Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη μαθηματική εκπαίδευση

Σπύρος Φερεντίνος, *Πάντειο Πανεπιστήμιο*

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία αρχικά παρουσιάζονται τα δύο βασικά ρεύματα που κυριαρχούν στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών. Στη συνέχεια αναλύεται η έννοια «δραστηριότητα», δίνεται παράδειγμα του τρόπου διδασκαλίας των μαθηματικών με τη βοήθεια δραστηριοτήτων και γίνεται συζήτηση όσον αφορά στον επιτυχημένο τρόπο εφαρμογής των δραστηριοτήτων στη διδακτική των μαθηματικών.

Εισαγωγή

Η έννοια της μάθησης, καθώς και ποιοι είναι οι τρόποι με τους οποίους μαθαίνει καλύτερα το άτομο είναι θέματα που έχουν απασχολήσει τους ερευνητές για πολλά χρόνια. Ειδικότερα όσον αφορά στη διδακτική των μαθηματικών δύο είναι τα κυρίαρχα ρεύματα.

Το ένα, το οποίο αριθμεί πολλές δεκαετίες, δίνει την έμφαση στον εμπλουτισμό των γνώσεων και δεξιοτήτων του μαθητή και συνδέεται με την άμεση ή «δασκαλοκεντρικού τύπου μάθηση», όπου ο εκπαιδευτικός ελέγχει τους διδακτικούς στόχους και επιλέγει την κατάλληλη προς τις ικανότητες των μαθητών ύλη (Χατζηθεολόγου, 2000), δηλαδή ο ρόλος του εκπαιδευτικού περιορίζεται σε αυτόν του απλού μεταφορέα – μεταδότη πληροφοριακού υλικού (Μπαρκάτσας, 1999). Στην περίπτωση αυτή δεχόμαστε a priori ότι υπάρχει ένα δεδομένο σώμα γνώσεων, που δεν επιδέχεται αμφισβήτηση, το οποίο ένας δάσκαλος - πομπός μεταδίδει και πολλοί μαθητές - δέκτες προσπαθούν να συλλάβουν και να αφομοιώσουν (Θωμαΐδης, 1999). Επομένως, σύμφωνα με την προσέγγιση αυτή, η

Ο κ. Φερεντίνος είναι Διδάκτωρ Στατιστικής και Μεθοδολογίας Ερευνών στην Ψυχολογία, διδάσκων (407/80) στο Πάντειο Πανεπιστήμιο.

διδασκαλία των μαθηματικών αφορά κυρίως στη μεταφορά γνώσεων και την κατάκτηση ενός συγκεκριμένου επιπέδου ικανοτήτων και η οργάνωσή της γίνεται με βάση συγκεκριμένους και μετρήσιμους στόχους – προϊόντα, οι οποίοι εκφράζονται με όρους αναμενόμενης συμπεριφοράς. Σύμφωνα με τον Μπαρκάτσα (1999, σ.142) ο πυρήνας αυτής της άποψης είναι ότι «τα νοήματα είναι σύμφωνα με τα λόγια και τις πράξεις του εκπαιδευτικού ή με αντικείμενα του περιβάλλοντος». Η συγκεκριμένη προσέγγιση έχει χαρακτηρισθεί με διάφορους τρόπους, ανάλογα με την παράμετρο στην οποία δίνει την έμφαση ο κάθε ερευνητής. Οι Ράπτης και Ράπτη (1998) τη χαρακτηρίζουν ως «παραδοσιακή - ανταγωνιστική μέθοδο διδασκαλίας», οι Οικονόμου και Τζεκάκη (1999) ως «παραδοσιακή διδακτική συμπεριφορά» και ο Hunting (1987) ως «παραδοσιακή άποψη για τη μάθηση». Ο Κλαουδάτος (1999) αναφέρεται σε «παθητική μάθηση» και η Χιονίδου (1999) σε «παθητικό τρόπο προσέγγισης της γνώσης». Ο Μπαρκάτσας (1999) μιλάει για «συμβατικό» ή «θετικιστικό μοντέλο μάθησης», καθώς και για «θεωρία της επεξεργασίας των πληροφοριών». Η Κολέζα (1977) χρησιμοποιεί τον όρο «φορμαλιστική άποψη για τη διδασκαλία». Στο *Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών για την Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση* (Υπουργείο Παιδείας, 1997) η ανωτέρω άποψη αναφέρεται ως «μπιχαβιοριστική συνιστώσα των εκπαιδευτικών στόχων».

