Από τα Πρακτικά του 2ου Διημέρου Διαλόγου για τη διδασκαλία των Μαθηματικών, 15-16 Μαρτίου 2003

Το ατελές επιχείρημα
Δυσκολίες των σημερινών φοιτητών-αυριανών δασκάλων των Μαθηματικών στη διατύπωση εξηγήσεων απέναντι σ' έναν υποθετικό μαθητή

Μαρία Μπεμπόνη & Τάσος Πατρώνης

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Πατρών

1. Εισαγωγή

Καθ' όλη τη διάρκεια της εκπαιδευτικής τους δραστηριότητας οι καθηγητές των Μαθηματικών, μεταξύ άλλων,αγωνίζονται και προσδοκούν οι μαθητές τους να καταστούν ικανοί να παρουσιάσουν μέσα στην τάξη σε προφορική ή γραπτή μορφή,ένα μαθηματικό επιχείρημα ή μια ολοκληρωμένη απόδειξη όσων ζητούνται ή ακόμα και όσων διατυπώνονται από τους ίδιους τους μαθητές.

Το επιχείρημα ή η απόδειξη μπορεί να αναφέρεται σε ένα θεώρημα-κάτι που ήδη έχει αποδειχτεί από άλλους-ή σε ένα πρόβλημα που αναζητά τη λύση του(«a problem to prove» κατά τον Polya,(1957).

Τις περισσότερες φορές το πρόβλημα προς λύση παρουσιάζεται με τη μορφή: «Να δειχθεί ότι..........» - δηλαδή το πρόβλημα έχει ήδη λυθεί στο παρελθόν, άρα δεν είναι πρόβλημα, απλά χρησιμεύει για εξάσκηση.

Κάποιες άλλες φορές δίνεται με τη μορφή ανοιχτού προβλήματος: «Να βρεθεί σημείο.....» ή «Να κατασκευασθεί......» ή «να βρεθεί το άθροισμα ....», κατάσταση που απαιτεί εξερεύνηση,διατύπωση εικασιών και τον έλεγχό τους,τη δικαιολόγησή ή την απόδειξή τους.

Πολύ συχνά ωστόσο οι καθηγητές των Μαθηματικών βρίσκονται αντιμέτωποι με τη δυσκολία των μαθητών να κατασκευάσουν μια απόδειξη των όσων ζητήθηκαν ή να εκθέσουν τα όποια επιχειρήματά τους έτσι ώστε να βασίζονται σε μια θεωρία ή σε σχέδια,μετρήσεις,επινοήσεις ή οτιδήποτε θα μπορούσε να αποτελέσει τεκμήριο.

Αυστηρή ή όχι,τυπική,λιγότερο τυπική ή εμπειρική η απόδειξη,τα τελευταία χρόνια έχει δεχτεί μια ολοένα και αυξανόμενη προσοχή των καθηγητών των Μαθηματικών,καθώς και των ερευνητών στο χώρο της Μαθηματικής Παιδείας.(Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εξής εργασίες:

Markel, 1994; Moore, 1994; Battista, 1996; Reid, 1999; Hanna, 1989; Otte, 1990; Hanna, 1996; Balacheff, 1987; Almeida, 1996; Fischbein, 1982; Knuth, 2002; Yackel E. & Cobb P., 1996; Yackel, 2001; Reid, 2002; Douek, 1999; Ancel Recio & Juan Godino, 2001; Simon and Blume 1996;).

Άλλη ένδειξη για το μεγάλο ενδιαφέρον επάνω στο πρόβλημα της διδασκαλίας και μάθησης της αποδεικτικής διαδικασίας είναι η ηλεκτρονική εφημερίδα που εκδόθηκε από την M:A:Mariotti(htpp//:www-didactique.imag.preuve)

Τα ερωτήματα είναι πολλά.Θα μπορούσαμε να αναφέρουμε κάποια κοινά,πιθανόν σε όλους μας:

- Τι συνιστά *επιχειρηματολογία* στα Μαθηματικά και πως αυτή συνδέεται με την απόδειξη;
- Υπάρχουν επίπεδα απόδειξης στα Μαθηματικά;
- Κατά πόσο συνιστούν επιχειρηματολογία οι εξηγήσεις και οι αιτιολογήσεις των δασκάλων και των μαθητών στη τάξη,προκειμένου να πείσουν τους συνομιλητές τους;

Αυτά και άλλα ερωτήματα μας οδήγησαν να διεξαγάγουμε και εμείς μια έρευνα γύρω από τις δυσκολίες των φοιτητών - αυριανών δασκάλων των Μαθηματικών να αποδεικνύουν καθώς και να εξηγούν,να διευκρινίζουν «σκοτεινές» όψεις που αναδεικνύονται στα προβλήματα όντας αντιμέτωποι με έναν υποθετικό μαθητή,μια και όλα τα ανωτέρω θα αποτελέσουν στο μέλλον τους κύριους στόχους της διδασκαλίας τους. Επίσης προσπαθούμε να ανιχνεύσουμε πόσο βοηθά στην εξήγηση ενός μαθηματικού ισχυρισμού η απομάκρυνση από το αρχικό πλαίσιο του προβλήματος και η *αναπλασίωση* του σε ένα νέο πλαίσιο(καθημερινή ζωή, γεωμετρικά μοντέλα, κ.λπ.). Για την ανάλυση -a posteriori- των ευρημάτων μας και την ταξινόμησή τους ως επιχειρήματα ή όχι χρησιμοποιήσαμε το σχήμα του επιστημολόγου Toulmin που εισάγεται κατά μοναδικό τρόπο στο βιβλίο του *The uses of argument*, 1958.

Στο παρόν άρθρο θα αναλύσουμε ορισμένα είδη μαθηματικής επιχειρηματολογίας ως αλυσίδες επιχειρημάτων που έχουν την τριαδική δομή του σχήματος Toulmin: *Δεδομένα-Εγγύηση-Συμπέρασμα(Δ-Ε-Σ)*, και με βάση αυτό το θεωρητικό εργαλείο θα αναλύσουμε τις παραγωγές των φοιτητών που έλαβαν μέρος στην έρευνα και θα καθορίσουμε τι συνιστά ένα ατελές επιχείρημα.

2. Έννοιες σχετικές με την Επιχειρηματολογία στα Μαθηματικά

Η Αθηναϊκή Δημοκρατία του 5ου αιώνα π.Χ χαρακτηρίζεται ως ένα σημαντικό βαθμό από το *ρητορικό λόγο* και το επιχείρημα, καθώς η πειθώ και η απόσπαση της συναίνεσης αντικαθιστά την αυθαίρετη επιβολή της γνώμης του ενός πάνω στους άλλους. Στη «Ρητορική» του, ο Αριστοτέλης περιέγραψε τη ρητορική τέχνη ως την «τέχνη του να ανακαλύπτεις αυτό που σε κάθε περίπτωση είναι κατάλληλο για να πείσει» (*Ρητορική Ι*, 1355b, 25) η οποία απευθύνεται σε ένα ακροατήριο μεγάλο και μάλλον χωρίς ικανότητα να απαντήσει στα επιχειρήματα. Η τεχνική της εδώ συνίσταται στο να φαίνεται κάτι αληθινό, όχι να είναι. Ο σκοπός είναι να βρεις τι είναι ικανό να πείσει χωρίς να ξεκινάς αναγκαία από αληθή σημεία ούτε να καταλήγεις σε αληθή συμπεράσματα.

Πέρα από τη Ρητορική, η Διαλεκτική *(Όργανον, Τοπικά)* απευθύνεται σε ένα συνομιλητή που μπορεί να αντιδράσει ή καλύτερα να αμφισβητήσει τα επιχειρήματα αυτού που επιχειρηματολογεί και που νομίζει ότι ξεκινά από αληθείς προτάσεις.

