ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ

1 *Μια πρόταση διδακτικής διαπραγμάτευσης του θέματος "Μετασχηματισμοί" στη θεματική ενότητα "Γεωμετρία – Μέτρηση" της Β΄ Γυμνασίου.*

● Βασικές προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών:

Η έννοια του διανύσματος (διδάχθηκε στην ίδια τάξη)

Η έννοια του μέσου και της μεσοκάθετης ευθύγραμμου τμήματος (διδάχθηκε στην προηγούμενη τάξη)

Η έννοια της γωνίας και η μέτρηση των γωνιών (διδάχθηκε στην προηγούμενη τάξη)

Βασικές γεωμετρικές κατασκευές, όπως η κατασκευή παράλληλης προς δοθείσα ευθεία από σημείο εκτός αυτής, η κατασκευή μεσοκάθετης ευθύγραμμου τμήματος και η κατασκευή γωνίας με δεδομένο μέτρο (διδάχθηκαν στην προηγούμενη τάξη)

● Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα:

Γ5, Γ6, Γ7, Γ8 (βλέπε Πρόγραμμα Σπουδών Β΄ Γυμνασίου)

● Διδακτική πρόταση – Δραστηριότητες:

Η διδασκαλία των μετασχηματισμών στο Γυμνάσιο εντάσσεται στο γενικότερο πλαίσιο διδασκαλίας της Γεωμετρίας που περιλαμβάνει μια πιο θεωρητική, σε σχέση με το Δημοτικό, προσέγγιση στις γεωμετρικές έννοιες. Αυτή η προσέγγιση δίνει έμφαση στην ανάδειξη σχέσεων, την ακριβή διατύπωση ορισμών και ιδιοτήτων και την αιτιολόγηση των τελευταίων με εμπειρικά, κυρίως, μέσα.

Για το λόγο αυτό προτείνεται αρχικά η συσχέτιση της έννοιας του μετασχηματισμού με ορισμένες βασικές γεωμετρικές έννοιες και κατασκευές που γνωρίζουν οι μαθητές και περικλείουν την έννοια της κίνησης, όπως οι εξής:

α) Η κατασκευή της παράλληλης προς μια ευθεία από σημείο εκτός αυτής, με χρήση του κανόνα και του γνώμονα, περιλαμβάνει την παράλληλη μεταφορά (ολίσθηση) του γνώμονα κατά μήκος του κανόνα. Αυτή η διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία για το γενικό ορισμό της <u>παράλληλης μεταφοράς</u> ενός γεωμετρικού σχήματος στο επίπεδο και το χαρακτηρισμό της με τη βοήθεια ενός διανύσματος.

β) Η έννοια του μέσου και της μεσοκάθετης ενός ευθύγραμμου τμήματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως αφετηρία για το γενικό ορισμό της *ανάκλασης ως προς κέντρο και ως προς άξονα* αντίστοιχα, ενός γεωμετρικού σχήματος στο επίπεδο.

γ) Η περιστροφή ενός ευθύγραμμου τμήματος γύρω από το ένα άκρο του με την οποία αιτιολογείται η ιδιότητα της εξωτερικής γωνίας του τριγώνου (βλέπε συνθετική εργασία Νο 4 στο Πρόγραμμα Σπουδών Α΄ Γυμνασίου) μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως αφετηρία για το γενικό ορισμό της *στροφής* ενός γεωμετρικού σχήματος στο επίπεδο και το χαρακτηρισμό της με τη βοήθεια μιας γωνίας.

Μετά από την πρώτη αυτή γνωριμία με τους συγκεκριμένους μετασχηματισμούς μπορεί να επιχειρηθεί μια γενικότερη προσέγγιση η οποία αναδεικνύει την έννοια του μετασχηματισμού ως απεικόνισης των σημείων ενός επιπέδου σε σημεία του επιπέδου. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία συνδέσεων με το θέμα “Κανονικότητες – Συναρτήσεις” που αποτελεί βασικό αντικείμενο διδασκαλίας στη θεματική ενότητα “Αριθμοί - Άλγεβρα” της ίδιας τάξης.

• Βασικός στόχος της διδασκαλίας των γεωμετρικών μετασχηματισμών στη Β΄ Γυμνασίου είναι να αποκτήσουν οι μαθητές ευχέρεια στην κατασκευή του σχήματος-εικόνας απλών γεωμετρικών σχημάτων μέσω μιας παράλληλης μεταφοράς ως προς δεδομένο διάνυσμα, μιας ανάκλασης ως προς δεδομένο κέντρο ή άξονα και μιας στροφής ως προς δεδομένη γωνία. Οι κατασκευές αυτές μπορούν και πρέπει να γίνουν με παράλληλη και ισορροπημένη χρήση γεωμετρικών οργάνων και λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας.

Άλλοι σημαντικοί στόχοι της διδασκαλίας είναι οι εξής:

• Να διερευνήσουν οι μαθητές την επίδραση που έχει κάθε είδος μετασχηματισμού σε ορισμένα βασικά στοιχεία ενός γεωμετρικού σχήματος, όπως είναι η θέση, ο προσανατολισμός, η μορφή, το μέγεθος κ.λπ.

• Να αποκτήσουν ευχέρεια στον εντοπισμό του διανύσματος μιας παράλληλης μεταφοράς, του κέντρου ή του άξονα μιας ανάκλασης και της γωνίας μιας στροφής, όταν δίνονται το αρχικό γεωμετρικό σχήμα και το σχήμα-εικόνα του ως προς τον αντίστοιχο μετασχηματισμό (π.χ. οι δραστηριότητες ΓΔ 4 και ΓΔ 5 του Π.Σ.).

• Να γνωρίσουν τον τρόπο χρήσης των γεωμετρικών μετασχηματισμών για τη ανακάλυψη και αιτιολόγηση ιδιοτήτων των σχημάτων (π.χ. η δραστηριότητα ΓΔ 6 του Π.Σ.)

Άλλες σχετικές δραστηριότητες που μπορεί να αξιοποιήσουν οι διδάσκοντες υπάρχουν στον Οδηγό του Εκπαιδευτικού, ενώ αντικείμενο ειδικής διαπραγμάτευσης πρέπει να γίνει η δυνατότητα διεξαγωγής ορισμένων από τις προηγούμενες δραστηριότητες στο καρτεσιανό επίπεδο (προβλέπεται στο Π.Σ. της Γ΄ Γυμνασίου).

***.2** *Σχεδιασμός ενός μαθήματος Άλγεβρας Γ΄Γυμνασίου και καταγραφή στοιχείων της διδασκαλίας του από τον εκπαιδευτικό.*

Στην παράγραφο αυτή θα περιγραφεί μια πραγματική διδασκαλία στην Γ΄ Γυμνασίου, η οποία αφορά στην ενότητα Αλγεβρική παράσταση – ιδιότητες τετραγωνικών ριζών και έχει ως στόχο τη διερεύνηση και απόδειξη των σχέσεων $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\beta}$, $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ και την εφαρμογή τους στην απλοποίηση – υπολογισμό της τιμής παραστάσεων.

Για το σχεδιασμό της διδασκαλίας λήφθηκαν υπόψη:

- οι στόχοι του ΠΣ,
- η τροχιά "αλγεβρικές παραστάσεις" σχετικά με τις προηγούμενες και τις επόμενες εμπειρίες – γνώσεις των μαθητών και η τροχιά "άρρητοι αριθμοί" που περιλαμβάνει την έννοια της τετραγωνικής ρίζας,

- η προτεινόμενη δραστηριότητα ΑΔ3 (ως πιθανώς αποτελεσματική στην επίτευξη των στόχων),
- η ανάπτυξή της δραστηριότητας ΑΔ3 στον οδηγό (για την πιθανή πορεία διαπραγμάτευσης και τις μαθηματικές διεργασίες).

Το μάθημα έγινε στον προβλεπόμενο από το ΠΣ χρόνο (3 ώρες).