Το δεύτερο ρεύμα, το οποίο εμφανίστηκε στην αρχή της δεκαετίας του 70, εστιάζεται κυρίως στο μαθητή ως ιδιαίτερη οντότητα, στα συναισθήματά του, στον καλύτερο τρόπο με τον οποίο ο συγκεκριμένος μαθητής μαθαίνει, καθώς και στους τρόπους με τους οποίους είναι δυνατό να αυξηθούν η δημιουργικότητα και οι νοητικές ικανότητες των μαθητών, δηλαδή αποτελεί μια έμμεση «μαθητοκεντρικού τύπου μάθηση» (Χατζηθεολόγου, 2000). Στην περίπτωση αυτή, κατά τη Burton, οι μαθητές προκαλούνται να εργαστούν μέσα στη δική τους μάθηση, γιατί με αυτόν τον τρόπο αποκαλύπτουν περισσότερο εκλεπτυσμένες στρατηγικές και κατανοήσεις από ότι όταν εξαναγκάζονται να αναπαράγουν αδρανή γνώση από την οποία έχουν αφαιρεθεί η πρόκληση και η δημιουργικότητα (αναφέρεται στο Χιονίδου, 1999). Η ως άνω προσέγγιση έχει ως σκοπό την ανάπτυξη μιας στάσης για νοητική αναζήτηση και εμπλοκή σε νοηματικές δραστηριότητες και εμπειρίες και στοχεύει στην ανάπτυξη της αυτονομίας της μαθησιακής συμπεριφοράς (Κλαουδάτος, 1999), επομένως συνδέεται και με την άποψη ότι οι μαθητές πρέπει να έχουν συνεχώς την ευκαιρία να θέτουν υπό κρίση, και ενδεχομένως υπό αμφισβήτηση, όλα όσα έχουν μάθει. Η προσέγγιση αυτή έχει επίσης χαρακτηρισθεί με διάφορους τρόπους. Οι Ράπτης και Ράπτη (1998) τη χαρακτηρίζουν ως «συνεργατική μάθηση», η Χιονίδου (1999) ως «μεταμοντέρνα επιστημολογία» και ο Hunting (1987) ως «σχετικιστική άποψη για τη μάθηση». Ο Κλαουδάτος χρησιμοποιεί τους όρους «‘ενοποιημένη’ διαδικασία Λύσης Προβλήματος» (2000) και «ενεργητική μάθηση» (1999). Η Κολέζα (1977) αναφέρεται στο «ρεαλιστικό μοντέλο διδασκαλίας», όπως επίσης σε «διδασκαλία διαρθρωμένη γύρω από ευρετικές διαδικασίες και σε άμεση συνάρτηση με την καθημερινή ζωή». Το εναλλακτικό μοντέλο στη θεωρία της μετάδοσης των γνώσεων από το δάσκαλο στο μαθητή σύμφωνα με τους Μπαρκάτσα (1999), von Glaserfeld (1991), Steffe (1991) κ.ά. είναι η θεωρία κατασκευής της γνώσης (κονστρουκτιβισμός ή δομητισμός).

Οι βασικές αρχές της θεωρίας κατασκευής της γνώσης, όπως αναφέρονται από τη Μ. Χιονίδου (1999), είναι οι εξής: α) Μαθαίνουμε δρώντας. Η γνώση περνάει από μια κατάσταση ισορροπίας σε μια άλλη μέσα από μεταβατικές φάσεις κατά τη διάρκεια των οποίων οι προηγούμενες γνώσεις αποδεικνύονται λανθασμένες, β) Κάθε άτομο δημιουργεί τις δικές του αναπαραστάσεις και δεν υπάρχει μια μοναδικά «σωστή αναπαράσταση» της γνώσης, γ) Η μάθηση συμβαίνει μέσα σε ένα κοινωνικό πλαίσιο. Η δημιουργία λεκτικής διαμάχης μεταξύ μαθητών και μαθητριών μπορεί να διευκολύνει την απόκτηση της γνώσης και δ) Το άτομο πρέπει να αναστοχάζεται και να προσπαθεί να συνειδητοποιήσει με βάση μια μεταγνωστική και συναισθηματική ενεργοποίηση με ποιο τρόπο άλλαξαν οι αντιλήψεις του. Ορισμένες πολύ σημαντικές διαστάσεις που απορρέουν από τις παραπάνω αρχές είναι η συνεργατικότητα, ο στοχασμός, η ενεργός συμμετοχή και η προσωπική συνάφεια (Ράπτης και Ράπτη, 1998).

Είναι προφανές ότι η ως άνω παρουσίαση είναι, σε κάποιο βαθμό, σχηματική και φυσικά αποδίδει ένα μόνο ποσοστό από μια πραγματικότητα ρέουσα και μεταβαλλόμενη, όπως είναι αυτή που χαρακτηρίζει το χώρο της διδακτικής των μαθηματικών. Οι διάφορες ετικέτες που δόθηκαν στο καθένα από τα δύο κυρίαρχα ρεύματα είναι φανερό ότι δεν αποδίδουν απαραίτητα ταυτόσημες έννοιες, ούτε εκφράζουν σε κάθε περίπτωση παρόμοιες απόψεις για τη διδακτική των μαθηματικών. Ακόμη, εντός των παραδοσιακών μοντέλων διδασκαλίας συνυπάρχουν διάφορες τάσεις, όπως ο λογικισμός ή πλατωνικός ρεαλισμός, ο φορμαλισμός κτλ., αντίστοιχα το ίδιο συμβαίνει και εντός των σύγχρονων μοντέλων. Είναι προφανές ότι αυτό που ενοποιεί ένα σύνολο από απόψεις, πιθανώς διαφορετικές, και τις εντάσσει σε ένα συγκεκριμένο ρεύμα, που για χάρη συντομίας ονομάσθηκε στην πρώτη περίπτωση παραδοσιακό και στη δεύτερη σύγχρονο, είναι, κυρίως, η κυρίαρχη πρακτική που ακολουθείται όσον αφορά στη διδασκαλία των μαθηματικών. Επίσης, οι αντιθέσεις που φαίνεται ότι υπάρχουν ανάμεσα στα δύο ρεύματα δεν έχουν πάντα ξεκάθαρα όρια, κυρίως σε επίπεδο πρακτικής εφαρμογής. Για παράδειγμα, συχνά η παθητική μάθηση συνδέεται με τη μετωπική διδασκαλία και αντιπαρατίθεται στην ενεργητική μάθηση, όμως είναι δυνατό μια παθητική μαθησιακή διαδικασία, π.χ. η παρακολούθηση του δασκάλου, να οδηγήσει και σε ενεργητικές νοητικές δραστηριότητες και αντίθετα μια μαθησιακή δραστηριότητα να οδηγήσει σε παθητικές νοητικές εμπειρίες (Κλαουδάτος 1999). Ακόμη, ενώ μπορεί να υιοθετείται η λογική της «επίλυσης προβλήματος» με στόχο την ανάδειξη της νέας γνώσης, συχνά, οι διδάσκοντες αναιρούν τις όποιες προθέσεις τους δηλώνοντας ότι δεν εμπιστεύονται τη λύση του προβλήματος στους μαθητές τους, αλλά την παρουσιάζουν οι ίδιοι στον πίνακα (Οικονόμου και Τζεκάκη, 1999).