Η μέθοδος της ρητορικής, ο τρόπος δηλ. απόδειξης-πραγματικής ή φαινομενικής - είναι όπως και της διαλεκτικής,η «επαγωγή» και ο «συλλογισμός». Την πρώτη ονομάζει «παράδειγμα» και το δεύτερο «ενθύμημα». Τα πρώτα αποτελούν γενική αλήθεια παραγόμενη από πολλά όμοια συμβάντα,τα δεύτερα είναι γενική κρίση παραγόμενη από άλλες κρίσεις.Μεταξύ των δύο σημαντικότερα είναι τα *ενθυμήματα* τα οποία προέρχονται εξ εικότων και σημείων (από πιθανότητες και ενδείξεις).

Το *εικός* - πιθανόν - αντιπροσωπεύει το «ως επί το πλείστον». Η ένδειξη είναι λιγότερο από απόδειξη και περισσότερο από εικασία, όταν δεν μπορεί να ανατραπεί ονομάζεται «τεκμήριο» και ισοδυναμεί με απόδειξη.

Εκτός από τη Ρητορική και τη Διαλεκτική, ο Αριστοτέλης ασχολείται και με την Αναλυτική-λογική επιχειρηματολογία- *(Όργανον, Αναλυτικά Ύστερα)*, η οποία βασίζεται στον επιστημονικό ορθολογισμό που οφείλει να σχηματίζει ορθούς συλλογισμούς και δεν απευθύνεται κατ' ανάγκη σε κάποιο κοινό, είναι ένα «όργανον».

Στη σύγχρονη εποχή,τώρα,σύμφωνα με τον Toulmin(1958) η Επιχειρηματολογία συνδέται με τον συλλογισμό κι έτσι με την επιστήμη που ασχολείται με αυτόν: τη λογική. Είναι μέρος της λογικής. Η θεωρία της επιχειρηματολογίας είναι ένα είδος ανανέωσης της λογικής.

Όπως θα δούμε πιο κάτω ο Toulmin προσδιορίζει τη δομή οποιουδήποτε επιχειρήματος.

Ακολουθώντας τον Perelman, κάποιος μπορεί να θεωρήσει ότι το επιχείρημα χαρακτηρίζεται λιγότερο από τη γνώση του αντικειμένου του και περισσότερο από τον ακροατή.

Η θεωρία της ρητορικής, των Perelman και Olbrechts-Tyteca, το πιο σπουδαίο έργο των οποίων είναι *La nouvelle rhétorique: traité de l' argumentation,* 1958, είναι μια θεωρία επιχειρηματολογίας. Η επιχειρηματολογία για αυτούς είναι διαφορετική από την απόδειξη και την τυπική λογική. Η επιχειρηματολογία είναι «...προσωπικού χαρακτήρα γιατί ξεκινά με προτάσεις που το ακροατήριο δέχεται, είναι προσωποκεντρική δραστηριότητα» ενώ «η απόδειξη χρησιμοποιεί τη Μαθηματική γλώσσα και εμπλέκει υπολογισμούς σύμφωνα με κανόνες αποδεκτούς από την τυπική, παραγωγική λογική και είναι απρόσωπη» (σ. 4).

Οι Perelman και Olbrechts-Tyteca εστιάζουν στη κεντρική έννοια του ακροατηρίου τη διάκριση μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης. Ορίζουν ως ακροατήριο «το σύνολο εκείνων τους οποίους εύχεται ο ομιλητής να επηρεάσει με την επιχειρηματολογία του» (σ. 19).

Το παγκόσμιο ακροατήριο αποτελείται από τους λογικούς και έχοντες τα προσόντα ανθρώπους (competent) είναι μια διανοητική σύλληψη που κατασκευάζει ο ομιλητής και δεν είναι απαραίτητη η φυσική του παρουσία.

Από την πλευρά του ο Balacheff (1987) θεωρεί ότι η απόδειξη είναι μια μορφή *τεκμηρίωσης (preuve)* ανάμεσα σε άλλες, όπου *τεκμηρίωση* είναι: «μια εξήγηση αποδεκτή από μια κοινότητα σε μια δοθείσα στιγμή: αυτή η απόφαση της αποδοχής της εξήγησης, μπορεί να είναι το

αντικείμενο μιας συζήτησης, της οποίας η σημασία είναι η απαίτηση να καθοριστεί ένα σύστημα εγκυρότητας ανάμεσα στους συνομιλητές». Αλλά «στους κόλπους της μαθηματικής κοινότητας δεν μπορούν να γίνουν αποδεκτές ως τεκμηριώσεις παρά εκείνες οι εξηγήσεις που θα υιοθετούν μια ειδική φόρμα, ήτοι, μια οργανωμένη σειρά από δηλώσεις που ακολουθούν καθορισμένους κανόνες: μια πρόταση ή δήλωση ή είναι γνωστή ότι είναι αληθής ή παράγεται από αυτές που προηγούνται μέσω ενός κανόνα παραγωγής ο οποίος έχει ληφθεί από ένα σύνολο κανόνων καλά ορισμένο δηλαδή στα πλαίσια ενός θεωρητικού συστήματος. Αυτές τις τεκμηριώσεις τις λέμε αποδείξεις».

Κατά τον Balacheff άλλες μορφές τεκμηρίωσης εκτός από τη μαθηματική απόδειξη είναι: α) *ο απλοϊκός εμπειρισμός(empirisme naïf)* όπου η βεβαιότητα για την αλήθεια έλκεται από μικρό αριθμό παρατηρήσεων) β) *το βασικό πείραμα (expérience cruciale)* που βασίζεται σε πρόκληση συμβάντος και στην επιβεβαίωση «αν αυτό ισχύει,θα ισχύει για κάθε περίπτωση» γ) *το γενεσιουργό παράδειγμα (exemple générique)* εδώ ο ισχυρισμός γίνεται έγκυρος μέσα από την προσκόλληση στον κύριο αντιπρόσωπο μιας οικογένειας, μιας κλάσης αντικειμένων ο οποίος δίνει όλες τις ιδιότητες και τη δομή όλης της οικογένειας) και δ) *το νοητικό πείραμα(expérience mentale)* κατά το οποίο η δράση εσωτερικοποιείται και αποσπάται από την πραγματοποίησή της πάνω σε έναν ειδικό αντιπρόσωπο.

Ο Ducrot(1984) τοποθετεί την επιχειρηματολογία στην καρδιά της γλωσσικής δραστηριότητας. Η ανάλυση των συνδέσμων έχει ιδιαίτερη σημασία για τον Ducrot γιατί, την πληροφορία που περιέχεται σε ένα θέμα την συνδέουν με τον συνολικό επιχειρηματολογικό σκοπό της. Η πολυφωνία των συνδέσμων κάνει δυνατόν να εμφανίζεται στο λόγο,όχι μόνο ο ομιλητής αλλά ο δυνητικός συνομιλητής. «Ρ αλλά Π» δείχνει ένα υποκείμενο που συντάσσεται με τον Ρ στο οποίο ο ομιλητής αντιτάσσει το Π. Για μια κριτική της άποψης του Ducrot βλ. Plantin (1990).