Παρακάτω δίδονται τα σχετικά αποσπάσματα του ΠΣ και του οδηγού του εκπαιδευτικού.

Α6. Διερευνούν και αποδεικνύουν τις ιδιότητες των ριζών $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$. *Α7.* Χρησιμοποιούν τις τετραγωνικές ρίζες και τις ιδιότητές τους στην απλοποίηση παραστάσεων και στην επίλυση προβλημάτων.	**Αλγεβρική παράσταση** • Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών, μετασχηματισμοί *(3 ώρες)*	Η διερεύνηση και απόδειξη των ιδιοτήτων και η εφαρμογή τους σε απλές παραστάσεις είναι βασικός στόχος των δραστηριοτήτων. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ3*)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.1.Γ.

ΑΔ3	Η Μαρία υπολόγισε το γινόμενο $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$ και το βρήκε 15. Ο Γιάννης ισχυρίστηκε ότι δεν μπορεί το αποτέλεσμα να είναι ακέραιος. Πώς νομίζετε ότι οδηγήθηκε ο Γιάννης σε αυτό συμπέρασμα; Συμφωνείτε με το Γιάννη ή με τη Μαρία και γιατί;	**Α6**

Γ΄ Γυμνασίου: ΑΔ3

Η δραστηριότητα αυτή σχετίζεται με τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών, ειδικότερα την $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$. Επιπλέον, ίσως αναπτυχθεί και μια συζήτηση για τους άρρητους αριθμούς με αφορμή τη γνώμη του Γιάννη που υπονοεί ότι το γινόμενο δύο αριθμών με άπειρα δεκαδικά ψηφία (όπως οι $\sqrt{3}$ και $\sqrt{75}$) δεν θα είναι ακέραιος. Μια πιθανή πορεία της διερεύνησης των μαθητών περιλαμβάνει: αναζήτηση από τους μαθητές ερμηνειών για τις απόψεις που περιγράφονται στο σενάριο, εικασία για την ιδιότητα που ίσως ισχύει και διερεύνηση με παραδείγματα, ανάδειξη της ανάγκης μιας γενικής απόδειξης της ιδιότητας και δημιουργία της απόδειξης. Προτείνεται ο εκπαιδευτικός να επιλέξει το ρόλο του συντονιστή της συζήτησης, αφήνοντας χρόνο στους μαθητές να αναπτύξουν πρωτοβουλίες. Επεκτάσεις αυτής της πορείας θα μπορούσε να είναι η διερεύνηση του αν ισχύουν αντίστοιχες ιδιότητες για το άθροισμα, τη διαφορά και το πηλίκο αριθμών. Αυτή η διερεύνηση δίνει τη δυνατότητα να συζητηθούν η έννοια και ο ρόλος της αλγεβρικής απόδειξης και του αντιπαραδείγματος. Με αφορμή αυτό το πρόβλημα μπορούν να αναδειχθούν τα μειονεκτήματα της χρήσης υπολογιστή τσέπης και η αξία των ιδιοτήτων των ριζών (αφού, ο πολλαπλασιασμός $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$ με το κομπιουτεράκι δεν θα δώσει το σωστό αποτέλεσμα 15).

Διεργασίες διερεύνησης, εικασίας και ελέγχου, επιχειρηματολογίας και απόδειξης

Διεργασία επικοινωνίας με χρήση φυσικής γλώσσας και συμβόλων

Καταγραφή στοιχείων της διδασκαλίας από τον εκπαιδευτικό της τάξης

Πρώτο μάθημα (δίωρο) 22/9/2011

Μετά από μια σύντομη (10΄) εισαγωγή – επανάληψη της έννοιας της τετραγωνικής ρίζας, δίνεται στους μαθητές η δραστηριότητα:

Η Ελένη υπολόγισε το γινόμενο $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$ και το βρήκε 15. Ο Γιάννης ισχυρίστηκε ότι δεν μπορεί το αποτέλεσμα να είναι ακέραιος. Πώς νομίζετε ότι οδηγήθηκε ο Γιάννης σε αυτό συμπέρασμα; Ποια άποψη νομίζετε ότι είναι σωστή;

Μετά από 10΄ συζητήσεων ανά ομάδες (των 2–4 ατόμων, δηλαδή ανά 1 ή 2 θρανία), οι μισές ομάδες ήταν σε θέση να ερμηνεύσουν την άποψη του Γιάννη: "Αφού ο $\sqrt{3}$ και ο $\sqrt{75}$ είναι δεκαδικοί (κάποιοι λένε τη λέξη "άρρητοι", κάποιοι λένε "έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία") όταν τους πολλαπλασιάσουμε δεν μπορεί να βγει ακέραιος". Ομοίως, για την άποψη της Ελένης, λέει κάποιος μαθητής "$\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$ έκανε 3·75=225 και $\sqrt{225} = 15$" και ο Γιώργος σηκώνεται στον πίνακα και γράφει: $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75} = \sqrt{225} = 15$.

Στην ερώτηση ποιο είναι σωστό, οι μαθητές λένε το $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75} = \sqrt{225} = 15$, αλλά υπάρχει μία τουλάχιστον ομάδα (μία το δήλωσε, αλλά η αίσθηση είναι ότι κι άλλοι μαθητές το σκέφτονταν) που "της φαινόταν σωστή" η άποψη του Γιάννη. Λένε "αν το υπολογίσουμε με το κομπιουτεράκι …" και ο εκπαιδευτικός υπολογίζει με το κομπιουτεράκι και γράφει στον πίνακα: $\sqrt{3}$=1,7320508, $\sqrt{75}$=8,660254 και 1,7320508 · 8,660254=14,999999. Κάποιοι λένε "δηλαδή 15".

Στην ερώτηση "αν είναι 15, τότε γιατί το κομπιουτεράκι έδωσε 14,999999", κάποιος μαθητής απαντάει "πέρσι μας είχατε πει ότι 14,999… με άπειρα εννιάρια είναι το 15". Ίσως κάποιοι μαθητές λέγοντας ότι είναι 15, να εννοούν ότι το 14,999999 είναι περίπου 15. Ο εκπαιδευτικός εξηγεί ότι το κομπιουτεράκι υπολογίζει κάνοντας στρογγυλοποιήσεις, δηλαδή κόβοντας δεκαδικά ψηφία και αυτό που δίνει σαν αποτέλεσμα δεν είναι 14,999… με άπειρα εννιάρια, αλλά 14,999999 με 6 εννιάρια. Δηλαδή, επειδή με το κομπιουτεράκι δεν έχουμε ακρίβεια, δεν ξέρουμε αν το σωστό είναι το 15 ή το 14,999999.

Οι μαθητές επιμένουν στο 15. Ο εκπαιδευτικός τους θέτει την ερώτηση αν είναι σίγουροι, και κάποιοι μαθητές λένε "όχι, να το ελέγξουμε". Κάποιοι προτείνουν να δοκιμάσουμε αν ισχύει το $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75} = \sqrt{225}$ χρησιμοποιώντας "ένα άλλο παράδειγμα με νούμερα που να υπολογίζονται πιο εύκολα". Ο Φώτης σηκώνεται στον πίνακα και δοκιμάζει αν το $\sqrt{4} \cdot \sqrt{36}$ είναι ίσο με το $\sqrt{4 \cdot 36} = \sqrt{144}$. Ο εκπαιδευτικός ρωτάει αν δοκιμάζοντας πολλούς αριθμούς θα είμαστε σίγουροι ότι ισχύει. Αναφέρει το παράδειγμα με τους διαιρέτες του 12 (δοκιμάζοντας τους 1,2,3,4,6 βρίσκουμε ότι είναι διαιρέτες του 12, αλλά αυτό προφανώς δεν σημαίνει ότι όλοι οι αριθμοί είναι διαιρέτες του 12). Εξηγεί έτσι την ανάγκη μιας γενικής απόδειξης και παρουσιάζει την αλγεβρική απόδειξη της ιδιότητας $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$. Τέλος αναφέρεται στην ιδιότητα με το πηλίκο ριζών.

Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός θέτει το ερώτημα αν ισχύει η ιδιότητα $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$. Κάποιοι μαθητές ισχυρίζονται πως ισχύει και κάποιοι πως δεν ισχύει. Ο Σωτήρης λέει ότι αν δοκιμάσουμε αριθμούς δεν βγαίνει. Ο εκπαιδευτικός γράφει το παράδειγμα $\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{9+16}$ και διαπιστώνουν ότι δεν ισχύει. Ρωτάει αν έτσι αποδείξαμε ότι δεν ισχύει η ιδιότητα $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$, κάποιος μαθητής απαντάει πως δεν αποδείξαμε ότι δεν ισχύει αλλά ότι υπάρχουν αριθμοί που δεν ισχύει. Ο εκπαιδευτικός εξηγεί ότι αν για ένα παράδειγμα δεν ισχύει, αυτό σημαίνει ότι δεν ισχύει η δήλωση "για όλους τους αριθμούς ισχύει $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha + \beta}$"…

<u>Δεύτερο μάθημα (1 ώρα), δύο μέρες μετά.</u>

Λύνονται κάποιες ασκήσεις (με αφορμή εκείνες που δυσκόλεψαν τους μαθητές από την εργασία στο σπίτι) σχετικά με την εφαρμογή των ιδιοτήτων στον υπολογισμό και την απλοποίηση παραστάσεων που περιέχουν ρίζες, όπως η 3β και η 11 του βιβλίου. Μέσα από αυτή τη συζήτηση έγινε και αξιολόγηση της επίτευξης των στόχων (παρατηρώντας τις δυσκολίες των μαθητών, τις απαντήσεις τους κλπ).

<u>Σχολιασμοί του εκπαιδευτικού πάνω στο πρώτο δίωρο:</u>

Η εξέλιξη νομίζω επιβεβαιώνει ότι η δραστηριότητα είναι μέσα στα πλαίσια των ικανοτήτων των μαθητών, είναι ενδιαφέρουσα (συμμετείχαν όλοι στις συζητήσεις των ομάδων) και είναι αποδοτική για τους στόχους για τους οποίους στήθηκε (διερεύνηση της ιδιότητας $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$ και της ανάγκης απόδειξής της, επεκτάσεις στους άρρητους και τη χρήση υπολογιστή τσέπης).

Αλλά υπάρχουν ερωτήματα που με προβλημάτισαν μετά το μάθημα:

α) Στη συζήτηση στην ολομέλεια της τάξης συμμετείχαν με τον ένα ή τον άλλο τρόπο οι μισοί μαθητές. Οι άλλοι μισοί τι είχαν κάνει στις ομάδες τους; Μέχρι που έφτασαν τη διερεύνησή τους; Δεν πρόλαβα να συζητήσω με όλες τις ομάδες ώστε να ξέρω τι έκανε ο καθένας.

β) Στη συζήτηση για το 14,999999 που δίνει το κομπιουτεράκι μίλαγα πολύ και την απόδειξη της ιδιότητας την παρουσίασα μόνος μου, χωρίς να αφήνω πρωτοβουλίες στα παιδιά. Μήπως θα μπορούσε να γίνει αλλιώς; Ίσως ζητώντας από τα παιδιά να εξηγήσουν αν το κομπιουτεράκι μας δίνει αποτελέσματα ακριβή για να κρίνουμε αν η ιδιότητα είναι σωστή. Για την απόδειξη, ίσως θα μπορούσα να ζητήσω από τα παιδιά να σκεφτούν. Δεν ξέρω αν θα είχαν κάποια ιδέα για το πώς θα μπορούσαν να δικαιολογήσουν ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει για όλους τους θετικούς αριθμούς.

3 *Σχεδιασμός ενός μαθήματος Άλγεβρας Α΄ Γυμνασίου και καταγραφή στοιχείων της διδασκαλίας του από τον εκπαιδευτικό.*

Θεματική ενότητα: Αριθμοί-Άλγεβρα (ΑΑ)

Βασικό θέμα: κανονικότητες / συναρτήσεις (4 ώρες)

Προηγούμενες γνώσεις των μαθητών: Οι μαθητές έχουν διδαχθεί την έννοια της κανονικότητας και έχουν διερευνήσει αριθμητικά και γεωμετρικά μοτίβα (κανονικότητες). Δες **ΠΣ** ΣΤ Δημοτικού: κανονικότητες / συναρτήσεις (3 ώρες), σελ. 164, ΑΔ1 (ποιος είναι ο 8^{ος} όρος της ακολουθίας 720, 360, 120, …;), σελ. 174, και από **βιβλίο μαθητή**: Δ 2, σελ. 129 (αριθμητικό μοτίβο) και Δ 2 (γεωμετρικό μοτίβο), σελ. 131.

Υποστηρικτικό υλικό: ΠΣ (ΠΜΑ σελ. 39, δραστηριότητα ΑΔ1, σελ. 46) και Οδηγός Εκπαιδευτικού (κανονικότητες-συναρτήσεις, σελ. 63, 64, 65)

<u>1^{ο} μάθημα</u>

Πρόβλημα 1 (αριθμητικά patterns)

Συμπλήρωσε τον επόμενο όρο στις παρακάτω ακολουθίες αριθμών και βρες ένα κανόνα που να περιγράφει την κανονικότητα (pattern):

(α) 2, 4, 6, 8, 10, 12, …

(β) 3, 8, 13, 18, 23, …

(γ) 1, 3, 7, 15, 31, …

ΠΜΑ (Α1): *Διερευνούν αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες και διατυπώνουν το γενικό τους όρο λεκτικά, συμβολικά και με μια αλγεβρική αναπράσταση.*

Καταγραφή στοιχείων από την διαπραγμάτευση στην τάξη

Δίνονται κάποιες διευκρινίσεις και κατόπιν οι μαθητές εργάζονται ατομικά ή ομαδικά για επαρκές χρονικό διάστημα. Στη συνέχεια ακολουθεί συζήτηση/διαπραγμάτευση με ολόκληρη την τάξη και ένας μαθητής από μια ομάδα εξηγεί με ποιο τρόπο το αντιμετώπισαν.

7 ***M1***[1]*: παρατηρήσαμε ότι από το 1 για να πάμε στο 3 θέλουμε 2, μετά από το 3 στο 7 θέλουμε 4, μετά 8, μετά 16, δηλαδή οι αριθμοί διπλασιάζονται ... έτσι η επόμενη διαφορά θα είναι 32, οπότε 31+32=63*

8 *Δ: συμφωνείτε; υπάρχει αντίρρηση;*

9 ***M2**: δεν το κατάλαβα ακριβώς, μπορεί να το επαναλάβει;*

10 ***M3**: να το εξηγήσω στον πίνακα;* [είναι μαθητής από την ομάδα του Μ1]

11 *Δ: ναι έλα*

12 ***M3:*** [γράφει στον πίνακα κάτω από τους όρους τις διαφορές ως εξής:]

1 3 7 15 31 ...

2 4 8 16 32

13 ***M2**: α ναι ... και προσθέτουμε το 32 ... εντάξει*

14 *Δ: ωραία, λοιπόν συμπέρασμα ... ποιος θα το διατυπώσει;*

15 ***M2**: για να βρούμε ένα αριθμό ... εντάξει τον επόμενο αριθμό, αφαιρούμε τους δύο τελευταίους και προσθέτουμε το διπλάσιο στον τελευταίο ... παράδειγμα ο επόμενος του 63 θα είναι ... 32×2=64 δηλαδή 63+64=127*

Ουσιαστικά εδώ απαντάται το ερώτημα και θα μπορούσε να τελειώσει η δραστηριότητα, αλλά δάσκαλος θεωρεί ότι πρέπει να αναδειχθούν όλες οι υποκείμενες έννοιες και συνεχίζει με ένα επιπλέον ερώτημα με σκοπό να οδηγηθούν οι μαθητές σε μια ***γενίκευση*** και στην ***εισαγωγή συμβολισμού***.

