leq \frac{p^p}{e^p} e^t$$

για κάθε $t > 0$. Τότε,

$$\int |f|^p \leq \frac{p^p}{e^p} \int \exp(|f(x)|) d\lambda(x) = \frac{p^p}{e^p},$$

άρα

$$\|f\|_p \leq \frac{1}{e} p.$$

Για το δεύτερο ερώτημα, ένα παράδειγμα μπορεί να είναι η $f(x) = c + \ln \frac{1}{\sqrt{x}}$ στο $(0, 1)$, όπου το $c \in \mathbb{R}$ επιλέγεται έτσι ώστε

$$\int_0^1 e^{f(x)} d\lambda(x) = e^c \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} d\lambda(x) = e^c \cdot 2 = 1.$$

Η f δεν είναι φραγμένη, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

31. Έστω $f \in L^1((0, 1))$. Για $x \in (0, 1)$ ορίζουμε

$$g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} d\lambda(t).$$

Δείξτε ότι $g \in L^1((0, 1))$ και

$$\int_0^1 g(x) d\lambda(x) = \int_0^1 f(x) d\lambda(x).$$

Υπόδειξη. Για να δείξουμε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g(x)| d\lambda(x) &= \int_0^1 \left| \int_x^1 \frac{f(t)}{t} d\lambda(t) \right| d\lambda(x) \\ &\leq \int_0^1 \int_x^1 \frac{|f(t)|}{t} d\lambda(t) d\lambda(x) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t} \chi_{(x,1)}(t) d\lambda(t) d\lambda(x) \\ &= \int_0^1 \frac{|f(t)|}{t} \lambda(\{x : 0 < x < t\}) d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 |f(t)| d\lambda(t) = \|f\|_1 < \infty, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το θεώρημα Tonelli. Άρα, $g \in L^1((0, 1))$. Τώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Fubini και, ακολουθώντας την ίδια πορεία, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) d\lambda(x) &= \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{f(t)}{t} d\lambda(t) \right) d\lambda(x) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \chi_{(x,1)}(t) d\lambda(t) d\lambda(x) \\ &= \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \left(\int_0^1 \chi_{(x,1)}(t) d\lambda(x) \right) d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 \frac{f(t)}{t} \lambda(\{x : 0 < x < t\}) d\lambda(t) \\ &= \int_0^1 f(t) d\lambda(t) = \int_0^1 f(x) d\lambda(x). \end{aligned}$$

32. Έστω $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Αν η $g(x, y) = f(x) - f(y)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0, 1) \times (0, 1)$, δείξτε ότι $f \in L^1(0, 1)$.

Υπόδειξη. Αφού $|f(x)| < \infty$ για κάθε $x \in (0, 1)$, υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε το $A = \{x \in (0, 1) : |f(x)| \leq m\} \subseteq (0, 1)$ να έχει θετικό μέτρο. Θέτουμε $B = \{x \in (0, 1) : |(x)| > m\}$. Τότε, αν $(x, y) \in B \times A$, έχουμε

$$|f(x) - f(y)| \geq |f(x)| - |f(y)| \geq |f(x)| - m > 0.$$

Από το θεώρημα Tonelli,

$$\begin{aligned} \int_{(0,1) \times (0,1)} |f(x) - f(y)| d\lambda(x, y) &\geq \int_{B \times A} |f(x) - f(y)| d\lambda(x, y) \\ &\geq \int_{B \times A} (|f(x)| - m) d\lambda(x, y) \\ &= \int_B \int_A (|f(x)| - m) d\lambda(y) d\lambda(x) \\ &= \lambda(A) \int_B (|f(x)| - m) d\lambda(x). \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int_B |f(x)| d\lambda(x) \leq \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} + m\lambda(B) < \infty.$$

Αφού $f \leq m$ στο A , συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)} |f(x)| d\lambda(x) &= \int_A |f(x)| d\lambda(x) + \int_B |f(x)| d\lambda(x) \leq m\lambda(A) + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} + m\lambda(B) \\ &= m(\lambda(A) + \lambda(B)) + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} = m + \frac{\|g\|_1}{\lambda(A)} < \infty. \end{aligned}$$

Άρα, η f είναι ολοκληρώσιμη.