Πολλές φορές στη μαθηματική πρακτική,αλλά και στη τάξη των Μαθηματικών παρατηρούμε να διατυπώνεται μια μαθηματική επιχειρηματολογία διαφορετικού είδους από αυτή της μαθηματικής απόδειξης. Αυτή η επιχειρηματολογία βασίζεται σε αντιλήψεις του ομιλητή ή του συντάκτη ενός κειμένου. Οι αντιλήψεις αυτές μπορεί να είναι, (αλλά όχι απαραίτητα) θεωρία, διαγράμματα, σχήματα κ.λπ. Και να εδραιώνεται μέσα και από μια αποπλαισίωση του ισχυρισμού και επανατοποθέτησή του σ' ένα νέο πιο οικείο αντιληπτικά πλαίσιο. Οι τεκμηριωμένες προτάσεις θεωρούνται έγκυρες από αυτόν που τις κατασκευάζει, μια και κατασκευάζει τεκμήρια στηριζόμενος στις αντιλήψεις του, έως αυτές να τεθούν υπό αμφισβήτηση. Το προϊόν, όμως, της μαθηματικής επιχειρηματολογίας είναι ένας ισχυρισμός που θα μπορούσε να μετατραπεί σε αδιαμφισβήτητο συμπέρασμα μόνο μέσω μιας απόδειξης.

3. Μαθηματική Επιχειρηματολογία και Κοινωνικά Συμφραζόμενα

Έρευνες όπως του Vygotsky(1978), της Donaltson (1978), της Walkerdine (1988), της Lave (1988), της Coquin-Viennot (1988) και πιο πρόσφατα των Yackel και Cobb (1996), έδειξαν ότι η επιχειρηματολογία και γενικότερα η ορθολογική σκέψη αναπτύσσεται μέσα σε ιδιαίτερα *πλαίσια κοινωνικών συμφραζομένων* (social contexts) και μπορεί να διαφέρει σε μορφή και σημασιολογικό περιεχόμενο ανάλογα με το πλαίσιο συμφραζομένων στο οποίο εντάσσεται. Ιδιαίτερα οι Voigt (1995), Yackel και Cobb (1996) εισήγαγαν την έννοια της *κοινωνιο-μαθηματικής νόρμας* (socio-mathematical norm), προκειμένου να χαρακτηρίσουν εκείνους τους κανόνες μιας ιδιότυπης κοινωνικής συμπεριφοράς στη τάξη, η οποία συνδέεται με το γεγονός ότι το αντικείμενο της διδασκαλίας είναι τα Μαθηματικά. Έτσι βρέθηκε π.χ. ότι από τάξη σε τάξη (και όχι μόνο για σχολικές τάξεις αλλά και για πανεπιστημιακές τάξεις) διαφέρουν οι αντιλήψεις για το τι συνιστά μια αποδεκτή *εξήγηση* ή *απόδειξη* ή για το *πότε χρειάζεται να δοθεί εξήγηση* ή απόδειξη σε έναν ισχυρισμό ή σεμια μέθοδο που ακολουθεί ο καθηγητής ή οι σπουδαστές.Οι αντιλήψεις αυτές, όμως, που αποτελούν τη λεγόμενη «μαθηματική κουλτούρα της τάξης των Μαθηματικών» (Cobb και Yackel, 1998) δεν έχουν τη σταθερότητα και το κοινωνικό «βάρος» που χαρακτηρίζει τη κουλτούρα ορισμένων κοινωνικών ομάδων και θεσμών, όπως τη περιγράφει η ανθρωπολογική και κοινωνιολογική έρευνα. Μπορεί να διαφέρουν ανάλογα με τις πεποιθήσεις των δασκάλων ή τους περιορισμούς που επιβάλλει το αναλυτικό πρόγραμμα και το εκπαιδευτικό σύστημα, γι'αυτό συνδέονται ίσως περισσότερο με τα πολυδιάστατα και πολυσήμαντα εκείνα φαινόμενα που η Γαλλική Σχολή της Διδακτικής των Μαθηματικών έχει περιγράψει με τη βοήθεια της πολυσυζητημένης έννοιας του *διδακτικού συμβολαίου* (βλ. μια «αιρετική», σχετικά, αντίληψη αυ-

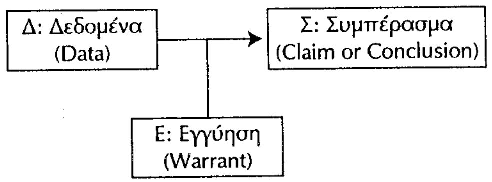
τής της έννοιας στο: Πατρώνης, 1990, καθώς και μια επανατοποθέ· σή της σ' ένα θεωρητικό πλαίσιο του J. Habermas στο: Paulopoulo Patronis, 2002).

4. Ένα εργαλείο ανάλυσης: Το σχήμα Toulmin για το επιχείρημ

Θα λέγαμε ότι υποστηρίζουμε την άποψη ότι η επιχειρηματολο στα Μαθηματικά σημαίνει «πείθω τον συνομιλητή με προσφυγή ‹ λογική», «προσπαθώ να φέρω το συνομιλητή σε θέση να αναγνωρ την αλήθεια ενός ισχυρισμού, μιας διατύπωσης, όπου ο συνομιλη είναι η Μαθηματική κοινότητα, η τάξη των Μαθηματικών, ή ακόμα ο ίδιος ο εαυτός εκείνου που επιχειρηματολογεί». Θα πρόκειται όμ πάντα για ένα ακροατήριο λογικό, που μπορεί να συμφωνεί ή να ‹ φωνεί με εκείνον που επιχειρηματολογεί, σε κάθε περίπτωση, όμ θα μπορεί και θα είναι ελεύθερο να απαντήσει. Για μας, ο σκοπός επιχειρηματολογίας είναι να ανακαλύψει την αλήθεια, μέσα σε ένα ακ ατήριο όπου, έχει γίνει αποδεκτό τι θεωρείται λογικό και που οι γ σεις έχουν αποκτηθεί από κοινού.

Έτσι απομακρυνόμαστε από την Yackel (2001), που αναφερόμ στην εξήγηση και την αιτιολόγηση, τις ορίζει έτσι ώστε να αποσκοπ στην αμοιβαία κατανόηση και συναίνεση χωρίς απαραίτητα να π σφεύγουν στη λογική.

Υιοθετούμε το σχήμα Toulmin για την επιχειρηματολογία,που λ βάνει υπόψη μια δομή αποτελούμενη από τρία στοιχεία: το *Συμπέ σμα ή Ισχυρισμό* (Claim), τα *Δεδομένα* (Data) και την *Εγγύηση* (Warra Το σχήμα αναπαρίσταται ως εξής:

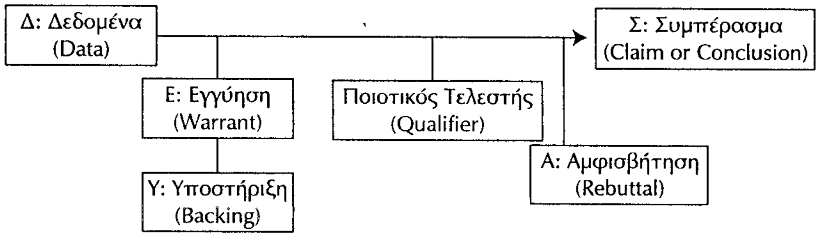


Το *Συμπέρασμα* βασίζεται σε έναν αριθμό *Δεδομένων* που πς χθησαν για να το υποστηρίξουν και είναι το σημείο εκκίνησης κάθε · χειρήματος. Με άλλα λόγια είναι τα συμβάντα που επικαλούμαστε να στηρίξουμε το *Συμπέρασμα*. Αλλά για να περάσουμε από τα *Δι μένα* στο *Συμπέρασμα*, αυτό το πέρασμα νομιμοποιείται από την *γύηση*. Η Εγγύηση εξηγεί γιατί τα Δεδομένα υποστηρίζουν το Συμπέρασμα, παρ' όλο που αυτή μπορεί να είναι και υπονοούμενη. Είναι το μέρος του επιχειρήματος που εδραιώνει το λογικό σύνδεσμο ανάμεσα σε *Δεδομένα* και *Συμπέρασμα* και που μπορεί να αμφισβητηθεί.