16 *Δ: εντάξει ... τώρα ας εξετάσουμε ένα άλλο ερώτημα:* ***αν γνωρίζουμε κάποιον όρο της ακολουθίας, πως μπορούμε να βρούμε τον επόμενό του;*** *Σκεφθείτε το και το συζητάμε σε λίγο ...* [δίνεται επαρκής χρόνος για να επεξεργαστούν οι μαθητές το ερώτημα και μετά γίνεται ΣΟΤ] *... ναι .. τι θα κάνουμε;*

17 ***M4**: νομίζω θα προσθέσουμε πάλι τη διαφορά και θα τον βρούμε*

18 *Δ: συμφωνείτε;*

19 ***M5**: σωστό φαίνεται, αλλά κάτι ... δηλαδή θα ξέρουμε όλους τους αριθμούς πριν;*

20 ***M6**: αν τους ξέρουμε όλους το κάνουμε όπως στο σχήμα με τις αφαιρέσεις*

21 ***M7**: θα ξέρουμε τους προηγούμενους όρους ή όχι; ... αν όχι είναι δύσκολο*

22 *Δ: θα κάνω το ερώτημα λίγο πιο συγκεκριμένο: αν στην ακολουθία μετά το 127 ακολουθούν κάποιοι όροι και μετά είναι ο* ***α*** [γράφει 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, ..., **α**, **...**] *και θέλω να βρω τον επόμενο του* ***α ...***

[1] M_i: ο i μαθητής, Δ: δάσκαλος

26 ***M8****: δύσκολο, αφού δεν ξέρουμε τον αριθμό*

29 ***M10****: μα δεν ξέρουμε τους προηγούμενους πως θα ξέρουμε*

28 ***M8****: αα ... πρέπει να ξέρουμε και τον προηγούμενό του για να βρούμε τη διαφορά*

29 Δ: ακριβώς ... λοιπόν το ερώτημα είναι: ***στην ακολουθία 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, ..., α, ... ποιος είναι ο επόμενος του α****; ... σκεφθείτε το πιο προσεκτικά*

Επειδή οι μαθητές έχουν δυσκολία να μπορέσουν να βρουν τον επόμενο του α, στη ΣΟΤ που ακολουθεί ο δάσκαλος τους εξηγεί ότι πρέπει να βρουν ένα **κανόνα** που να παράγει τον επόμενο αριθμό αν ξέρουν τον προηγούμενό του. Συζητείται τι σημαίνει κανόνας (πρέπει να παράγει *κάθε* αριθμό από τον προηγούμενό του) και για να τον βρουν πρέπει να παρατηρήσουν προσεκτικά όλους τους όρους της ακολουθίας για να διαπιστώσουν με ποιο τρόπο κάθε αριθμός παράγεται από τον προηγούμενό του. Οι μαθητές εργάζονται ομαδικά ή ατομικά (οι περισσότεροι σε ομάδες των 2 , 3 ή 4 μαθητών και ανταλλάσσουν απόψεις μεταξύ τους ή με τον δάσκαλο). Μετά κάποιοι είναι έτοιμοι να προτείνουν τον κανόνα τους σε ολόκληρη την τάξη.

39 M9: κάθε αριθμό τον ***πολλαπλασιάζουμε με το 2 και μετά προσθέτουμε το 1***

40 ***M10****:* [της ίδιας ομάδας, στον πίνακα] *κι αυτό το γράφουμε έτσι* ***2·(   )+1***

41 ***M11****: η παρένθεση τι είναι;*

42 M9: ο προηγούμενος αριθμός και όλο μαζί ο επόμενος

43 ***M11****: η* ***παρένθεση*** *τι χρειάζεται;*

51 Δ: ... εντάξει εδώ θα μπορούσε και να μη χρησιμοποιηθεί, αλλά πως θα φαινόταν ότι το 2 πολλαπλασιάζεται με τον προηγούμενο αριθμό

Η γενίκευση με τη χρήση άτυπου συμβολισμού προκαλεί ΣΟΤ για το ρόλο της παρένθεσης όπου αρκετοί μαθητές εκθέτουν τις απόψεις τους για αν είναι απαραίτητη και προσπαθούν με την καθοδήγηση του δασκάλου να φθάσουν σε συναίνεση που εδώ το κατορθώνουν. Ο άτυπος συμβολισμός γίνεται πιο επίσημος με τη χρήση συμβόλων, όπως φαίνεται στη συνέχεια.

52 ***M13*** [άλλη ομάδα]: *εμείς έχουμε βρει κάτι παρόμοιο χωρίς παρένθεση ... έχουμε βάλει το α και ο επόμενος του α θα είναι ο* ***2·α+1*** [συμπληρώνεται στον πίνακα]

53 Δ: τι λέτε είναι εντάξει; τι συμβολίζει ο α; πως θα το ελέγξουμε ότι ο κανόνας που γράφτηκε με σύμβολα είναι εντάξει; ... όχι εσείς που το βρήκατε ... κάποιος άλλος.

54 ***M14****: νομίζω το α είναι ο αριθμός και αυτό* [εννοεί το 2·α+1**]** *ο επόμενός του ... θα το ελέγξουμε βάζοντας στη θέση του α τον 1023 για να βρούμε τον επόμενό του*

55 Δ: εντάξει έτσι θα βρούμε τον επόμενο του 1023, ελέγχουμε όμως ότι ο κανόνας είναι σωστός;

56 ***M15****: να βάλουμε όλους τους αριθμούς κι αν βγαίνει*

57 Δ: αυτό είναι καλύτερο ... ποιος θα μας πει τι ακριβώς πρέπει να κάνουμε;

58 ***M16****: θα βάλουμε στη θέση του α π χ τον 7 και θα κάνουμε πράξεις, δηλαδή 2·7+1=15 εντάξει βγαίνει ο επόμενός του*

59 Δ: μόνο για το 7;

60 ***Μ*** [πολλοί μαζί]: *για όλους τους αριθμούς*

Το επεισόδιο αυτό ολοκληρώνεται με τον έλεγχο του προτεινόμενου κανόνα για να διαπιστωθεί ότι δουλεύει για όλους τους αριθμούς. Οι μαθητές εργάζονται και παράγουν όρους της ακολουθίας.

61 ***Μ17****: εγώ βρήκα ένα άλλο «****κανόνα****» π χ για τον 2ο πρέπει να τριπλασιάσω το 1, βγαίνει 3, μετά τριπλασιάζω το 3, δεν βγαίνει 7 πρέπει να αφαιρέσω 2, μετά τριπλασιάζω το 7 δεν βγαίνει 15 πρέπει να αφαιρέσω 6 ... είναι πιο δύσκολο ... τριπλασιάζω και αφαιρώ, αλλά όχι τον ίδιο αριθμό κάθε φορά ... είναι σωστό;*

62 Δ: τι λέτε παιδιά, πως σας φαίνεται ο «κανόνας» του συμμαθητή σας

63 ***Μ18****: πως θα ξέρουμε τι θα αφαιρούμε κάθε φορά*

64 ***Μ19****: είναι πιο πολύπλοκος από τον προηγούμενο*

65 Δ: εντάξει έτσι είναι, ο κανόνας πρέπει να εφαρμόζεται με τον ίδιο τρόπο για όλους τους όρους, όμως μπορείς να τον επεξεργαστείς περισσότερο και ενδεχομένως να βρεις κάτι πιο συγκεκριμένο και τότε το ξανασυζητάμε ...

Ο δάσκαλος δεν αποθαρρύνει το μαθητή που θεωρεί ότι βρήκε άλλο «κανόνα», αλλά τον προτρέπει να τον ελέγξει περισσότερο μήπως μπορέσει να βρει ένα ενιαίο τρόπο που να παράγει όλους τους όρους.