Οι νεότερες απόψεις για τα μαθηματικά έχουν καθιερωθεί επισήμως στη χώρα μας. Για παράδειγμα, η θέση του Υπουργείου Παιδείας, όπως αυτή εκφράζεται στο *Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών για την Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση* (Υπουργείο Παιδείας, 1997), είναι ότι η διαδικασία μάθησης των μαθηματικών είναι μια κατασκευαστική δραστηριότητα (θεωρία της εποικοδόμησης της μαθηματικής γνώσης) και η κατασκευή της γνώσης καθίσταται εφικτή υπό την προϋπόθεση ότι η διαδικασία της μάθησης βασίζεται σε συγκεκριμένες εμπειρίες του μαθητή. Σύμφωνα με τις απόψεις αυτές αφενός η έννοια του *γνωρίζω μαθηματικά* ταυτίζεται με την έννοια του *κάνω μαθηματικά* και αφετέρου κεντρικός στόχος της διδασκαλίας είναι η σχέση των μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο.

Όμως, παρά την επίσημη καθιέρωσή τους οι σύγχρονες απόψεις για τη διδασκαλία των μαθηματικών δεν έχουν ακόμη καταφέρει να ενσωματωθούν στην καθημερινή σχολική πραγματικότητα. Για το θέμα αυτό οι Οικονόμου και Τζεκάκη (1999, σ. 45), με αφορμή έρευνα που πραγματοποίησαν με αντικείμενο τη διερεύνηση των εναλλακτικών διδακτικών προσεγγίσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών, γράφουν ότι «Τα ερευνητικά πορίσματα τεκμηριώνουν εμφανώς τη διαπίστωση ότι η πρακτική της δραστηριοποίησης των μαθητών, για την αντιμετώπιση ενός 'άγνωστου προβλήματος', με στόχο την 'οικοδόμηση' νέων μαθηματικών γνώσεων, έχει εξαιρετικά περιορισμένη εφαρμογή και στις δύο εκπαιδευτικές βαθμίδες (Δημοτικό και Γυμνάσιο)».

Η παραπάνω διαπίστωση, καθώς και πολλές άλλες ανάλογου περιεχομένου, στάθηκαν αφορμή για τη συγγραφή του παρόντος άρθρου, το οποίο έχει ως στόχο την πραγμάτευση της έννοιας της *δραστηριότητας*. Η *δραστηριότητα* είναι μια έννοια κλειδί γύρω από την οποία διαρθρώνονται σχεδόν όλες οι σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις στο μάθημα των μαθηματικών. Ως δραστηριότητα είναι δυνατό να ορίσουμε μια κατάσταση – πρόβλημα ή τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος (Κολέζα, 1987). Όποια ορολογία και αν υιοθετήσουμε είναι κοινά αποδεκτό ότι η λειτουργία μιας δραστηριότητας χρησιμεύει αφενός για την κατασκευή από τους ίδιους τους μαθητές της νέας γνώσης και αφετέρου για να δώσει την ευκαιρία ποικίλων εφαρμογών των ήδη αποκτηθεισών γνώσεων (ό.π).

Σύμφωνα με τις νεότερες προσεγγίσεις οι στόχοι της Μαθηματικής Εκπαίδευσης εκφράζονται πληρέστερα με όρους *δραστηριοτήτων* παρά με όρους παρατηρήσιμων συμπεριφορών, δηλαδή αφορούν την ίδια τη διαδικασία μάθησης και δεν αποτελούν απλά μετρήσιμο αποτέλεσμα (Υπουργείο Παιδείας, 1987). Εργασία πάνω σε μια μαθηματική δραστηριότητα σημαίνει κυρίως *προσδιορίζω το πρόβλημα, εικάζω για το αποτέλεσμα, πειραματίζομαι με τη βοήθεια παραδειγμάτων, συνθέτω ένα συλλογισμό, διατυπώνω μια λύση, ελέγχω τα αποτελέσματα και αξιολογώ την ορθότητά τους σε συνάρτηση με το αρχικό πρόβλημα* (ό.π). Επιδιώκοντας τους γενικούς στόχους της Μαθηματικής Εκπαίδευσης μέσω επεξεργασίας κατάλληλων δραστηριοτήτων, οι μαθητές μαθαίνουν να ερευνούν, να αιτιολογούν κατ' αναλογία, να αντιπαρέρχονται αντιπαραθέσεις, να εκτιμούν την ισχύ πιθανών λύσεων, να επιχειρηματολογούν υπέρ της λύσης που προτείνουν και να εκφράζονται στη μαθηματική γλώσσα εκτιμώντας την ισχύ της ως εργαλείο επικοινωνίας (ό.π).

Η προσέγγιση αυτή στηρίζεται στο ότι η γνώση δεν μπορεί και δεν πρέπει να επιβάλλεται δογματικά εκ των έξω (Κολέζα, 1997). Το καθετί πρέπει να υπόκειται σε μια εσωτερική επεξεργασία από εκείνον που μαθαίνει. Οι μαθηματικές έννοιες πρέπει να ανακαλύπτονται μέσω κατάλληλων εμπειριών. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής ξεκινώντας από την παρατήρηση και ανάλυση καταστάσεων που του είναι οικείες καθίσταται ικανός να αντιμετωπίζει τις μαθηματικές έννοιες και να τις χρησιμοποιεί σε μια ποικιλία καταστάσεων (ό.π).