Ο επιχειρηματικός λόγος όμως μπορεί να είναι πιο πολύπλοκος και να έχει ανάγκη τριών ακόμα στοιχείων:

Ο *Ποιοτικός Τελεστής* (Qualifier) είναι ένας προσδιορισμός (επίρρημα: όπως, «πιθανόν», «συχνά», «ενδεχομένως»), που μας δείχνει την δύναμη του *Συμπεράσματος*, μια και η Εγγύηση πολλές φορές δεν μας εξουσιοδοτεί να αποδεχτούμε ανεπιφύλακτα το Συμπέρασμα,αλλά είτε διστακτικά, είτε θέτοντάς το ως υποκείμενο σε συνθήκες, εξαιρέσεις, περιορισμούς. Το σχήμα του Toulmin προβλέπει μια θέση για τις συνθήκες *Αμφισβήτησης* (Rebuttal). Αν υπάρχουν εξαιρέσεις του *Ισχυρισμού - Συμπέρασμα*, η ισχύς της *Εγγύησης* αποδυναμώνεται. Οι συνθήκες μέσα στις οποίες ακυρώνεται η εξουσία της Εγγύησης λαμβάνονται υπόψη στην Αμφισβήτηση. Όταν η *Εγγύηση* δεν γίνεται κατανοητή ή αποδεκτή από το ακροατήριο, ο ομιλητής θα πρέπει να υπερασπιστεί την Εγγύηση. Η *Εγγύηση* χρειάζεται για να στηριχθεί, επιπλέον λόγους, διαβεβαιώσεις: την Υποστήριξη(Backing). Η *Υποστήριξη* διαφέρει από την Εγγύηση στο ότι η Εγγύηση είναι μια υποθετική γεφυροποιός δήλωση, μεταξύ δεδομένων και συμπεράσματος, ενώ η Υποστήριξη μπορεί να εκφρασθεί ως κατηγορηματική δήλωση κάποιου συμβάντος.

Έτσι έχουμε το πλήρες σχήμα του Toulmin:



Τα έξι αυτά στοιχεία Δ-Ε-Σ-Π.Τ.-Α-Υ(D-W-C-Q-R-B) είναι κοινά σε οποιοδήποτε πεδίο.Το επιχείρημα μπορεί να αλλάζει από πεδίο σε πεδίο (δίκαιο, πολιτικός λόγος, επιστημονικός λόγος) αλλά η δομή του επιχειρήματος μένει η ίδια.

Πολλές φορές δεν είναι εύκολο να οδηγηθούμε στο συμπέρασμα από τα δεδομένα δηλαδή να προσδιορίσουμε την εγγύηση ή υπάρχει αμφισβήτηση ή μη κατανόηση της εγγύησης και δεν είναι δυνατόν να βρεθεί η υποστήριξη της εγγύησης. Έτσι μπορεί να δεχθεί ο ισχυρισμός μια *αναπλαισίωση*, έτσι ώστε να αποδυναμωθεί η εξαίρεση αν υπάρχει και η εγγύηση να είναι αληθής στο νέο πλαίσιο ή να βρεθεί μια νέα εγγύηση. Έτσι δίνεται μια νέα στήριξη στην εγγύηση ή οδηγούμαστε πιο εύκολα στο συμπέρασμα ενισχύοντάς το, π.χ., με τη βοήθεια μιας ερμηνείας σε γεωμετρικό πλαίσιο. Ωστόσο μπορεί να συμβεί και το αντίθετο. Η αλλαγή πλαισίου να φέρει μια νέα αμφισβήτηση στην εγγύηση οπότε να αποδυναμωθεί η υποστήριξή της και περαιτέρω ο ισχυρισμός.

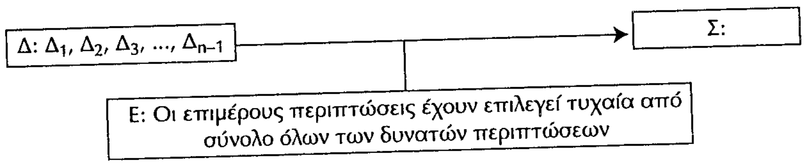
Άλλες φορές πάλι η διατύπωση του ισχυρισμού μας οδηγεί κατ' ευθείαν σε *αναπλαισίωση*, χωρίς αναγκαία να διαπιστώσουμε τις προαναφερόμενες δυσκολίες ή αντιλογίες που τυχόν θα προέκυπταν στο αρχικό πλαίσιο.

Θα δούμε τώρα πώς μπορεί να αναπαρασταθούν, με τη βοήθεια του πιο πάνω σχήματος,τα βήματα διαφόρων ειδών μαθηματικής επιχειρηματολογίας.

Τα είδη που θα μας απασχολήσουν δεν περιλαμβάνουν την τυπική μαθηματική απόδειξη-παρ'όλο που είναι εύκολο να παρασταθεί με το σχήμα Toulmin,καθώς θεωρούμε ότι και αυτή είναι μια ειδική μορφή επιχειρηματολογίας.

4.1. (Ατελής) επαγωγή που γενικεύει κατ' ευθείαν από τα επιμέρους συμπεράσματα («απλοϊκός εμπειρισμός» κατά τον N. Balacheff ή «παράδειγμα» κατά τον Αριστοτέλη)

Το τελευταίο (n-οστό) βήμα της επιχειρηματολογίας μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:



Στην εμπειρική έρευνα τα Δi είναι τα δεδομένα μιας άμεσης εμπειρικής παρατήρησης

Παράδειγμα:

Δ: Παρατήρηση κύκνων σε διάφορες θέσεις (πάρκα, λίμνες, κ.λπ.) στην Ευρώπη.

Ε: Γενίκευση από τα συμπεράσματα-οι επιμέρους περιπτώσεις έχουν επιλεγεί τυχαία από το σύνολο όλων των δυνατών περιπτώσεων

Σ: Όλοι οι κύκνοι είναι λευκοί ή υπόλευκοι.

Στα Μαθηματικά συνήθως τα Δi είναι τα συμπεράσματα Σi, των n-1 προηγουμένων επιχειρημάτων.

Παράδειγμα:

«Όταν πολλαπλασιάζουμε την ακτίνα ενός κύκλου με φυσικό αριθμό, το εμβαδό του κύκλου πολλαπλασιάζεται επί το τετράγωνο του αριθμού»

Δ_1: k = 1, Ε: τύπος εμβαδού κύκλου ($\pi\rho^2$), Σ_1: $\varepsilon\mu\beta_1 = 1^2.\pi\rho^2$

Δ_2: k = 2, E = τύπος εμβαδού κύκλου($\pi\rho^2$), Σ_2: $\varepsilon\mu\beta_2 = \pi(2\rho)^2 = 4\pi\rho^2 = 2^2.\pi\rho^2$

Δ_3: k = 3, E = τύπος εμβαδού κύκλου ($\pi\rho^2$), Σ_3: $\varepsilon\mu\beta_3 = \pi(3\rho)^2 = 9\pi\rho^2 = 3^2.\pi\rho^2$

Έτσι **Δ: Σ_1, Σ_2, $\Sigma_3 \rightarrow$ Σ:** «Όταν πολλαπλασιάζουμε την ακτίνα ενός κύκλου με φυσικό αριθμό, το εμβαδό του κύκλου πολλαπλασιάζεται επί το τετράγωνο του αριθμού»

Τα Σ_1, Σ_2, Σ_3 είναι τα συμπεράσματα των βημάτων που προηγούνται και είναι τα δεδομένα του τελευταίου βήματος, που οδηγεί στην γενική περίπτωση. Η εγγύηση είναι η γενίκευση κατ' ευθείαν από τα επιμέρους συμπεράσματα,μια και οι επιμέρους περιπτώσεις έχουν επιλεγεί τυχαία από το σύνολο όλων των δυνατών περιπτώσεων.