66 ***Μ20****: εδώ στο προηγούμενο με την* ***παρένθεση*** *... νομίζω πως χρειάζεται η παρένθεση, γιατί πως θα βρούμε τον* ***επόμενο*** *του 2·α+1;*

67 Δ: καλή η ιδέα σου ... ο συμμαθητής σας βάζει το εξής σημαντικό ερώτημα ***ποιος είναι ο επόμενος του 2·α+1; σκεφτείτε το***

Η ιδέα του μαθητή να βρει τον επόμενο του 2·α+1 και να το συσχετίσει με την παρένθεση θέτει δύο νέα σημαντικά ζητήματα: (α) αναδεικνύει την αναγκαιότητα της παρένθεσης και (β) τη χρήση της αλγεβρικής παράστασης 2·α+1 ως μαθηματικού αντικειμένου, αφού την χρησιμοποιεί σαν ‘ένα αριθμό’ και προσπαθεί να βρει τον επόμενό του. Δίνεται χρόνος στους μαθητές να επεξεργαστούν το ερώτημα και μετά ακολουθεί ΣΟΤ:

68 ***Μ21****: ο επόμενος του 2·α+1 είναι* ***2·(2·α+1)+1*** [συμπληρώνεται στον πίνακα]

69 ***Μ11****: γιατί έβαλε παρένθεση, πριν δεν είπαμε ότι αν θέλουμε βάζουμε;*

Ενώ η συζήτηση εξελίσσεται ομαλά και θεωρούμε ότι έχει διευκρινιστεί ένα ζήτημα αυτό δεν είναι καθόλου βέβαιο για κάποιους μαθητές, όπως φαίνεται από το ερώτημα του Μ11. Έτσι ενώ μερικοί μαθητές μπόρεσαν να βρουν και να συμβολίσουν τον επόμενο του 2·α+1 με ένα πιο σύνθετο συμβολισμό, για κάποιους άλλους υπάρχουν ακόμα δυσκολίες σε ζητήματα, που θεωρούνται πιο εύκολα όπως της παρένθεσης. Μετά από ΣΟΤ για το ρόλο της παρένθεσης στη νέα κατάσταση ο μαθητής φαίνεται εν μέρει να έχει ξεκαθαρίσει το θέμα αυτό:

79 ***Μ11****: ξέρετε κάτι, νομίζω ότι πρέπει να βάζω πάντα για να είμαι σίγουρος*

Ενώ για 2η φορά φαίνεται να κλείνει το θέμα μια νέα ιδέα ενός μαθητή ανοίγει ένα καινούργιο ζήτημα, η εύρεση του προηγούμενου όρου του α, που δεν ήταν στις προθέσεις του δασκάλου να το ρωτήσει. Έτσι σ’ αυτή τη διδασκαλία σε πολλά σημεία φαίνεται να επαληθεύεται η φράση του Simon ότι «*το μόνο που μπορείς να αναμένεις από τους μαθητές είναι το αναμενόμενο*».

80 ***M20****: σκέφτηκα κάτι άλλο εδώ στους αριθμούς που έχουμε* [δείχνει την ακολουθία όπως έχει τροποποιηθεί: **1, 3, 7, 15, 31, ..., α, 2·α+1, 2·(2·α+1)+1, ...**] *... μπορούμε να βρούμε τον προηγούμενο του α;*

81 Δ: α πολύ ενδιαφέρον το ερώτημά σου ... όμως επειδή δεν μας παίρνει ο χρόνος το ερώτημα μπαίνει για ***διερεύνηση*** *στο σπίτι: το ερώτημα είναι* ***ποιος είναι ο προηγούμενος του α;***

82 [αρκετοί μαθητές]: *δε γίνεται να συνεχίσουμε τώρα;*

83 Δ: έχουμε ξεφύγει αρκετά από το χρόνο, ήταν ενδιαφέρουσα η συζήτηση ... κάτι άλλο που είχα ... δε θα το προλάβουμε ... θα το εξετάσουμε όμως την άλλη φορά

Ενώ το ερώτημα του μαθητή μετατίθεται από το δάσκαλο ως εργασία στο σπίτι (δεν απαντάει γρήγορα ο ίδιος ο δάσκαλος, γιατί έτσι θα ακύρωνε όλη τη φιλοσοφία του διδακτικού μοντέλου που αναπτύξαμε, παρόλο που μερικές φορές μπορεί να βρεθεί σ' αυτή στη θέση να γίνει πιο παραδοσιακός) παρατηρούμε ότι οι μαθητές ενδιαφέρονται να συνεχίσουν την διερεύνηση του προβλήματος, δείχνοντας έτσι μια αποδοχή του συγκεκριμένου τόπου εργασίας στην τάξη. Παρά την πρόθεση του δασκάλου να ολοκληρώσει το πρόβλημα εδώ, ένα νέο ερώτημα ανατρέπει την κατάσταση και φυσικά ο δάσκαλος δεν μπορεί να το ξεπεράσει χωρίς να το θέσει στην τάξη.

84 ***M12****: να ρωτήσω κάτι άλλο ... σ' αυτή τη σειρά αν συνεχίζαμε θα βρίσκαμε αριθμούς ... εδώ που βάλαμε* ***2·α+1*** *και μετά* ***2·(2·α+1)+1*** *αυτά δεν είναι πολύπλοκα; ... δεν είναι αριθμοί ... είναι πράξεις αριθμών*

85 Δ: θέλει κάποιος να απαντήσει στο ερώτημα του συμμαθητή σας;

87 ***M21****: δεν είμαι σίγουρος, αλλά αυτές οι πράξεις δίνουν ένα αποτέλεσμα ... ένα αριθμό, δηλαδή και πάλι ένα αριθμός θα είναι*

88 ***M12****: και γιατί δεν γράφονται σαν αριθμός;*

89 ***M21****: γιατί δεν ξέρουμε τον α ... αν τον ξέραμε π χ αν ήταν ο 50 ξέρω γω τότε θα ήταν 2·50+1 = 100+1, 101 και ο άλλος 2 φορές το 101 συν 1*

Ο μαθητής έθιξε ένα πολύ σοβαρό ζήτημα στη μάθηση της άλγεβρας: τον χειρισμό μιας αλγεβρικής παράστασης σαν μαθηματικό αντικείμενο. Ένα σημαντικό ζήτημα στην άλγεβρα είναι να μπορεί ο μαθητής να δει μια παράσταση και σαν μια διαδικασία και σαν το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας. Ο συγκεκριμένος μαθητής φαίνεται ότι δεν το έχει κατακτήσει ακόμα αυτό το στάδιο. Βλέπει μόνο τη διαδικασία σε αντίθεση με τον συμμαθητή του που φαίνεται να το κατανοεί σε μεγαλύτερο βαθμό. Μια απάντηση σ' αυτό προσπαθεί να δώσει άλλος μαθητής όπως φαίνεται παρακάτω:

91 ***M22****: δεν θα μπορούσαμε αφού δεν ξέρουμε ακριβώς ποιος είναι ο 2·α+1 και αφού θα είναι ένας αριθμός να τον συμβολίσουμε με β π χ και αυτόν* [δείχνει τον 2·(2·α+1)+1] *με γ* [και σημειώνει στην ακολουθία 2·α+1=β και 2·(2·α+1)+1=γ].

