ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΑΠΟ ΜΑΘΗΤΕΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πέτρος Γ. Βερύκιος
Υπ. Διδάκτορας Τμ. Μαθηματικών Παν. Αθηνών
Ροβέρτου Γκάλλι 88, Ηλιούπολη, Αθήνα, 16346
e-mail: pverikios@math.uoa.gr

Περίληψη

Στη βιβλιογραφία τεκμηριώνεται από πλήθος ερευνών η δυσκολία που έχουν οι μαθητές στην κατανόηση των εννοιών της άλγεβρας. Η πλειοψηφία των μαθητών, ακόμα και σε ηλικίες πάνω από 15 χρόνων, δεν έχει την ικανότητα να *ερμηνεύει* τα αλγεβρικά γράμματα, είτε ως *γενικευμένους αριθμούς* είτε ως *συγκεκριμένους άγνωστους*. . Η κύρια ερμηνεία που δίνεται για τις δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα είναι αυτή της σύνδεσης με τα επίπεδα της γνωστικής ανάπτυξης. Υποστηρίζεται επίσης ότι πολλές από τις δυσκολίες των αρχαρίων στην άλγεβρα μαθητών μπορεί να οφείλονται στον τρόπο που διδάσκονται τις αριθμητικές διαδικασίες στο δημοτικό και ο οποίος δεν 'δουλεύει' στην περίπτωση της άλγεβρας ή ακόμη στον παραδοσιακό τρόπος διδασκαλίας που δίνει έμφαση στις δεξιότητες-κάνε ότι κάνω- και δεν βοηθά στη εννοιολογική κατανόηση Στην εισήγηση παρουσιάζουμε ένα test που δόθηκε σε μαθητές Β και Γ Γυμνασίου και αφορά τις παραπάνω αλγεβρικές έννοιες με σκοπό να διαπιστώσουμε αν οι δυσκολίες που καταγράφονται στη βιβλιογραφία είναι σύμφωνες με την ελληνική πραγματικότητα. Τα περισσότερα ερωτήματα προέρχονται από αντίστοιχες διεθνείς έρευνες. Στην εργασία αυτή περιοριζόμαστε στη περιγραφή του test, σε μια έκθεση και ένα πρώτο σχολιασμό των αποτελεσμάτων, υπό το πρίσμα της διεθνούς βιβλιογραφίας και δεν έχουμε στη παρούσα φάση ως στόχο μια σε βάθος ερμηνεία τους. Το test αυτό αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης μελέτης για τη μάθηση και τη διδασκαλία της άλγεβρας στο Γυμνάσιο.