4.2. Επαγωγή που γενικεύει πάνω στη διαδικασία(γενεσιουργό παράδειγμα κατά N. Balacheff)

Το τελευταίο (n-οστό) βήμα της επιχειρηματολογίας μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής:

Δ: $\Sigma_1,\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2,\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3,\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_4,\ldots$ → Σ:

Ε: Η διαδικασία σύνδεσης μεταξύ των επιμέρους συμπερασμάτων είναι κοινή

Παράδειγμα: «Όταν πολλαπλασιάζουμε την ακτίνα ενός κύκλου με φυσικό αριθμό, το εμβαδό του κύκλου πολλαπλασιάζεται επί το τετράγωνο του αριθμού»

Δ_1: k = 1, Ε: τύπος εμβαδού κύκλου ($\pi\rho^2$), Σ_1: $\varepsilon\mu\beta_1 = 1^2.\pi\rho^2$

Δ_2: k = 2, E= τύπος εμβαδού κύκλου ($\pi\rho^2$), Σ_2: $\varepsilon\mu\beta_2 = \pi(2\rho)^2 = 4\pi\rho^2 = 2^2.\pi\rho^2$

Δ_3: k = 3, E = τύπος εμβαδού κύκλου ($\pi\rho^2$), Σ_3: $\varepsilon\mu\beta_3 = \pi(3\rho)^2 = 9\pi\rho^2 = 3^2.\pi\rho^2$

Το επιχείρημα $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ αποτελείται από τα εξής τρία στοιχεία:

Σ_1: k = 1, $\varepsilon\mu\beta_1 = 1^2.\pi\rho^2 \rightarrow \Sigma_2$: $\varepsilon\mu\beta_2 = 2^2.\pi\rho^2$ με Ε: όταν η ακτίνα πολλαπλασιάζεται με το k + 1, η ακτίνα ισούται με (k + 1).ρ, η $(\text{ακτίνα})^2 = [(k+1).\rho])^2 = (k + 1)^2.\rho^2$

Το επιχείρημα $\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$ αποτελείται από τα εξής τρία στοιχεία:

Σ_2: k = 2, $\varepsilon\mu\beta_2 = 2^2.\pi\rho^2 \rightarrow \Sigma_3$: $\varepsilon\mu\beta_3 = 3^2.\pi\rho^2$ με Ε: όταν η ακτίνα πολλαπλασιάζεται με το k + 1, η ακτίνα ισούται με (k + 1).ρ, η $(\text{ακτίνα})^2 = [(k + 1).\rho])^2 = (k+1)^2.\rho^2$

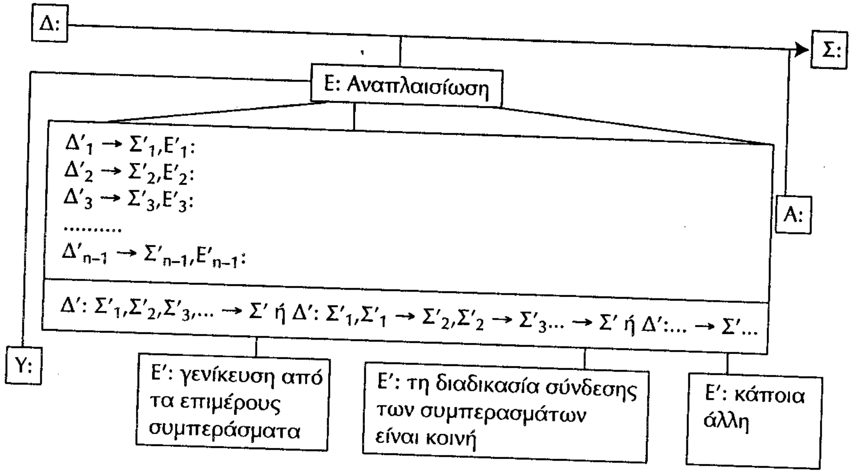
Έτσι το τελευταίο βήμα της επιχειρηματολογίας **Δ: $\Sigma_1,\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2,\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3,\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_4,\ldots, \rightarrow$ Σ** με **Ε:** γενίκευση στη διαδικασία σύνδεσης των συμπερασμάτων και Σ: «Όταν πολλαπλασιάζουμε την ακτίνα ενός κύκλου με ακέραιο φυσικό αριθμό,το εμβαδό του κύκλου πολλαπλασιάζεται επί το τετράγωνο του αριθμού»

Τα δεδομένα $\Sigma_1,\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2,\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3,\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_4,\ldots$ είναι τα επιχειρήματα που συνδέουν τα συμπεράσματα και είναι τα δεδομένα του τελευταίου βήματος που οδηγεί στην γενική περίπτωση. Η εγγύηση είναι η γενίκευση που βασίζεται στη διαδικασία σύνδεσης των συμπερασμάτων. Οι επιμέρους περιπτώσεις δεν έχουν επιλεγεί τυχαία. Θα μπορούσαμε έτσι να πούμε ότι, αφού η γενίκευση βασίζεται στη διαδικασία που συνδέει τα συμπεράσματα, και όχι στα ίδια τα συμπεράσματα, αυτή η τεκμηρίωση είναι της μορφής του γενεσιουργού παραδείγματος. Και ένας μόνος αντιπρόσωπος αρκεί, π.χ., θα μπορούσε να πάρει κανείς ως Δεδομένα στο τελευταίο βήμα το επιχείρημα $Σ_1 \rightarrow Σ_2$ ή $Σ_2 \rightarrow Σ_3$ ως γενεσιουργό παράδειγμα της όλης διαδικασίας που αναφέρθηκε πιο πάνω.

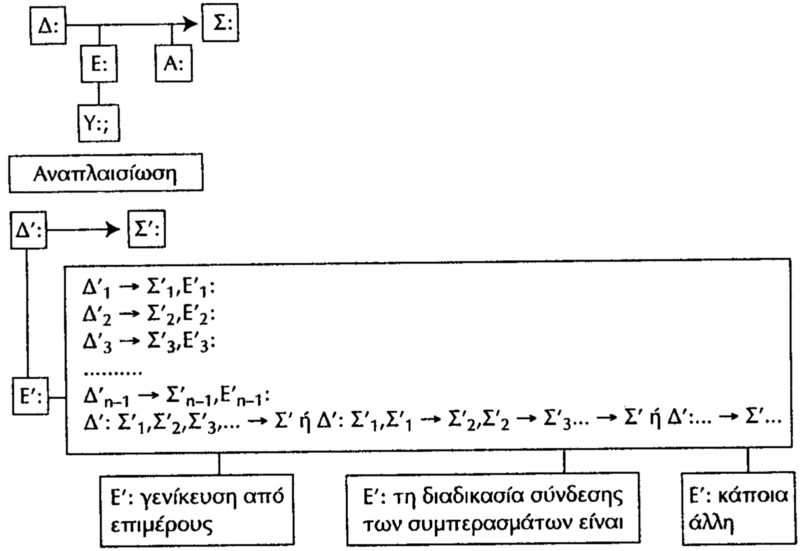
4.3. Αναλογικό επιχείρημα ή αναλογία

Σύμφωνα με τον Polya (1957): «Η επαγωγή είναι η διαδικασία της ανακάλυψης γενικών νόμων μέσω της παρατήρησης και του συνδιασμού ειδικών περιπτώσεων(παραδειγμάτων). Ψάχνει να βρεί κανονικότητα και συνοχή μέσα από τις παρατηρήσεις. Τα εμφανέστερα εργαλεία της είναι η γενίκευση,η ειδίκευση και η αναλογία.»