92 Δ: ο συμμαθητής σας λέει να τα συμβολίσουμε έτσι; συμφωνείτε ότι μ' αυτό;

93 ***M15**: γιατί το κάνουμε αυτό ... κι αν το κάνω αυτό μπορώ να βάλω ότι γράμμα*

94 ***M22**: νομίζω ναι*

95 ***M7**: μια ερώτηση δεν ξέρω αν είναι σωστή ... δηλαδή ο επόμενος θα είναι ο δ;*

96 *Δ: καταλάβατε τι ρωτάει ο συμμαθητής σας;*

97 ***Μ**: ...*

98: *Δ: λοιπόν νομίζω ότι θεωρείς τα γράμματα με τη σειρά της αλφαβήτου που είπε ο συμμαθητής σου σαν τους διαδοχικούς αριθμούς της ακολουθίας;*

99 ***M7**: κάτι τέτοιο*

100 ***M22**: όχι μπορούμε να βάλουμε ότι γράμμα θέλουμε*

101 *Δ: έτσι είναι, τα γράμματα είναι σύμβολα, συμβολίζουν αριθμούς, δεν έχουν σχέση με τη σειρά τους στην αλφάβητο*

103 ***M7**: γιατί να βάλουμε το β και το γ εδώ και να μην το αφήσουμε έτσι;*

104 *Δ: μπορεί να απαντήσει κάποιος στο ερώτημα αυτό;*

105 ***M22**: ...για διευκόλυνση*

106 *Δ: εντάξει ... θα προσπαθήσω να δώσω και μια εξήγηση ... εδώ στην ακολουθία τι κάναμε για να βρούμε τον επόμενο του 31 σύμφωνα με τον κανόνα μας;*

107 ***M11**: πολλαπλασιάζω με το 2 και προσθέτω 1 δηλαδή ...63*

108 *Δ: ακριβώς, συγκεκριμένα 2·31+1 αυτή είναι η διαδικασία, δεν μοιάζει με το 2·α+1 όπου στη θέση του α θέσαμε το 31; ... λοιπόν το 2·31+1=63 δηλαδή το 63 είναι ένα σύμβολο που δείχνει το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας ... έτσι και εδώ το 2·α+1 έχει κάποιο αποτέλεσμα που μπορεί να συμβολιστεί με κάτι ... ας πούμε το β, το ξέρουμε ποιο ακριβώς είναι το β;*

109 ***M15**: όχι*

110 *Δ: γιατί;*

111 ***M4**: γιατί δεν ξέρουμε το α*

112 *Δ: καθώς μεταβάλλεται λοιπόν το α τι άλλο μεταβάλλεται;*

113 ***M13**: το αποτέλεσμα ... το β δηλαδή*

114 *Δ: εδώ στο 2·α+1=β έχουμε λοιπόν δύο μεταβλητές τις α και β ... ποια εξαρτάται από την άλλη;*

115 ***Μ*** [αρκετοί μαθητές] *το β από το α*

Το τελευταίο επεισόδιο του μαθήματος για το *αν* και *γιατί* μπορούμε να συμβολίσουμε μια παράσταση με ένα άλλο γράμμα, ανέδειξε το συναρτησιακό χαρακτήρα της αλγεβρικής παράστασης αφού *για κάθε τιμή της μεταβλητής α έχουμε ένα διαφορετικό αποτέλεσμα που το συμβολίζουμε με το β* και αναγνωρίστηκε το α σαν ανεξάρτητη και το β σαν εξαρτημένη μεταβλητή. Η συζήτηση αποτέλεσε ένα ουσιαστικό μέρος της μαθησιακής διαδικασίας, όπου η γνώση ήταν στοιχείο διαπραγμάτευσης όλης της τάξης.

Το μάθημα ολοκληρώνεται με ανακεφαλαίωση από το δάσκαλο και με το ερώτημα προς διερεύνηση στο σπίτι, που είχε θέσει ένας μαθητής:

«*στην ακολουθία 1, 3, 7, 15, 31, ..., α, 2·α+1, 2·(2·α+1)+1,* **... ποιος είναι ο προηγούμενος του α;»**

2ο μάθημα

Καταγραφή στοιχείων από τη διαπαραγμάτευση στην τάξη

Εξετάζεται το προηγούμενο ερώτημα και μια νέα ενδιαφέρουσα συζήτηση αναπτύσσεται.

118 Δ: εντάξει ... ποιος θα μας πει πως εργάστηκε

119 ***Μ17****: λοιπόν είδα πρώτα τους αριθμούς ... το 1, 3, 7, 15, 31 και σκέφτηκα πως από κάποιον θα βρω όχι τον επόμενό του, αλλά τον προηγούμενό του και είδα ότι π χ για τον προηγούμενο του 15 ότι είναι* ***το μισό*** *... 7,5 ... μετά* ***μείον 0,5*** *και βγαίνει το 7*

120 Δ: αυτό έλεγξες αν γίνεται για όλους τους αριθμούς;

121 ***Μ17****: ναι γίνεται για το 31 π χ είναι ... το μισό του 15,5 μείον 0,5 ... 15, και για τους άλλους γίνεται ... όμως για τον α τι θα πω* ***το μισό του α και μετά μείον 0,5;***

122 ***Μ18****: ναι βγαίνουν όλοι οι αριθμοί, είναι σωστό*

123 Δ: πως θα συμβολίζουμε τώρα τον προηγούμενο του α; ποιος μπορεί να πει;

124 ***Μ****: (αρκετοί μαθητές) α δια 2 μείον 0,5*

125 Δ: δηλαδή να γράψω ***α:2-0,5*** [το γράφει στον πίνακα]

126 ***Μ****: (αρκετοί μαθητές) ναι*

127 ***Μ20****: νομίζω το α:2 θέλει παρένθεση γι' αυτό το έγραψα αλλιώς* $\frac{\alpha}{2}-0{,}5$ *...*

128 ***Μ18****: το ίδιο είναι*

129 Δ: εντάξει ... ίδιο είναι ... για την παρένθεση που είπε ο συμμαθητής σας είναι σωστό;

Υπάρχει διαφωνία για τον αν απαιτείται ή όχι παρένθεση και ένας μαθητής δικαιολογεί τελικά τη άποψή του κλείνοντας τη συζήτηση:

132 ***Μ4****: δεν χρειάζεται γιατί και με παρένθεση και χωρίς παρένθεση προηγείται η διαίρεση*

133 Δ: έχει κάποιος αντίρρηση ... λοιπόν ας ανακεφαλαιώσουμε ... έχουμε δύο παραστάσεις που δίνουν τον προηγούμενο του α τις α:2-0,5 και $\frac{\alpha}{2}-0{,}5$ *... μήπως έχουμε και μια λίγο διαφορετική ... ως προς το γράψιμο ...*

134 ***Μ10****: δεν μπορούμε να το γράψουμε και* $\frac{\alpha-0{,}5}{2}$*;*

135 Δ: τι λέτε; Έχει δίκιο ο συμμαθητή σας; Είναι το ίδιο με τα προηγούμενα;

Υπάρχει διαφωνία, μερικοί θεωρούν ότι είναι ίδιο με τα προηγούμενα, άλλοι όχι.

138 ***Μ11****: νομίζω είναι ίδιο, δεν είμαι σίγουρος όμως*

*139 **M12**: δεν είναι το ίδιο γιατί ... η προτεραιότητα των πράξεων αλλάζει ... εδώ* [εννοεί την $\frac{\alpha-0{,}5}{2}$] *γίνεται πρώτα η αφαίρεση και μετά η διαίρεση, ενώ εδώ* [εννοεί την $\frac{\alpha}{2}-0{,}5$] *γίνεται πρώτα η διαίρεση*

*138 **M11**: αφού δεν έχει παρένθεση γιατί γίνεται πρώτα η αφαίρεση;*

Ανοίγει και πάλι το ζήτημα της παρένθεσης, που είχε ανοίξει από τον ίδιο μαθητή στο προηγούμενο μάθημα. Εδώ αναδεικνύονται ζητήματα που για το δάσκαλο είναι τετριμμένα, αλλά για μερικούς μαθητές δεν είναι καθόλου έτσι. Ο μαθητής αυτός πρέπει να κατανοήσει ότι η παράσταση $\frac{\alpha-0{,}5}{2}$ είναι ισοδύναμη με την (α-0,5):2 και όχι με τις $\frac{1}{2}$α-0,5 ή $\frac{\alpha}{2}-0{,}5$. Μετά από τη συζήτηση για τις παρενθέσεις το θέμα επανέρχεται στο ερώτημα του δασκάλου [133] και σε ένα «άλλο» τρόπο αντιμετώπισης που προτείνει ένας μαθητής.