Σύντομη αναφορά στην εκπαιδευτική έρευνα στην άλγεβρα

Στα προηγούμενα χρόνια έχει πραγματοποιηθεί αρκετή έρευνα στη σχολική άλγεβρα και οι ερευνητές έχουν εστιάσει τη προσοχή τους σε συγκεκριμένα φαινόμενα που παρατηρούνταν κατά την εξέλιξη της άλγεβρας όπως για παράδειγμα η φύση του γράμματος ως συμβόλου. O Kuchemann (1981), διατυπώνει ένα πλήθος παρατηρημένων σημασιών για το γράμμα ως σύμβολο όπως 'το γράμμα αγνοείται', 'το γράμμα ως άγνωστος', 'το γράμμα ως αντικείμενο', 'το γράμμα ως μεταβλητή', 'το γράμμα ως γενικευμένος αριθμός' κλπ. Το ίδιο διάστημα η Wagner (1977, 1981) εστίασε τη προσοχή της στο εάν τα παιδιά μπορούν να 'διατηρήσουν μια εξίσωση' υπό την έννοια ότι αν αλλάξει το γράμμα για τον άγνωστο δεν θα αλλάξει το ουσιαστικό νόημα της εξίσωσης. Με την έλευση των υπολογιστών, πολλοί ερευνητές σκέφτηκαν τρόπους με τους οποίους θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ο υπολογιστής για να δώσει νόημα στη μεταβλητή μέσω προγραμματισμού (Tall & Thomas 1991 με basic, Sutherland 1992 με logo, De Marois 1998 με γραφικό υπολογιστή). Ανέδειξαν ποικίλα ενδιαφέροντα φαινόμενα, για παράδειγμα ότι τα παιδιά μπορούν να αντιληφθούν τις μεταβλητές στην αρχή να ισχύουν σαν αντικείμενα (πχ μήλα και πορτοκάλια στην παράσταση 3χ+5ψ) ή σαν ένας κώδικας (πχ α=1,β=2, γ=3, δ=4 ,ε=5,…, ω=24). Όταν έρχονται για πρώτη φορά σε επαφή με την άλγεβρα τα παιδιά πρέπει να αντιμετωπίσουν και να λύσουν αρκετά εμπόδια. Ένα από αυτά είναι η γνωστική αντίθεση μεταξύ της φυσικής γλώσσας και των κανόνων που ισχύουν στην άλγεβρα, για παράδειγμα το 352 έχει νόημα όταν διαβάζεται από αριστερά προς τα δεξιά, η αλγεβρική παράσταση 3.2+5 διαβάζεται και εκτελείται από αριστερά προς τα δεξιά, ενώ η παράσταση 5+3.2 διαβάζεται από τα αριστερά προς τα δεξιά, αλλά εκτελείται από τα δεξιά προς τα αριστερά. Ένα άλλο εμπόδιο δημιουργείται όταν τα παιδιά ερχόμενα σε επαφή με την άλγεβρα, συνηθισμένα να βρίσκουν αριθμητικές απαντήσεις σε μαθηματικά προβλήματα προσδοκούν ότι τα ίδιο θα συμβαίνει και στην άλγεβρα (Kieran, 1981). Σχετικό μ' αυτό το δίλημμα είναι το εμπόδιο 'διαδικασία-αποτέλεσμα', που αιτιολογείται από το γεγονός ότι η παράσταση 5+3χ, για παράδειγμα, αναπαριστά και τη διαδικασία με την οποία υπολογίζεται αυτή η παράσταση και το αποτέλεσμα του υπολογισμού. Προκειμένου να επιτύχει στην άλγεβρα ο μαθητής πρέπει να οργανώσει με κάποιο τρόπο τη σκέψη του για να αντιμετωπίσει αυτά τα εμπόδια. Ο Dubinski και οι συνεργάτες του (Dubinski 1991, Cottrill et all 1996) πρότειναν τη θεωρία *APOS* (Actions, Processes, Objects, Schema) σύμφωνα με την οποία *Ενέργειες* επαναλαμβανόμενες σε *Διαδικασίες*, υποστασιοποιούνται σε *Αντικείμενα* και τελικά 'εμφυτεύονται' σε *Γνωστικά Σχήματα*. Οι Gray & Tall (1991) καθόρισαν το *procept* (*pro*cess-con*cept*) ως το συνδυασμό ενός συμβόλου το οποίο αναπαριστά είτε τη διαδικασία είτε το αποτέλεσμα αυτής της διαδικασίας. Οι Sfard και Linchevski (1994) εξήγησαν ότι ο δυϊσμός *διαδικασία-αντικείμενο* (κάτι αντίστοιχο με την ιδέα του procept των Gray,Tall) μπορεί να επηρεάσει την ανάπτυξη της κατανόησης πχ της σχέσης της ισότητας. Μια συνέπεια του να σκέφτεται ένας μαθητής το σύμβολο της ισότητας, μόνο σαν σύμβολο του "κάνω κάτι" (Behr, Erlwanger και Nichols 1976, Frendenthal, 1973 και Kieran, 1981, αναφέρονται στο T. Goodson-Espy 1998), είναι να μην καταλαβαίνει τις διαδικασίες που χρειάζονται για να λύσει εξισώσεις σαν την 3χ+8=7χ+4, επειδή δεν δέχεται την αρχική πρόταση, ότι αυτές, οι δύο ποσότητες είναι ισοδύναμες. Οι Hercovics και Linchevski (1994), χαρακτήρισαν τις δυσκολίες αυτού του σταδίου, σαν ένα "γνωστικό κενό-εμπόδιο" . Μπορούμε να βρούμε παραδείγματα για το δυϊσμό διαδικασία-αντικείμενο, ουσιαστικά σε κάθε μαθηματικό επίπεδο. Στην αριθμητική για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να θεωρήσει το 3+4 σαν μία οδηγία για να εκτελέσει την πράξη της πρόσθεσης, αλλά μπορεί να αρνηθεί να το θεωρήσει σαν την ποσότητα 7, αν δεν δει το σύμβολο της ισότητας στην έκφραση 3+4=7. Στη περίπτωση αυτή ο μαθητής έχει εστιάσει την προσοχή του στην διαδικασία της πρόσθεσης. Αυτό το θέμα γίνεται υπερβολικά σπουδαίο, όταν οι μαθητές αρχίζουν να αντιμετωπίζουν εκφράσεις όπως 3+χ σε προαλγεβρικές συνθήκες. Εάν οι μαθητές επιμένουν να βλέπουν μια τέτοια έκφραση, μόνο σαν μία ένδειξη του να εκτελέσουν πρόσθεση, τότε μπορεί να αντιμετωπίσουν δυσκολία στο να αποδεχθούν τέτοιες παραστάσεις ως αποτέλεσμα απλοποίησης παραστάσεων, όπως αναφέρει η Collis (1975) (αναφέρεται στο T. Goodson-Espy 1998) σαν "αποδοχή της έλλειψης τερματισμού" και στην κατανόηση των διαδικασιών για την επίλυση εξισώσεων. Φαίνεται ότι, για έναν αρχάριο, η ικανότητα να θεωρεί μία διαδικασία σαν ένα αντικείμενο είναι μία σταδιακή εξέλιξη. Η ιστορική ανάλυση της Sfard (1991), προτείνει ότι για πολλούς ανθρώπους η λειτουργική-διαδικαστική σύλληψη είναι το πρώτο βήμα στην απόκτηση νέων μαθηματικών εννοιών. Αυτό το πλαίσιο στηρίζεται στην υπόθεση ότι η μετάβαση από τις υπολογιστικές διαδικασίες στα αφηρημένα αντικείμενα (σχηματισμός έννοιας από τη διαδικαστική-λειτουργική στη δομική της αντίληψη) πραγματοποιείται μέσω μιας διαδικασίας που ολοκληρώνεται σε τρία στάδια: εσωτερίκευση, συμπύκνωση και υποστασιοποίηση. Το τελευταίο θεωρείται ένα σύνθετο φαινόμενο, το οποίο φαίνεται εγγενώς τόσο δύσκολο, που μπορεί να παραμείνει ουσιαστικά απρόσιτο για ορισμένους μαθητές. Αυτά τα τρία βήματα αποτελούν ένα σχήμα που προτείνει μια ιεραρχία, όπου ένα στάδιο δεν μπορεί να επιτευχθεί προτού να πραγματοποιηθούν τα προηγούμενα. Αυτό έρχεται σε πλήρη συμφωνία με τα στάδια της γνωστικής ανάπτυξης-γνωστικά επίπεδα- όπως ορίστηκαν από τον Piaget, όπου για να φθάσει κάποιος σε ένα γνωστικό επίπεδο πρέπει να περάσει από τα προηγούμενα. Αυτό που έχει υποστεί κριτική στη θεωρία του Piaget είναι οι ηλικίες, στις οποίες γίνεται το πέρασμα από το ένα επίπεδο στο άλλο. Κάθε στάδιο στη διαδικασία του σχηματισμού της έννοιας, συνεχίζει η Sfard μπορεί να συνοψιστεί ως εξής: η εσωτερίκευση χαρακτηρίζεται ως η διαδικασία που εκτελείται σε ήδη γνωστά αντικείμενα, η συμπύκνωση έχει να κάνει με το στάδιο στο οποίο αυτή η διαδικασία μετατρέπεται σε αυτόνομη οντότητα και η υποστασιοποίηση αφορά τη δυνατότητα να θεωρηθεί αυτή η νέα οντότητα ως ένα ολοκληρωμένο - μαθηματικό - αντικείμενο, το οποίο έχει αποκτηθεί. Η Sfard υποστηρίζει ότι η θεωρία της μπορεί να εφαρμοστεί για να αναπτυχθεί μια διδακτική προσέγγιση στην άλγεβρα. Η πρότασή της στηρίζεται στο επιχείρημα ότι η δομική προσέγγιση είναι περισσότερο αφαιρετική από τη λειτουργική, ο οποία υπονοεί ότι ένας μαθητής θα μπορούσε μετά βίας να φθάσει σε μια δομική σύλληψη χωρίς προηγούμενη λειτουργική κατανόηση.