Κατά την άποψη της Κολέζα (ό.π) μια δραστηριότητα πρέπει:

Να έχει σύντομη εκφώνηση, που μπορεί να γίνει κατανοητή απ' όλους τους μαθητές.

Να έχει μη προφανή απάντηση. Για να απαντήσει ο μαθητής στα ερωτήματα που τίθενται στα πλαίσια της δραστηριότητας, πρέπει να ανακαλύψει τη γνώση που επιδιώκεται μέσω αυτής, κινητοποιώντας και αναδιοργανώνοντας παλαιότερες γνωστές του έννοιες.

Το πρόβλημα το οποίο βρίσκεται στη βάση μιας δραστηριότητας πρέπει να είναι πλούσιο, δηλαδή να επιδέχεται πολλές προσεγγίσεις, και να δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να διατυπώνουν και να επεξεργάζονται μόνοι τους ή στα πλαίσια της ομάδας ενδιάμεσες ερωτήσεις. Οποιεσδήποτε ενέργειες τμήσης του προβλήματος από τον καθηγητή αποκλείονται.

Μεθοδολογία

Προκειμένου να γίνει κατανοητή η διαδικασία της διδασκαλίας των μαθηματικών με τη βοήθεια κατάλληλων δραστηριοτήτων θα παρατεθεί ένα παράδειγμα που αφορά τα Μαθηματικά του Γυμνασίου. Ο γενικός διδακτικός στόχος του παραδείγματος είναι η εξοικείωση των μαθητών με τη χρήση συμβόλων, καθώς και η δυνατότητα μετάβασης από προβλήματα με συγκεκριμένους αριθμούς σε προβλήματα που η διαπραγμάτευσή τους απαιτεί συμβολικές εκφράσεις.

Εκφώνηση: Ένας πατέρας έχει δύο παιδιά που οι ηλικίες τους διαφέρουν κατά ένα χρόνο. Την ημέρα των γενεθλίων του τον επισκέπτεται ένας φίλος του, ο οποίος τον ρωτάει ποια είναι η ηλικία των παιδιών του και ο πατέρας απαντάει ότι αφενός το άθροισμα των ηλικιών τους κάνει τη δική του ηλικία και αφετέρου τα γενέθλια των παιδιών του συμπίπτουν με τα δικά του. Είναι δυνατό με τα παραπάνω στοιχεία να προσδιοριστούν οι ηλικίες των παιδιών;

Παρατήρηση: Είναι προφανές ότι η επίλυση του ως άνω προβλήματος διαφέρει σε βαθμό δυσκολίας, ανάλογα με την τάξη του Γυμνασίου στην οποία φοιτούν οι μαθητές. Η παρακάτω παρουσίαση αφορά κυρίως την Α΄ Γυμνασίου, χωρίς να αποκλείεται, σε περισσότερο ή λιγότερο τροποποιημένη μορφή, να αφορά και τις υπόλοιπες τάξεις του Γυμνασίου. Για παράδειγμα, οι μαθητές της Β΄ Γυμνασίου είναι περισσότερο εξοικειωμένοι στην επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις, όχι όμως στην παρουσίαση αποτελεσμάτων στα οποία ο άγνωστος περιέχει και μεταβλητές.

Ερευνητική φάση

Η εκφώνηση, ενώ σε μια πρώτη ανάγνωση ίσως φανεί απλή και σύντομη, είναι πιθανό να επιφέρει στους μαθητές αμηχανία, διότι αυτό που υποτίθεται ότι είναι γνωστό, δηλαδή η ηλικία του πατέρα, δε δίνεται με ένα συγκεκριμένο αριθμό. Όμως η ως άνω γνωστική σύγχυση είναι αναγκαία, διότι για να υπάρχει μάθηση χρειάζεται να τίθενται καινούργιες και ασυνήθιστες ερωτήσεις που οδηγούν σε «καταστάσεις σύγκρουσης» του νέου με το παλιό. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει η αναγκαιότητα της αλλαγής πλαισίου προκειμένου να επιτευχθεί η επεξεργασία των νέων γνωστικών αναπαραστάσεων (Bouvier, 1987).

Ως πρώτο βήμα για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος είναι δυνατό να προταθεί από τον καθηγητή στους μαθητές, αν οι συνθήκες το επιτρέπουν, η διενέργεια μιας έρευνας στο οικογενειακό, φιλικό, ή σε οποιοδήποτε άλλο περιβάλλον έχουν πρόσβαση. Στόχος της έρευνας θα είναι η διαπίστωση του κατά πόσον πραγματικά μπορεί να συμβεί αυτό που ζητείται από το πρόβλημα. Η παραπάνω έρευνα, ανεξάρτητα από τα τυχόν αποτελέσματα, είναι χρήσιμη, διότι με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται μια βιωματικού τύπου εξοικείωση με το πρόβλημα, η οποία διαδικασία, σύμφωνα με τη θεωρία της κατασκευής της γνώσης είναι η απαραίτητη βάση για τη συγκρότηση της μαθηματικής γνώσης (Κεΐσογλου, 1999). Στη συγκεκριμένη περίπτωση, μάλιστα, το πιο πιθανό είναι να μη βρεθούν άτομα που να πληρούν τις ακριβείς συνθήκες του προβλήματος, διότι δεν είναι εύκολο να βρεθούν πατέρες που η ηλικία τους να είναι ακέραιος αριθμός και να ισούται με το άθροισμα των ηλικιών των δύο παιδιών τους, οι ηλικίες των οποίων πρέπει επίσης να είναι αριθμοί ακέραιοι. Προκειμένου να διευρυνθεί το προς εξέταση δείγμα θα μπορούσε ο καθηγητής να προτείνει την επέκταση της έρευνας, ακόμη και με τη βοήθεια του Internet. Όμως, αυτό που είναι σημαντικό δεν είναι τόσο η εύρεση στοιχείων που να πληρούν τις συνθήκες του προβλήματος όσο η εξοικείωση των μαθητών με ερευνητικές δραστηριότητες.