*144 **M9**: νομίζω ότι μπορεί να γραφτεί $\frac{1}{2}$α-0,5 γιατί το $\frac{\alpha}{2}$ είναι ίδιο με το $\frac{1}{2}$*α

*145 **M20**: εγώ το βρήκα αλλιώς ... **πρώτα αφαίρεσα και μετά διαίρεσα***

146 Δ: για πες τι ακριβώς σκέφτηκες

*147 **M20**: έκανα τις αντίστροφες πράξεις που κάναμε στην αρχή για να βρούμε τον επόμενο ενός όρου ... δηλαδή εκεί διπλασιάσαμε και προσθέσαμε ένα, τώρα που θέλουμε τον προηγούμενο **αφαιρούμε ένα και διαιρούμε δια δύο***

148 Δ: συμφωνείτε με το συμμαθητή σας; ... Δοκιμάστε για να δείτε αν από ένα αριθμό βγαίνει ο προηγούμενός του με τη διαδικασία που είπε ... αφαιρούμε ένα και διαιρούμε δια δύο

*149 **M:*** [πολλοί μαθητές δοκιμάζουν] *ναι βγαίνει*

150 Δ: χρησιμοποιώντας συμβολισμό, ποιος είναι ο προηγούμενος του α;

*151 **M5**: ο α-1:2* [με προτροπή του Δ, το γράφει στον πίνακα]

*152 **M10**: θέλει παρένθεση γιατί πρέπει πρώτα να γίνει η αφαίρεση* [διορθώνει σε **(α-1):2**]

153 Δ: αν δεν έχετε κάποια ερώτηση ... εντάξει ... πως μπορώ να το γράψω αυτό λίγο διαφορετικά; Κάτι που είδαμε και προηγουμένως

*154 **M2**: σαν κλάσμα ... α-1 δεύτερα* [γράφει $\frac{\alpha-1}{2}$]

*155 Δ: εντάξει ... είδαμε λοιπόν δύο διαφορετικές διαδικασίες κάτι σαν δύο κανόνες, δύο παραστάσεις που δίνουν τον προηγούμενο όρο του α: πρώτα την **διαιρώ δια 2 και αφαιρώ 0,5** και την **αφαιρώ 1 και διαιρώ δια 2** και με χρήση συμβόλων $\frac{\alpha}{2}-0{,}5$ και $\frac{\alpha-1}{2}$... Λοιπόν γράφω τις δυνατές παραστάσεις με τον 1^o τρόπο που είπαμε και τις δυνατές με τον 2^o τρόπο*

Διαδικασία/Κανόνας	1ος τρόπος	2ος τρόπος
Με λόγια	***διαιρώ δια 2 και αφαιρώ 0,5***	***αφαιρώ 1 και διαιρώ δια 2***
Με συμβολισμό	α:2-0,5 ή $\frac{\alpha}{2}-0{,}5$ ή $\frac{1}{2}$α-0,5	(α-1):2 ή $\frac{\alpha-1}{2}$ ή $\frac{1}{2}$(α-1)

... Μπορείτε να σκεφθείτε γιατί όλες είναι μεταξύ τους ισοδύναμες;

Η συζήτηση με την τάξη ολοκληρώνεται με διάφορες απόψεις για την ισοδυναμία των δύο τρόπων όχι χωρίς δυσκολία. Τελικά η πιο σαφής εξήγηση δίνεται από ένα μαθητή με χρήση της επιμεριστικής ιδιότητας στην παράσταση $\frac{1}{2}$(α-1).

161 ***Μ7****: με πράξεις στην παράσταση* $\frac{1}{2}$*(α-1)* [γράφει: $\frac{1}{2}$(α-1)=$\frac{1}{2}$α-$\frac{1}{2}$=$\frac{1}{2}$α-0,5] *που είναι ίδιο με το προηγούμενο...*

165 Δ: *λοιπόν παιδιά τώρα θα ασχοληθούμε με ένα άλλο πρόβλημα που δεν προλάβαμε να κάνουμε την προηγούμενη ώρα, είναι αυτό που έχετε στο φύλλο εργασίας με τίτλο «τα χρώματα», κάπου μοιάζει, κάπου διαφέρει από τα πρηγούμενα, διαβάστε το, ασχοληθείτε λίγη ώρα και μετά το βλέπουμε όλοι μαζί, αν θέλετε διευκρινίσεις ρωτήστε με …*

Πρόβλημα 2 (λεκτικό pattern)

Στην επόμενη διαδοχή λέξεων: **ΠΡΑΣΙΝΟ**, **ΚΟΚΚΙΝΟ**, **ΜΠΛΕ**, **ΠΡΑΣΙΝΟ**, **ΚΟΚΚΙΝΟ**, **ΜΠΛΕ**, …

Ποια είναι η 10η λέξη της σειράς; ποια είναι η 500η λέξη;

Συνοπτική περιγραφή από τη διαπραγμάτευση στην τάξη

Οι μαθητές για την εύρεση του 10ου όρου της ακολουθίας έγραψαν απλώς τις λέξεις επαναλαμβάνοντας το pattern, αλλά όταν έπρεπε να βρουν την 500η λέξη κατάλαβαν ότι έπρεπε να βρουν ένα κανόνα. Άρχισαν να παρατηρούν και να διατυπώνουν άτυπους κανόνες, χωρίς να καταφέρουν να γενικεύσουν και να απαντήσουν στο ερώτημα, όπως: «*ένα χρώμα επαναλαμβάνεται μετά από δύο άλλα*» ή «*δημιουργούνται τριάδες κάθε φορά*» ή «*για να πάμε από ένα χρώμα σε ένα άλλο ίδιο θέλουμε 3*». Ο δάσκαλος παρεμβαίνει και τους λέει να συμπληρωσουν ένα πίνακα σαν τον παρακάτω.

ΠΡΑΣΙΝΟ	**ΚΟΚΚΙΝΟ**	**ΜΠΛΕ**	**ΠΡΑΣΙΝΟ**	**ΚΟΚΚΙΝΟ**	**ΜΠΛΕ**	**ΠΡΑΣΙΝΟ**	**ΚΟΚΚΙΝΟ**	**ΜΠΛΑΕ**	**...**	**?**
1	***2***	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**...**	**500**

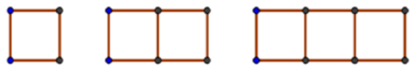
Συμπληρώνουν μέχρι το 9 και παρατηρούν ότι «*στο μπλε βγαίνουν οι αριθμοί 3, 6, 9*». Με τις ερωτήσεις του δασκάλου καταλαβαίνουν ότι οι επόμενοι αριθμοί είναι: «*12, 15, 18, 21, …*», δηλαδή «*πολλαπλάσια του 3*». Άρα «*στα πολλαπλάσια του 3 θα είναι μπλε … πριν θα είναι κόκκινο και μετά περάσινο*». «Το 500 είναι πολλαπλάσιο του

3;», το εξετάζουν με το κριτήριο διαιρετότητας και καταλήγουν «*όχι ... το 499, ... κι αυτό δεν είναι*», «*το 501 ... ναι είναι*», «*άρα το 501 είναι μπλε, συνεπώς το προηγούμενο, το 500, θα είναι κόκκινο*». Στη συζήτηση οι μαθητές κατάλαβαν πόσο χρήσιμη καθοριστική ήταν και η καταγραφή των στοιχείων σε πίνακα: «*χωρίς τον πίνακα νομίζω δεν θα μπορούσαμε εύκολα να δούμε πως επαναλαμβάνονται οι αριθμοί και οι λέξεις ... αλλά αν δεν μας το λέγατε πως θα το σκεφτόμαστε*». Ο δάσκαλος επισημαίνει ότι «*δεν είναι δυνατόν όλα να ανακαλύπτονται, αλλά απαιτούνται κάποιες κατευθύνσεις και οδηγίες για την ανάπτυξη στρτηγικών από μένα, αλλά τώρα είδατε την αξία του πίνακα, ας το έχετε υπόψη σας σε παρόμοια προβλήματα*».