Η παραδοσιακή διδασκαλία επιχειρεί να αντιμετωπίσει τα εμπόδια δίνοντας έμφαση στους υπολογισμούς και στο χειρισμό αλγεβρικών παραστάσεων, για παράδειγμα οι μαθητές διδάσκονται κανόνες έτσι ώστε να αναπτύξουν τις απαιτούμενες δεξιότητες ελπίζοντας ότι η κατανόηση θα ακολουθήσει. Είναι τεκμηριωμένο ότι οι μαθητές έχουν μεγάλη δυσκολία στην επιθυμητή κατανόηση (Matz 1980, Kuchemann 1981, Wagner, Rachlin & Jensen 1984). Υπάρχει πλήθος ενδείξεων από tests, αποτελέσματα σε διάφορες εξετάσεις και βαθμούς εισαγωγής στα πανεπιστήμια, ότι η έμφαση σε χειριστικές δεξιότητες δεν έχουν ως αποτέλεσμα την επιθυμητή κατανόηση.
Αν λοιπόν τα γνωστικά επίπεδα αποτελούν ένα φράγμα για τη κατασκευή ορισμένων εννοιών, αυτό μπορεί να εξηγήσει το γιατί οι μαθητές δεν μπορούν να κάνουν ορισμένες αλγεβρικές εργασίες. Αυτή η υπόθεση μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι ίσως πρέπει να επανεξετάσουμε το *τι* μαθηματικά διδάσκουμε και *πως* τα διδάσκουμε στους μαθητές μας.