Στη συνέχεια και αφού συζητηθούν τα αποτελέσματα των ερευνών που τυχόν διεξήχθησαν, οι μαθητές, μέσω κατάλληλης διευκόλυνσης από τον καθηγητή, αν αυτό καταστεί αναγκαίο, είναι δυνατό να «οδηγηθούν» στο συμβολισμό της ηλικίας του πατέρα με ένα γράμμα, για παράδειγμα το κ, δηλαδή να καταλήξουν σε μια αντιμετώπιση που ξεφεύγει από τη συνήθη πρακτική, η οποία απαιτεί το συμβολισμό με ένα γράμμα, συνήθως χ, μόνο του ζητούμενου (άγνωστου) στοιχείου. Η ως άνω «αλλαγή πλαισίου» που έγινε δυνατή μέσα από το διευκολυντικό ρόλο του καθηγητή είναι μάλλον απαραίτητη, εφόσον οι μαθητές, τουλάχιστον στην πλειοψηφία τους, δε διαθέτουν ούτε μέθοδο λύσης ούτε τον αναγκαίο αλγόριθμο ούτε τις απαραίτητες έννοιες για να αντιμετωπίσουν τις απαιτήσεις του προβλήματος.

Το επόμενο βήμα είναι, πιθανώς, η πραγματοποίηση κάποιων δοκιμών όσον αφορά στις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός κ, ο οποίος σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος πρέπει να είναι φυσικός. Κατά τη διάρκεια των δοκιμών είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι αν το κ είναι άρτιος αριθμός π.χ. 46, 48,50, … τότε δεν φαίνεται πιθανό να μπορεί να εκφρασθεί ως άθροισμα ενός φυσικού αριθμού με τον επόμενό του. Για παράδειγμα, αν κ=46 τότε το κ μπορεί να προσεγγισθεί από την ισότητα 22+23=45, αν όμως αυξηθεί κατά μια μονάδα ο πρώτος προσθετέος τότε θα ισχύει 23+24=47, οπότε θα υπάρξει υπέρβαση του ζητούμενου αριθμού, το ίδιο συμβαίνει και αν κ=48 διότι 23+24=47 και 24+25=49, ή κ=50 διότι 24+25=49 και 25+26=51. Αν το κ είναι περιττός π.χ. 43, 45, 47… τότε, επίσης εύκολα, θα φανεί ότι είναι δυνατό να εκφρασθεί ως άθροισμα ενός φυσικού αριθμού με τον επόμενό του. Για παράδειγμα, αν κ=43 θα έχουμε 21+22=43, για κ=45 θα έχουμε 22+23=45, για κ=47 θα έχουμε 23+24=47.

Προκειμένου να ισχυροποιηθεί η ένδειξη ότι ο ζητούμενος φυσικός αριθμός κ είναι περιττός είναι, πιθανώς, χρήσιμο να πραγματοποιηθεί ένας αρκετά μεγάλος αριθμός από δοκιμές. Στην κατεύθυνση αυτή μπορεί να σταθεί αρωγός ένα υπολογιστικό φύλλο του Excel, του οποίου ορισμένα αποτελέσματα παρουσιάζονται αμέσως παρακάτω. Στην πρώτη στήλη φαίνονται διάφορες τιμές του φυσικού αριθμού κ και στις δύο επόμενες οι δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που το άθροισμά τους είναι ο κ.

7383	3691	3692
7385	3692	3693
7387	3693	3694
7389	3694	3695
7391	3695	3696
7393	3696	3697
7395	3697	3698
7397	3698	3699
7399	3699	3700
7401	3700	3701
7403	3701	3702
7405	3702	3703
7407	3703	3704
7409	3704	3705

Στη συνέχεια, με στόχο τον προσδιορισμό των ηλικιών των παιδιών, σε συνάρτηση με την ηλικία του πατέρα, είναι πολύ πιθανό οι μαθητές να οδηγηθούν σε αδιέξοδο. Προς αναζήτηση διεξόδου ο καθηγητής είναι δυνατό να προτείνει στους μαθητές να εξετάσουν προσεκτικά τις ισότητες που χρησιμοποιήθηκαν ως παραδείγματα προηγουμένως (21+22=43 για κ=43, 22+23=45 για κ=45 και 23+24=47 για κ=47). Και στις τρεις περιπτώσεις ενδέχεται να παρατηρήσουν οι μαθητές (το πιθανότερο με τη βοήθεια του καθηγητή) ότι ο πρώτος προσθετέος προκύπτει από το αποτέλεσμα (κ) αν από αυτό αφαιρεθεί το 1 και στη συνέχεια πραγματοποιηθεί διαίρεση δια του 2, δηλαδή 21=(43−1):2, 22=(45−1):2 και 23=(47−1):2 και προφανώς ο δεύτερος προσθετέος προκύπτει από τον πρώτο με την προσθήκη του 1. Η συγκεκριμένη φάση είναι αρκετά δύσκολη για τους μαθητές και απαιτεί έντονη διαφοροποίηση του υπάρχοντος τρόπου σκέψης (αλλαγή πλαισίου), διότι δεν απαιτεί μόνο τη γενίκευση κάποιων προφανών εμπειρικών παρατηρήσεων, όπως αυτές που οδήγησαν στην εικασία ότι ο κ ενδέχεται να είναι περιττός αριθμός. Εδώ η εμπειρία, δηλαδή οι ισότητες 21+22=43, 22+23=45 και 23+24=47, δεν είναι εύκολο να οδηγήσει σε ένα μοντέλο που να παράγει τον πρώτο και το δεύτερο προσθετέο, αν θεωρηθεί γνωστό το άθροισμα.