33. Έστω $0 < p < 1$. Ορίζουμε τον (αρνητικό αυτή τη φορά) συζυγή εκθέτη q του p από τη σχέση $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Έστω E μετρήσιμο υποσύνολο του \mathbb{R}^d . Αν $f, g : E \rightarrow [0, \infty]$ δείξτε ότι

$$\int fg d\lambda \geq \left(\int f^p d\lambda \right)^{1/p} \left(\int g^q d\lambda \right)^{1/q}$$

και

$$\left(\int (f + g)^p d\lambda \right)^{1/p} \geq \left(\int f^p d\lambda \right)^{1/p} + \left(\int g^p d\lambda \right)^{1/p}.$$

Υπόδειξη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder για τις $(fg)^p$ και g^{-p} με εκθέτες $r = \frac{1}{p}$ και $s = \frac{1}{1-p}$, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int f^p d\lambda &= \int (fg)^p g^{-p} d\lambda \\ &\leq \left(\int fg d\lambda \right)^p \left(\int (g^{-p})^{\frac{1}{1-p}} \right)^{1-p} \\ &= \left(\int fg d\lambda \right)^p \left(\int g^q \right)^{-\frac{p}{q}}, \end{aligned}$$

διότι $-\frac{p}{1-p} = q$ και $1-p = -\frac{p}{q}$ αφού οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες. Έπεται ότι

$$\left(\int fg d\lambda \right)^p \leq \left(\int f^p d\lambda \right) \left(\int g^q \right)^{\frac{p}{q}},$$

και υψώνοντας στην $1/p$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Για την δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα, χρησιμοποιώντας την προηγούμενη γράφουμε

$$\left(\int f^p d\lambda \right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} d\lambda \right)^{1/q} \leq \int f(f+g)^{-(1-p)} d\lambda$$

και

$$\left(\int g^p d\lambda \right)^{1/p} \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} d\lambda \right)^{1/q} \leq \int g(f+g)^{-(1-p)} d\lambda.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\left[\left(\int f^p d\lambda \right)^{1/p} + \left(\int g^p d\lambda \right)^{1/p} \right] \left(\int (f+g)^{-(1-p)q} d\lambda \right)^{1/q} \\ &\leq \int (f+g)(f+g)^{-(1-p)} d\lambda = \int (f+g)^p d\lambda. \end{aligned}$$

Αφού $-(1-p)q = p$, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \left(\int f^p d\lambda \right)^{1/p} + \left(\int g^p d\lambda \right)^{1/p} &\leq \left(\int (f+g)^p d\lambda \right)^{1-1/q} \\ &= \left(\int (f+g)^p d\lambda \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

34. Δείξτε ότι αν $1 \leq p < q \leq \infty$, τότε ο $L_q[0, 1]$ είναι πρώτης κατηγορίας υποσύνολο του $L_p[0, 1]$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder βλέπουμε ότι αν $1 \leq p < q \leq \infty$ τότε $\|f\|_p \leq \|f\|_q$ για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Άρα, για κάθε $f \in L_q[0, 1]$ έχουμε $f \in L_p[0, 1]$. Δηλαδή, $L_q[0, 1] \subseteq L_p[0, 1]$.

Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων $F_n = \{f \in L_p[0, 1] : \|f\|_q \leq n\}$. Προφανώς ισχύει

$$L_q[0, 1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι κάθε F_n είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του $L_p[0, 1]$. Παρατηρούμε τα εξής:

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το F_n είναι $\|\cdot\|_p$ -κλειστό. Πράγματι, αν (f_k) είναι μια ακολουθία στο F_n , δηλαδή $\|f_k\|_q \leq n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και αν $\|f_k - f\|_p \rightarrow 0$, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι $\|f\|_q \leq n$: αφού $f_k \xrightarrow{L_p} f$, από την ανισότητα Μαρκον έχουμε

$$\lambda(|f_k - f| > \varepsilon) \leq \varepsilon^{-p} \|f_k - f\|_p^p,$$

άρα $f_k \xrightarrow{\lambda} f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία (f_{k_s}) της (f_k) ώστε $f_{k_s} \rightarrow f$ σχεδόν παντού. Έπεται ότι $|f_{k_s}|^q \rightarrow |f|^q$ και από το λήμμα του Φατου παίρνουμε

$$\int |f|^q d\lambda \leq \liminf_{s \rightarrow \infty} \int |f_{k_s}|^q d\lambda \leq n^q,$$

διότι $\|f_{k_s}\|_q \leq n$. Άρα, $f \in F_n$.

(β) Το F_n έχει κενό εσωτερικό: για κάθε $f \in F_n$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$B(f, \varepsilon) = \{g \in L_p[0, 1] : \|f - g\|_p < \varepsilon\} \not\subseteq F_n.$$

Πράγματι, σταθεροποιούμε $f \in F_n$ και $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\alpha \in (1/q, 1/p)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση

$$h(t) = \frac{\varepsilon(1 - \alpha p)^{1/p}}{2t^\alpha},$$

η οποία ανήκει στον $L_p[0, 1] \setminus L_q[0, 1]$ (ελέγξτε το). Άρα, η συνάρτηση $f + h \in L_p[0, 1]$ και μάλιστα $f + h \in B(f, \varepsilon)$ διότι $\|h\|_p = \varepsilon/2$, αλλά $f + h \notin F_n$, αφού $h \notin L_q[0, 1]$.