- Σε μερικές περιπτώσεις η εγγύηση βασίζεται κατ' ευθείαν σ' ένα αναλογικό επιχείρημα μέσα από μια αναπλαισίωση. Αν η εγγύηση αυτή δεν γίνει αποδεκτή ή αμφισβητηθεί μπορεί να δοθεί ως υποστήριξη ότι η ομοιότητα είναι ισομορφισμός δύο μαθηματικών δομών,ήτοι: $(Δ,Σ) \approx (Δ',Σ')$, *βλ. Σχήμα (I).*
- Άλλες πάλι φορές όταν η Εγγύηση δεν γίνεται κατανοητή ή αποδεκτή από το ακροατήριο και δεν είναι δυνατόν να βρεθεί και η υποστήριξη,ή δεν είναι δυνατόν να προσδιοριστεί στο συγκεκριμένο πλαίσιο,να στηριχτεί, δηλαδή, δέχεται μια αναπλαισίωση μέσα από ένα αναλογικό επιχείρημα. Αν η νέα εγγύηση που βασίζεται σε αναλογικό επιχείρημα δεν γίνει απόδεκτή μπορεί να δοθεί ως υποστήριξη ότι η ομοιότητα είναι ισομορφισμός δομών, ήτοι: $(Δ,Σ) \approx (Δ',Σ')$, *βλ. Σχήμα (II).*



Σχήμα I



Σχήμα ΙΙ

5. Παρουσίαση της έρευνας

Ερευνητική Κατάσταση

Σε 59 φοιτητές, 2ου έτους και μεγαλυτέρων ετών, του Μαθηματικού Τμήματος του Πανεπιστημίου Πάτρας που παρακολούθησαν τ[ο] μάθημα: «Στρατηγικές Διδασκαλίας και Επίλυση προβλημάτων στα Μαθηματικά» προτάθηκε το ακόλουθο θέμα:

«Παρατηρώντας ένα πίνακα με τα τετράγωνα των αριθμών από τ[ο] 1 έως το 100, που της είχε δώσει η δασκάλα της τελευταίας τάξης το[υ] Δημοτικού, η Χρυσούλα πρόσεξε ότι αφαιρώντας, κάθε φορά, δύο δια[δο]χικά τετράγωνα, το μικρότερο από το μεγαλύτερο, παίρνουμε με τ[η] σειρά όλους τους μονούς αριθμούς:

$1^2 - 0^2 = 1, 2^2 - 1^2 = 3, 3^2 - 2^2 = 5, 4^2 - 3^2 = 7, 5^2 - 4^2 = 9, 6^2 - 5^2 = 11$, κ.ο.[κ]

........Όλους τους μονούς αριθμούς; Η Χρυσούλα δεν ήταν τόσο σί[γ]ουρη..........

Το καλοκαίρι πέρασε και η Χρυσούλα μπήκε στο Γυμνάσιο. Εξακολουθεί να είναι περίεργη: μέχρι που φτάνει η «ανακάλυψή» της; και γι[α] τί συμβαίνει αυτό το παράξενο φαινόμενο;

Αν ήσαστε η καθηγήτρια (ο καθηγητής) της Χρυσούλας στο ξεκίνημα της χρονιάς της Α' Γυμνασίου και σας ρωτούσε, τι εξήγηση θα της δίνατε;»

Όλοι σχεδόν οι φοιτητές επιχείρησαν να απαντήσουν στο θέμα αυτό. Από τα επιχειρήματα των φοιτητών που παρουσίαζαν ένα ενδιαφέρον ως εξηγήσεις απέναντι σ' έναν υποθετικό μαθητή, θα παρουσιάσουμε δείγματα από όλες τις κατηγορίες στις οποίες τα ταξινομήσαμε.

Μαθηματική επιχειρηματολογία που βασίζεται κατ' ευθείαν σε αναπλαισίωση (αναλογικό παράδειγμα)

Μαθηματική επιχειρηματολογία	Ανάλυση επιχειρημάτων με το σχήμα Toulmin

Ο Κων/νος Κ. γράφει:
«Ανατρέχω στην εξήγηση του τι είναι τετράγωνος αριθμός σχηματικά 1^2, 2^2, 3^2,...,n^2
$n \in N$
$1^2 = 1$ (σχ. 1)
$2^2 = 4$ $3^2 = 9$
(σχ. 2)
(σχ. 3)
$4^2 = 16$
(σχ. 4)
δηλαδή σχήμα ενός τετραγώνου. Από το σχ. 1 για να πάω στο σχ. 2 προσθέτω 3 βούλες, άρα $1^2 + 3 = 2^2$, οπότε $2^2 - 1^2 = 3$.
Από το σχ. 2 για να πάω στο σχ. 3 προσθέτω 5 βούλες, άρα $2^2 + 5 = 3^2$, οπότε $3^2 - 2^2 = 5$, κ.ο.κ. θα βρω όλους του μονούς».

Δ: $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ → Σ: Η διαφορά δύο διαδοχικών τετραγώνων δίνει μονό αριθμό
Ε:

Απομακρύνεται προσωρινά από το αριθμητικό πλαίσιο και κάνει χρήση γεωμετρικού μοντέλου. Έτσι γίνεται κατ' ευθείαν αναπλαισίωση

Δ: $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$ → Σ1: 1, 4, 9, 16
Ε: αναλογικό παράδειγμα

Δ2: Σ1 → Σ2: $1+x=4 \leftrightarrow x=4-1 = 3 \rightarrow 2^2-1^2=3$, μονός
Ε: επίλυση α'θμιας εξίσωσης

Δ3: Σ1 → Σ3: $4+x=9 \leftrightarrow x=9-4=5 \rightarrow 3^2-2^2=5$, μονός
Ε: επίλυση α'βθμιας εξίσωσης

Δ4: Σ1,Σ2,... Μονός ποιας μορφής; → Σ4: 1) αν σε τετράγωνο με αριθμό κουκίδων n^2, προσθέτουμε μονό αριθμό κουκίδων, θα έχουμε τετράγωνο αριθμό κουκίδων $(n+1)^2$, οπότε $(n+1)^2-n^2$=μονός 2) έτσι, θα βρίσκουμε όλους τους μονούς
Ε: 1) ατελής επαγωγή πάνω στα επιμέρους συμπεράσματα 2);

Επειδή στα επιμέρους συμπεράσματα δεν παρατηρεί ότι η μορφή του μονού κάθε φορά είναι της μορφής 2n – 1,όταν στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιεί (ατελή) επαγωγή για να βγάλει το συμπέρασμα, δεν αντλεί από τα δεδομένα του τη γενική μορφή του μονού. Έτσι το τελικό συμπέρασμα («θα βρω όλους τους μονούς») φαίνεται μετέωρο, γι' αυτό το χαρακτηρίζουμε ως ατελές επιχείρημα.