Ανάπτυξη εικασιών

Οι παραπάνω ενέργειες είναι πολύ πιθανό να οδηγήσουν τους μαθητές στην εικασία ότι ο κ είναι περιττός αριθμός. Προκείμενου όμως να διατυπώσουν σε μαθηματική γλώσσα την ως άνω εικασία χρειάζεται να διαβλέψουν και ερωτήσεις που δεν παρουσιάζονται στην εκφώνηση. Μια ερώτηση είναι δυνατό να αφορά στον τρόπο με τον οποίο συμβολίζεται ένας άγνωστος φυσικός αριθμός. Η ερώτηση αυτή μπορεί να γίνει αφορμή για να συζητηθεί κατά πόσον ο προσφορότερος συμβολισμός παραπέμπει στο γράμμα χ ή στο γράμμα ν. Η συζήτηση μπορεί να συνδεθεί και με την επιλογή του κ ως συμβόλου για την ηλικία του πατέρα και στη συνέχεια να γενικευθεί με στόχο την κατανόηση του ρόλου των συμβόλων στα μαθηματικά. Άλλη ερώτηση είναι δυνατό να αφορά στον τρόπο γραφής του επόμενου ενός φυσικού αριθμού, οπότε με την προϋπόθεση ότι επελέγη το γράμμα ν για να συμβολίσει την ηλικία του μικρότερου παιδιού, οι ζητούμενοι αριθμοί θα είναι της μορφής ν, ν+1.

Η επόμενη εικασία αφορά στον τρόπο προσδιορισμού των αριθμών ν και ν+1. Οι ως άνω διαπιστώσεις, σε συνδυασμό με την παρατήρηση που έγινε κατά τη διάρκεια της ερευνητικής φάσης, δηλαδή ότι η ηλικία του μικρότερου παιδιού προκύπτει από την ηλικία του πατέρα (κ) αν από αυτή αφαιρεθεί 1 και στη συνέχεια γίνει διαίρεση δια του 2, ενδέχεται να οδηγήσουν στη δεύτερη εικασία ότι οι ηλικίες των δύο παιδιών είναι: ν=(κ–1):2 και ν+1=(κ–1):2+1.

Απόδειξη εικασιών

Εδώ οι μαθητές, προκειμένου να αποδείξουν αφενός ότι το κ είναι περιττός αριθμός και αφετέρου ότι οι ζητούμενοι διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί (ηλικίες παιδιών) είναι: ν=(κ–1):2 και ν+1=(κ–1):2+1, χρειάζεται να προβληματισθούν για το γενικό τρόπο γραφής των άρτιων και των περιττών φυσικών αριθμών, δηλαδή να χρησιμοποιήσουν συμβολικές γραφές της μορφής 2ν για τους άρτιους και 2ν+1 για τους περιττούς.

Επαλήθευση - επικύρωση

Οι μαθητές με μια απλή πρόσθεση των αριθμών ν=(κ–1):2 και ν+1=(κ–1):2+1 μπορούν να διαπιστώσουν ότι το άθροισμά τους είναι ο αριθμός κ.

Διερεύνηση- εμβάθυνση

Στη φάση αυτή οι μαθητές χρειάζεται να συνειδητοποιήσουν ότι το προφανές της εγκυρότητας ή μη των αποτελεσμάτων, όσον αφορά στις πράξεις με συγκεκριμένους αριθμούς, εδώ τίθεται σε αμφισβήτηση και είναι αναγκαίο να διερευνηθεί η καταλληλότητά τους. Δηλαδή, απαιτείται η εξέταση του κατά πόσον οι αριθμοί $ν=(κ-1):2$ και $ν+1=(κ-1):2+1$ είναι πράγματι φυσικοί, όπως επίσης και η εξέταση του εύρους των τιμών που μπορεί να πάρει ο φυσικός αριθμός κ. Η συζήτηση που αφορά στις δυνατές τιμές του κ μπορεί να αποτελέσει το έναυσμα προκειμένου να συνδεθούν τα μαθηματικά με θέματα από την πραγματική ζωή, γιατί η διαδικασία προσδιορισμού του εύρους τιμών του κ άπτεται των κοινωνικών, πολιτιστικών και βιολογικών συνιστωσών που συνδέονται με την ηλικία που ένας άνδρας «αποφασίζει» να αποκτήσει παιδιά.

Γενίκευση

Στο τέλος της δραστηριότητας προτείνεται από τον καθηγητή η διεξαγωγή συζήτησης με σκοπό τη γενίκευση του προβλήματος, δηλαδή τη μετάφρασή του από τη φυσική στη μαθηματική γλώσσα. Αυτό οδηγεί στην αναζήτηση μιας διατύπωσης της μορφής «Το άθροισμα δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι ίσο με δεδομένο φυσικό αριθμό κ. Να βρεθούν οι δύο αριθμοί». Η ως άνω διαδικασία δίνει τη δυνατότητα αφενός της μετάβασης από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο και αφετέρου του χειρισμού της νέας γνώσης, δηλαδή της εφαρμογής των αποτελεσμάτων σε άλλες καταστάσεις.

Σχόλια

Η εκφώνηση είναι σύντομη και εύκολα κατανοητή, αλλά η σωστή απάντηση δεν είναι προφανής.

Για να απαντήσει ο μαθητής με σωστό τρόπο χρειάζεται να κατασκευάσει την απαραίτητη γνώση.