3ο μάθημα

Η τάξη διαπραγματεύεται το παρακάτω πρόβλημα, που είναι ένα γεωμετρικό pattern (Δραστηριότητα ΑΔ1 από το ΠΣ, σελ. 46), με ΠΜΑ Α1, Α2, Α3

Πρόβλημα 3: Τα σπίρτα

ΑΔ1	Χρησιμοποιώντας σπίρτα κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο (1ο σχήμα) και κατόπιν προσθέτουμε δίπλα του άλλο ένα τετράγωνο (2ο σχήμα), κι άλλο ένα τετράγωνο (3ο σχήμα), κοκ  α) Να βρείτε πόσα σπίρτα χρειάζονται για 4 τετράγωνα, για 10 τετράγωνα, για 57 τετράγωνα β) Να παραστήσετε τα ζεύγη (αριθμός τετραγώνων, αριθμός σπίρτων) σε ένα σύστημα αξόνων.	**Α1, Α2, Α3**

Συνοπτική περιγραφή από τη διαπραγμάτευση στην τάξη

Οι μαθητές εργάζονταν σε μικρές ομάδες. Για τα 4 τετράγωνα όλοι εύκολα με συμπλήρωση του 3ου σχήματος και μέτρηση των σπίρτων βρήκαν 10. Για τα 10 τετράγωνα άρχισαν να συμπληρώνουν το νέο σχήμα μέχρι να προκύψουν 10 τετράγωνα. Με το ερώτημα του δασκάλου: «*με τα 57 το ίδιο θα κάνετε; Θα κατασκευάσετε 57 τετράγωνα; Μήπως μπορείτε να σκεφθείτε μια στρατηγική που είδαμε σε προηγούμενο πρόβλημα;*», άρχισαν να συνειδητοποιούν ότι απαιτείται μία άλλη στρατηγική. Κάποιοι θυμήθηκαν τον πίνακα και τελικά οδηγήθηκαν στην κατασκευή του παρακάτω πίνακα, που συμπλήρωσαν οι περισσότεροι χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία, απαρατηρώντας ότι «*για κάθε νέο σχήμα προσθέτουμε 3 σπίρτα στο προηγούμενο*».

Σειρά	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Σπίρτα	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

Για τα 57 άρχισαν οι δυσκολίες. Κάποιος μαθητής είχε μια ιδέα που στηρίζονταν στα ανάλογα ποσά:

Μ: *αφού για τα 6 θέλουμε 19 για τα 60 θέλουμε 190, έχουμε 3 λιγότερα, άρα θα βγάλουμε 9 σπίρτα, τρία για καθένα από τα επιπλέον, δηλαδή 181*

Δ: *Είναι λίγο πολύπλοκο, στην αρχή χρησιμοποιείς ανάλογα ποσά, έτσι δεν είναι; … και μετά αφαιρείς για καθένα 3; Τι λέτε; Είναι σωστό; Πώς θα το εξετάσουμε;*

Επειδή οι μαθητές δυσκλεύονται ο δάσκαλος τους έθεσε το εξής ερώτημα επιχειρώντας να δημιουργήσει μια γνωστική σύγκρουση:

Δ: *αν ο κανόνας είναι σωστός τότε, θα πρέπει να ισχύει και για άλλα τετράγωνα. Πχ αφού τα 7 τεράγωνα θέλουν 22 σπίρτα, τα 14 τετράγωνα θα θέλουν 44. Για τα 11 τετράγωνα που ε'ιναι τρία λιγότερα από τα 14 πρέπει όπως και πριν να αφαιρέσουμε 9 σπίρτα, έτσι δεν είναι; Πόσα λοιπόν θα έχουν τα 11 τετράγωνα;*

Μ (αρκετοί μαθητές): *44-9=35*

Δ: *δοκιμάστε να συνεχίσετε τον πίνακα, μετά τα 10 τετράγωνα που θέλουν 31 σπίρτα τα 11 τετράγωνα πόσα θα θέλουν;*

Μ (αρκετοί μαθητές): *34*

Δ: *συνεπώς ο κανόνας έρχεται σε αντίθεση με αυτά που μετράμε … άρα το συμπέρασμα;*

Μ: *δεν ισχύει ο κανόνας …*

Η παρατήρηση «προσθέτω 3» δεν μπόρεσε να οδηγήσει σε κανόνα από μόνη της. Απαιτήθηκε συζήτηση με ολόκληρη την τάξη για το τι σημαίνει *κανόνας* (: *παράγει κάθε ζεύγος και όχι μόνο ένα ή δύο*) για την εύρεση κάποιου όρου. Μετά από αρκετή ώρα και εκτενή διερεύνηση δύο ομάδες κατέληξαν στους εξής κανόνες:

Μ: ***για ένα σχήμα ο αριθμός των σπίρτων είναι 3×(τετράγωνα σχήματος)+1***

Μ: ***4 σπίρτα το πρώτο+(αριθμός τετραγώνων – 1)·3***

Δ: *ελέγξτε όλοι αν οι κανόνες εφαρμόζονται για όλα τα σχήματα που έχουμε*

Διαπιστώνουν ότι πράγματι ισχύουν και οι δύο κανόνες. Απαντούν ότι για 57 τετράγωνα απαιτούνται 3·57+1=172 ή 4+(57-1)·3=172. Τότε ο δάσκαλος τους προτρέπει:

Δ: *αν* ***συμβολίσουμε*** *με* **x** *τον* ***αριθμό των τετραγώνων*** *που έχει το σχήμα, προσπαθήστε τους προηγούμενους κανόνες να τους γράψετε με σύμβολα, με πιο μαθηματικό τρόπο*

Πράγματι καταφέρνουν και γράφουν με δύο αλγεβρικές παραστάσεις τους κανόνες που βρήκαν: **3*x*+1** και **4+(*x*-1)·3**. Εδώ προέκυψαν με φυσικό τρόπο ερωτήματα όπως:

Μ: *γιατί κάνουν και οι 2 κανόνες γι αυτό το παιγνίδι;*

Δ: *μήπως είναι «ίδιοι;»*

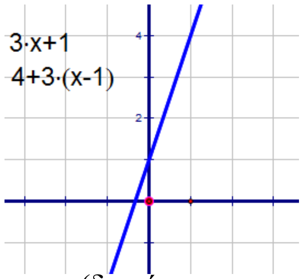
Μ: *πως και γιατί είναι ίδιοι;*

Δ: *μπορώ να πάω από τη μια μορφή στην άλλη;*

Το τελευταίο ερώτημα είναι ισοδύναμο με το πιο τυπικό:

Δ: *πως μπορώ να δικαιολογήσω την ισοδυναμία των δύο παραστάσεων;*

Η απλοποίηση των αλγεβρικών παραστάσεων για να φανεί η ισοδυναμία τους δεν ήταν μια εύκολη δραστηριότητα για την τάξη αυτή. Ήταν μια δομική δραστηριότητα που κυρίως είναι θέμα διαπραγμάτευσης στη Β τάξη. Στο τέλος του μαθήματος ο δάσκαλος τους προέτρψε να αναπαραστήσουν τα ζεύγη του πίνακα με σημεία σε ένα σύστημα ημιαξόνων (ΠΜΑ Α3). Οι μαθητές εργάστηκαν σε χαρτί μελιμετρέ και κατόπιν ο δάσκαλος με βιντεοπροβολέα πρόβαλλε τις γραφικές παραστάσεις και των δύο αλγεβρικών παραστάσεων που κατασκευάστηκαν με μαθηματικό



λογισμικό και διαπλιστωσαν ότι και οι δύο ευθείες συμπίπτουν (διαπίστωση της ισοδυναμίας των παραστάσεων με γραφικό τρόπο).