Μαθηματική Επιχειρηματολογία που βασίζεται σε επαγωγή γενικεύοντας πάνω στη διαδικασία(γενεσιουργό παράδειγμα κατά N. Balacheff)

Μαθηματική επιχειρηματολογία	Ανάλυση επιχειρημάτων με το σχήμα Toulmin
Ο Αναστάσιος Κ. γράφει: «Θεωρούμε δύο τυχαίες διαφορές διαδοχικών τετραγώνων: $6^2 - 5^2$ και $7^2 - 6^2$ $7^2=7.7=7+7+7+7+7+7+7$ $\underline{6^2=6.6=6+6+6+6+6+6}$ $7^2-6^2 = 1+1+1+1+1+1+7=6.1+7=6+7$ Εξηγούμε λοιπόν πως κάθε μια από τις διαφορές τετραγώνων διαδοχικών ακεραίων ισούται με το άθροισμά τους. $1^2-0^2=1=0+1, 2^2-1^2=3=2+1, 3^2-2^2=5=3+2, 4^2-3^2=7=4+3, \ldots (n+1)^2-n^2=n+(n+1)$. Είναι κατανοητό από όλους ότι το άθροισμα δύο διαδοχικών αριθμών είναι πάντα περιττός».	Δ1: 7^2-6^2 → Σ1: $7^2-6^2=6+7$ Ε: υπολογισμοί: $7^2=7.7=7+7+7+7+7+7+7$ $\underline{6^2=6.6=6+6+6+6+6+6}$ $7^2-6^2=1+1+1+1+1+1+7=6.1+7=6+7$ Δ2: $1^2-0^2=1=0+1$ $2^2-1^2=3=2+1$, $3^2-2^2=5=3+2$ $4^2-3^2=7=4+3$ .... $(n+1)^2-n^2=$ $=n+(n+1)$ → Σ2: κάθε μια διαφορά ισούται με το άθροισμα των δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών Ε: παρατήρηση Δ3: Σ2 → Σ3: το άθροισμα δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι περιττός Ε: ;;(«Είναι κατανοητό από όλους»)

Ενώ το 1ο βήμα της επιχειρηματολογίας θα μπορούσε να αποτελέσει γενεσιουργό παράδειγμα της όλης διαδικασίας, δηλαδή ότι κάθε μια διαφορά τετραγώνων διαδοχικών αριθμών ισούται με το άθροισμα των δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών, οπότε η επιχειρηματολογία να στραφεί στη στήριξη γιατί το άθροισμα δύο διαδοχικών φυσικών είναι περιττός,το γενεσιουργό παράδειγμα που δημιούργησε αφήνεται στον «αέρα» και ξεκινά άλλη επιχειρηματολογία που βασίζεται στην ατελή επαγωγή με γενίκευση από τα επιμέρους συμπεράσματα. Ως εγγύηση του τελευταίου βήματος, όμως, δίνεται η έκφραση: «Είναι κατανοητό από όλους». Σε οποιαδήποτε τυχόν Αμφισβήτηση δεν υπάρχει Υποστήριξη. Έτσι το επιχείρημα μπορεί να χαρακτηριστεί ως *ατελές.*

Γενεσιουργό παράδειγμα και αναπλαισίωση μετά από αμφισ[β]ήτηση του διδάσκοντα

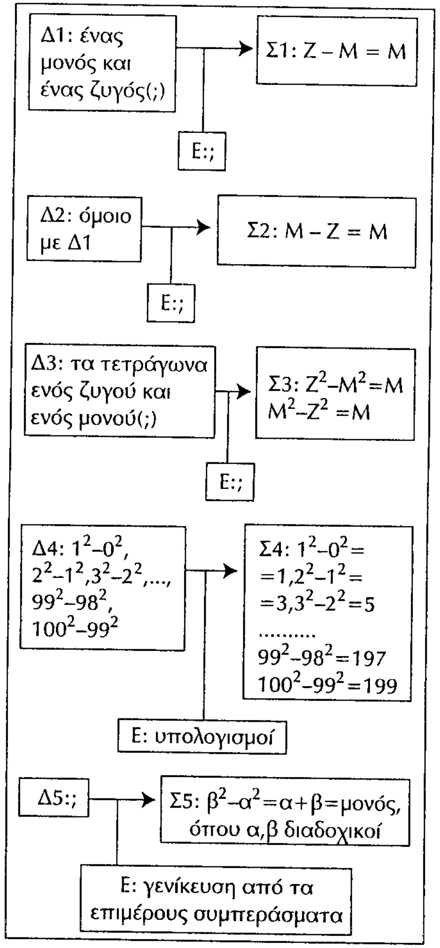
Μαθηματική επιχειρηματολογία	Ανάλυση επιχειρημάτων με το σ[χή]μα Toulmin
Ο Ιωάννης Μ. γράφει: «$1^2-0^2=1=1+0$ $2^2-1^2=3=2+1$ $3^2-2^2=5=3+2$ $4^2-3^2=7=4+3$ Όταν αφαιρούμε τα τετράγωνα διαδοχικών αριθμών έχουμε πάντα ως αποτέλεσμα το άθροισμα των αριθμών αυτών, δηλαδή πάντα μονό αριθμό. *Μετά από επερώτηση-αμφισβήτηση του διδάσκοντα «γιατί ένας μονός και ένας ζυγός δίνουν άθροισμα μονό αριθμό» δίνει την εξήγηση:* 3 πορτοκάλια + 4 πορτοκάλια αναπαριστάνονται ως εξής: OOOO+OOO=O O O O O O O =7 Δηλαδή, αν τα πάρουμε ανά δύο, πάντα περισσεύει ένα, άρα μονός».	Δ1: $1^2=1$, $0^2=0$ → Σ1: $1^2-0^2=1+0=$ Ε: υπολογισμός τετραγώνων, διαφορο Δ2: $2^2=4$, $1^2=1$ → Σ2: $2^2-1^2=2+1=$ *Πιθανές εγγυήσεις (Ε):* Ε: α) παρατήρηση ότι $4-1=2+1$; β) ταυτότητα $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$; γ) κάποιο γεωμετρικό μοντέλο; δ) υπονοούνται οι αριθμοί με τη γεν τους μορφή και γίνονται πράξεις *Ομοίως συνεχίζει τα βήματα (3ο, 4* Δ5: $\alpha^2,(\alpha-1)^2$ → Σ5: α) $\alpha^2-(\alpha-1)^2$ $=\alpha+(\alpha-1$ β) $\alpha+(\alpha-1)=$ =μονός Εγγύηση όχι καθορισμένη Α: Επερώτησ[η] του διδάσκον[τα] Εδώ η επιχειρηματολογία αλλάζει πλαίσιο (παρέχεται μια γεωμετρικ[ή] αναπαράσταση-μοντέλο)

Εδώ, εκτός από το πρώτο βήμα η εγγύηση δεν ορίζεται μονοσ[ήμα]ντα, έτσι μπορούμε να χαρακτηρίσουμε τα βήματα της επιχειρημ[ατο]λογίας ως ατελή.

Επαγωγή που γενικεύει κατ' ευθείαν πάνω στα επιμέρους συμπεράσματα («απλοϊκός εμπειρισμός» κατά Balacheff)

Μαθηματική επιχειρηματολογία	Ανάλυση επιχειρημάτων με το σχήμα Toulmin

Ο Ιωάννης Β. γράφει:
«Οι αριθμοί που προκύπτουν είναι μονοί διότι από κάθε διαφορά μονού και ζυγού αριθμού με όποια σειρά και να είναι προκύπτει μονός αριθμός, δηλαδή:
$Z - M = M$
$M - Z = M$
$Z^2 - M^2 = M$
$M^2 - Z^2 = M$
Θα της εξηγήσουμε τώρα γιατί είναι όλοι οι μονοί.
$1^2-0^2=1, 2^2-1^2=3, 3^2-2^2=5, \ldots, 99^2-98^2=197$, $100^2-99^2=199$
και γενικά θα ισχύει $\beta^2-\alpha^2=\alpha+\beta=$μονός, όπου α, β διαδοχικοί».



Τα συμπεράσματα Σ1, Σ2, Σ3 «ανακοινώνονται», χωρίς να προσδιορίζεται η εγγύηση. Ακόμη τα δεδομένα Δ5 υπονοούνται ή λείπουν! Έτσι τα επιχειρήματα χαρακτηρίζονται και εδώ ως *ατελή*.

6. Συμπεράσματα

Θέλοντας να μοιραστούμε με άλλους συναδέλφους, τους προβληματισμούς μας αναφορικά με ένα σημαντικό θέμα της διδακτικής πρακτικής στη τάξη των Μαθηματικών όπως η επιχειρηματολογία και οι εξηγήσεις του δασκάλου, αναλύσαμε κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα από τη Μαθηματική επιχειρηματολογία των φοιτητών των Μαθηματικών και πιθανών αυριανών δασκάλων των Μαθηματικών απέναντι σε έναν υποθετικό μαθητή.