Η αλλαγή πλαισίου όσον αφορά στο μαθητή είναι απαραίτητη και αφορά σχεδόν όλες τις φάσεις της δραστηριότητας.

Ο καθηγητής χρειάζεται να προσφέρει την όποια βοήθεια κρατώντας για τον εαυτό του το ρόλο του συνεργάτη – διευκολυντή και όχι αυτόν μιας αυθεντίας που επιβάλλει τη γνώση δογματικά και εκ των έξω. Πρέπει να ενστερνισθεί την άποψη ότι ο δάσκαλος δεν είναι αυτός που δίνει απαντήσεις αλλά αυτός που διαχειρίζεται την εξέλιξη των δραστηριοτήτων, με στόχο οι συζητήσεις μέσα στη σχολική τάξη να παρουσιαστούν με μια ικανοποιητικά επιστημονική μορφή (Bouvier, 1987).

Κατά την πορεία προς επίλυση του προβλήματος οι μαθητές είναι δυνατό να έχουν, στο μέτρο του δυνατού, αρκετή αυτονομία ως προς τις κατευθύνσεις της μάθησης, γεγονός που κατά την Anthony (1996) αποτελεί χαρακτηριστικό της ενεργητικής μάθησης.

Η ένταξη των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση είναι δυνατό να βοηθήσει στην ισχυροποίηση της όποιας εικασίας. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η χρήση του υπολογιστικού φύλλου του Excel επιτρέπει την πραγματοποίηση ενός εκτεταμένου πλήθους δοκιμών. Επίσης, η χρήση του Internet δίνει τη δυνατότητα της πραγματοποίησης μιας αρκετά εκτεταμένης έρευνας, με στόχο την ανίχνευση αντιστοιχιών μεταξύ των δεδομένων του προβλήματος και της πραγματικότητας. Μάλιστα, η εμβάθυνση στις δυνατότητες του διαδικτύου δίνει και τη δυνατότητα καλύτερης διερεύνησης. Για παράδειγμα, η σύνδεση με κόμβους που σχετίζονται με θέματα εκπαιδευτικής και γενικότερα επιστημονικής έρευνας μπορεί να προσφέρει σημαντική βοήθεια.

Η ίδια η δραστηριότητα επιτρέπει τη διαδικασία της επαλήθευσης της ορθότητας της προτεινόμενης λύσης.

Ο βαθμός δυσκολίας που παρουσιάζει η δραστηριότητα ευνοεί τη συνεργατική μάθηση, δηλαδή το σχηματισμό μικρών ομάδων μαθητών, προκειμένου να βρεθεί η λύση.

Κατά την πορεία χρειάζεται να απαντηθούν και ερωτήσεις που δε βρίσκονται στην αρχική εκφώνηση.

Είναι δυνατό να υπάρξουν διάφορες προσεγγίσεις. Για παράδειγμα, θα ήταν δυνατόν κάποιοι μαθητές να οδηγηθούν στο αποτέλεσμα μέσα από τη διαδικασία της επίλυσης ως προς ν της εξίσωσης $\nu+\nu+1=\kappa$. Στην περίπτωση αυτή ο γενικός διδακτικός στόχος της δραστηριότητας παραμένει ο ίδιος, όμως χρειάζονται αλλαγές στις ενδιάμεσες στρατηγικές.

Τέλος, η σχετική αυτονομία του μαθητή μέσα από την εργασία σε μικρές ομάδες είναι δυνατό να καλύψει και συναισθηματικούς στόχους, όπως είναι η χαρά της ανακάλυψης, το μοίρασμα με άλλα άτομα όλων των βιωμάτων που αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια της πορείας προς την παραγωγή της νέας γνώσης, η ευχαρίστηση λόγω της ελεύθερης κίνησης των ιδεών, η αποβολή του άγχους που συνεπάγεται η παραδοσιακού τύπου αξιολόγηση κτλ.

Συζήτηση

Προκειμένου να εισαχθούν με επιτυχημένο τρόπο στην εκπαίδευση οι σύγχρονες απόψεις για τη διδακτική των μαθηματικών χρειάζονται ορισμένες προϋποθέσεις.

Πρώτη προϋπόθεση είναι η στροφή προς τον παράγοντα καθηγητή, ο οποίος έχει επωμιστεί ένα πολύ δύσκολο ρόλο, αφενός να κατανοήσει τι σημαίνουν οι σύγχρονες απόψεις για τα μαθηματικά και αφετέρου να υλοποιήσει τις απόψεις αυτές σε επίπεδο καθημερινής σχολικής πραγματικότητας. Αυτό συνεπάγεται τη δυνατότητα της απόρριψης της ασφάλειας που του παρέχει το γνωστό και καθιερωμένο για πολλά χρόνια μοντέλο εκπαίδευσης. Επομένως, αναγκαίοι όροι είναι αφενός η επιμόρφωση των καθηγητών στο νέο τρόπο αντιμετώπισης των μαθηματικών και αφετέρου ο εφοδιασμός τους με κατάλληλα εγχειρίδια για τον καθηγητή. Στην επιμόρφωση, καθώς και στο βιβλίο του καθηγητή χρειάζεται να πραγματοποιηθεί πλήρης και λεπτομερής ανάλυση της έννοιας της «διδασκαλίας μέσω δραστηριοτήτων», η οποία να συνοδεύεται και από κατάλληλα παραδείγματα. Η έννοια αυτή είναι πολύ βασική, διότι γύρω της διαρθρώνονται οι σύγχρονες διδακτικές προσεγγίσεις στο μάθημα των μαθηματικών.

Δεύτερη προϋπόθεση για την ουσιαστική αντιμετώπιση των μαθηματικών μέσα από ένα σύγχρονο πρίσμα είναι η περικοπή της ύλης των σχολικών βιβλίων που αντιστοιχεί στο παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας, διότι αν δε θέλουμε οι σύγχρονες αντιλήψεις να αποτελέσουν μια θεωρητική, αφηρημένη και χωρίς πρακτικό αποτέλεσμα διαδικασία, θα πρέπει να αφιερώσουμε ένα μεγάλο ποσοστό από το διατιθέμενο χρόνο σε δραστηριότητες, χωρίς, πιθανώς, να αναμένουμε σε σύντομο χρονικό διάστημα τα γνωστά μετρήσιμα και συγκρίσιμα αποτελέσματα. Αν θεωρήσουμε ότι για το μάθημα των μαθηματικών διατίθενται το πολύ 120 ώρες, στην πραγματικότητα γύρω στις 100 ώρες, πιστεύουμε ότι δε θα πρέπει να προγραμματισθούν περισσότερες από τις μισές ώρες για τη διδασκαλία μέσα από την κλασική προσέγγιση, διότι ο χρόνος που απαιτείται για την επιτυχημένη πραγμάτευση μιας δραστηριότητας είναι, σε αρκετές περιπτώσεις, το λιγότερο μια διδακτική ώρα.

Τρίτη απαραίτητη προϋπόθεση για την εφαρμογή των σύγχρονων θεωριών μάθησης, είναι η αλλαγή των αντιλήψεών μας όσον αφορά στην αξιολόγηση. Χρειάζεται να πειραματισθούμε στην εφαρμογή και εναλλακτικών τρόπων αξιολόγησης, διότι η κλασική αξιολόγηση δε συνάδει με το νέο πνεύμα.

Τέλος, ένα μεγάλο πρόβλημα είναι ο τρόπος που οι αντιλήψεις αυτές θα συνδεθούν με το Λύκειο και την εισαγωγή στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, όπου οι παραδοσιακές αντιλήψεις για τη διδασκαλία και την αξιολόγηση των μαθηματικών εξακολουθούν να αποτελούν την κυρίαρχη πρακτική. Ο προβληματισμός αυτός θεωρούμε ότι είναι θεμελιώδης και άπτεται της όλης φιλοσοφίας της μαθηματικής εκπαίδευσης, εφόσον αυτή, κατά το *Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών για την Πρωτοβάθμια και Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση* (1997), έχει ενιαίους στόχους και αρχές για όλες τις βαθμίδες, από το Δημοτικό μέχρι και το

Λύκειο. Στην ουσία, το βασικό ερώτημα είναι κατά πόσον είμαστε προετοιμασμένοι, αν χρειασθεί, στο πιθανό ενδεχόμενο της μερικής ή πλήρους επαναδιαπραγμάτευσης του περιεχομένου των εννοιών *σχολείο, εκπαίδευση, τάξη, αξιολόγηση* κτλ.

Βιβλιογραφία

Anthony, G. (1996). Active learning in a constructive framework. *Educational Studies in Mathematics*, 31, 349-369.

Bouvier. A. (1987, Νοέμβριος). Μάθηση – Διδασκαλία – Επιμόρφωση. *Πρακτικά 4ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, Αθήνα.

Hunting, R. P. (1987). Issues shaping school Mathematics Curriculum development in Australia. *The Australian Journal of Education*. 27(1), 45-61.

Θωμαΐδης, Γ. (1999). Μια επισκόπηση ερευνών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στην Ελληνική Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 4, 112-132.

Κεΐσογλου, Σ. (1999, Νοέμβριος). Ο Καντ και τα θεμέλια των σύγχρονων κατασκευαστικών απόψεων για τη διδακτική των μαθηματικών. *Πρακτικά 16ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, Λάρισα.

Κλαουδάτος, Ν. (1999). Τι σημαίνει για τη Μαθηματική Εκπαίδευση «Ενεργητική Στάση ως προς τα Μαθηματικά;». *Επιθεώρηση Επιστημονικών και Εκπαιδευτικών Θεμάτων*. Α(2), 62-77.

Κλαουδάτος, Ν. (2000). Η διδασκαλία των Μαθηματικών με πραγματικά προβλήματα και εφαρμογές – που βρισκόμαστε σήμερα. *Πρακτικά 17ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, Αθήνα.

Κολέζα, Ε. (1997). Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στη διδασκαλία των μαθηματικών. *Πρακτικά 14ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, Μυτιλήνη.

Μπαρκάτσας, Α. (1999). Η θεωρία της Κατασκευής της Γνώσης (Constructivism) και ο ρόλος της στη μαθησιακή διαδικασία και στη διδακτική των Μαθηματικών. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 4, 136-153.

Οικονόμου, Π., & Τζεκάκη. Μ. (1999). Στάσεις, αντιλήψεις και πρακτικές των εκπαιδευτικών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών*, 4, 37-65.

Ράπτης, Α., & Ράπτη, Α. (1998). *Πληροφορική και Εκπαίδευση – Συνολική Προσέγγιση*. Αθήνα: Αυτοέκδοση.

Steffe, L. P. (1991). *Epistemological foundations of mathematical experience*. New York: Springer-Verlag.

Υπουργείο Παιδείας. (1997). *Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών*.

von Glaserfeld, E. (Ed.) *Radical constructivism in mathematics education.*

Dortrecht: Kluwer.
Χατζηθεολόγου. Α. (2000). Μάθηση: Προσωπικός ρυθμός και μαθησιακό στυλ. *Παιδαγωγικός Λόγος*, 1, 128-138.
Χιονίδου, Μ. (1999). *Επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στο Κονστρουκτιβιστικό μοντέλο διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών*. Αθήνα: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

Υποβολή άρθρου,3 Μαΐου 2001