Υιοθετώντας το σχήμα Toulmin,δείξαμε πώς γίνεται η κατάτμηση της επιχειρηματολογίας σε βήματα αποτελούμενα από επιχειρήματα και δώσαμε παραδείγματα από την έρευνά μας, στα οποία παρουσιάζονται ατελή επιχειρήματα.

Συνοψίζοντας, μπορούμε να αποκαλούμε ένα επιχείρημα ως ατελές, όταν κάποια από τα βασικά συστατικά στοιχεία του επιχειρήματος σύμφωνα με το σχήμα Toulmin (Δεδομένα, Εγγύηση, Συμπέρασμα), λείπουν ή υπονοούνται χωρίς να είναι δυνατόν να προσδιοριστούν μονοσήμαντα. Στην έρευνάμας παρατηρήθηκαν οι επόμενες περιπτώσεις ατελούς επιχειρήματος:

α) Δεν υπάρχουν τα δεδομένα που στηρίζουν το συμπέρασμα β) Δεν μπορεί να βρεθεί ή να προσδιορισθεί μονοσήμαντα η εγγύηση γ) Η εγγύηση βασίζεται σε «μαντικές» ή άλλες ικανότητες («είναι κατανοητό..», «είναι αυτονόητο...», «είναι γνωστό....», κ.λπ.) δ) Η υποστήριξη δεν είναι δυνατόν να βρεθεί σε περίπτωση αμφισβήτησης.

Το ερώτημα που παραμένει είναι αν η επιχειρηματολογία δεν αναπτυσσόταν απέναντι σε έναν υποθετικό μαθητή, αλλά σε έναν πραγματικό συνομιλητή, κατά πόσο οι ενστάσεις, αμφισβητήσεις του, θα οδηγούσαν σε ανεύρεση μιας υποστήριξης της εγγύησης ή σε κάποιο άλλο επιχείρημα -στο ίδιο ή σε άλλο πλαίσιο- αποδεκτό από τον συνομιλητή. Μήπως η αλληλεπίδραση,η ανταλλαγή ιδεών, οι αμφισβητήσεις, οι ανασκευές, θα ήταν μια δυναμική πηγή προόδου σχετικά με τη μαθηματική επιχειρηματολογία των υποψήφιων δασκάλων;

Ελπίζουμε αυτή η συζήτηση να συνεχιστεί εντονότερη στο μέλλον και να συμβάλει με τον τρόπο της στην έρευνα της επιχειρηματολογίας στη Μαθηματική Παιδεία.

Βιβλιογραφία

Almeida (1996): Justifying and proving in the mathematics classroom, *Philosophy of Mathematics Education Newsletter 9; htpp://www.didactique.imag.fr/preuve*

Ancel Recio and Juan Godino(2001): Institutional and Personal Meanings of Mathematical Proof, *Educational Studies in Mathematics,* Vol.48, 83-99, 2001.

Αριστοτέλης: *Όργανον,* Εκδόσεις Κάκτος.

Αριστοτέλης: *Ρητορική Ι,* Εκδόσεις Κάκτος.

Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation, *Educational Studies in Mathematics,* V.18, 147-176, Ed: D. Reidel Publishing Company.

Balacheff N.(1999): Is argumentation an obstacle?Invitation to a debate......., *International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof,* Mai/Juin 1999.

Battista M.T, Clements D. H. (1996): Geometry and Proof, *Mathematics Teacher,* V.89, n5, 386-388.

Cobb P. & Yackel E.(1998):Aconstructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. In: F. Seeger, J. Voigt & U. Waschescio (Eds), *The culture of the mathematics classroom,* pp. 158-190, Cambridge University, Press Coquin-Viennot D.: Les différentes formes du discours de la preuve en Mathématiques,Proceedings of the Conference on the Theory of Mathematics Education, ANVERS,1988.

Donaldson M.: *Children's Minds,* Fontana Paperbooks, London, 1984, Ελληνική Μετάφραση: *Η σκέψη των παιδιών,* Επιμέλεια Σ. Βοσνιάδου, Gutenberg, 1991.

Douek N. (1999): Argumentative aspects of proving: Analysis of some undergratuate Mathematics students' performances, *Proceedings of the 23rd Conference for the Psychology of Mathematics Education,* PME-99, Haifa.

Fischbein E.(1982): Intuition and Proof, *For the Learning of Mathematics,* V.3, 9-24.

Hanna G. (1996):The Ongoing Value of Proof, *Proceedings of the international Groop for the Psychology of Mathematics Education,* PME-96, Valencia.

Hanna G. (1989):Proofs that Prove and Proofs that Explain, *Actes de la 13e Conférence Internationale for the Psychology of Mathematics Education,* P.M.E-1989, Paris.

Knuth E. J. (2002): Teachers'conceptions of proof in the context of secondary school mathematics, *Journal of Mathematics Teacher Education,* Vol.5, 61-88, 2002.

Lave J. (1988): *Cognition in practice: mind, mathematics, and culture in everyday life.* Cambridge, England: Cambridge University Press.

M.A. Mariotti (htpp//:www.didactique.imag,preuve

Markel W. D. (1994):The role of proof in Mathematics Education, *School Science and Mathematics,* V.94, 291-295.

Moore R. (1994): Making the transition to formal proof, *Educational Studies in Mathematics,* V.27, 249-266.

Otte M.(1990):Intuition and formalism in mathematical proof, *Interchange,* V.21, n1, 59-64.

Πατρώνης Τ. (1990): «Διδακτικό Συμβόλαιο», ένα ζήτημα Ερμηνείας, *Τετράδια Διδακτικής Μαθηματικών,* Τεύχος 4.

Paulopoulou K., Patronis T. (2000): Appropriation des écritures symboliques à propos d'un problème...., Προς δημοσίευση στα *Actes de Colloque* «Argentoratum», Strasburg, 2000.

Polya, G. (1957) *How to solve it,* Princeton University Press. Ελληνική μετάφραση Ψυακκή Ξανθή, επιμέλεια Τ. Πατρώνης, Εκδόσεις Καρδαμίτσα, 1998.

Perelman C., Olbrechts-Tyteca L. (1958): *La nouvelle rhétorique, Traité de l' argumentation,* (2 volumes) Paris:P.U.F.

Plantin C. (1990): *Essais sur l' argumentation,* Paris: Editions Kime.

Reid D. A. (1999) D.A: Needing to explain: The Mathematical Emotional Orientation, *Proceedings of the 23rd Conference for the Psychology of Mathematics Education,* V.4, PME-99, Haifa.

Reid D.A. (2002): Elements in accepting an explanation, *Journal of Mathematical Behavior,* V.20, pp. 527-547.

Simon M. A. and Blume G. W. (1996): Justification in Mathematics classroom: A Study of Prospective Elementary Teachers, *Journal of Mathematical Behavior,* V.15, pp. 3-31.

Toulmin, S. E. (1958). *The uses of arguments.* Cambridge University Press, published, 1997.

Voigt J. (1995): Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In: P. Cobb, & H. Bauersfeld (Eds), *Emergence of mathematical meaning: interaction in classroom cultures* (pp. 163-201). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vygotsky L. S. (1978): *Mind and Society. The development of Higher Psychological Process,* Harvard University Press, Ελληνική Μετάφραση: Νους και Κοινωνία, Επιμέλεια Σ. Βοσνιάδου, Gutenberg, 1997.

Walkerdine V .(1988): The mastery of Reason; *Cognitive Development and the Production of Rationality,* Routledge, London and New York.

Yackel E., Cobb P. (1996).: Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education,* V.27, 458-477.