Πολλές μελέτες έχουν πραγματοποιηθεί με στόχο ένα θεωρητικό υπόβαθρο για τη διδασκαλία και τη μάθηση της άλγεβρας. Ενδιαφέρον προς αυτή τη κατεύθυνση αποτελούν οι εργασίες στις οποίες αναφερθήκαμε συνοπτικά των Herscovics, Tall, Dubinski και της Sfard (εκτενέστερα), η εργασία που έγινε από τον Mason (1984) στην *έκφραση γενικότητας* ως ιδιαίτερης διαδρομής της αλγεβρικής σκέψης και οι θέσεις που αναπτύχθηκαν από τον Freudenthal και τους συνεργάτες του και οδήγησαν στη θεωρία της *Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης* (ΡΜΕ). Η ΡΜΕ προτείνει, αφετηρία στη διδασκαλία να είναι τα μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα και όχι ως ένα κατασκευασμένο σύστημα. Η δραστηριότητα προτείνεται ως τρόπος να επινοήσουν οι μαθητές μαθηματικές έννοιες μέσα από προβλήματα. Πυρήνας της δραστηριότητας είναι η μαθηματικοποίηση υλικού, είτε καθημερινών είτε μαθηματικών καταστάσεων. Όρος κλειδί είναι η 'καθοδηγούμενη επινοητικότητα'. Έτσι το ζητούμενο είναι το πώς θα βοηθήσει ο δάσκαλος τους μαθητές να κατακτήσουν τα μαθηματικά με βάση το 'σχήμα' καθοδηγούμενη επινοητικότητα $\rightarrow$ προοδευτική μαθηματικοποίηση.

Κριτική της σχολικής άλγεβρας – Η Ελληνική πραγματικότητα

Η κριτική για τη σχολική άλγεβρα αναφέρεται στη βιβλιογραφία για άλλες χώρες αλλά όπως θα παρατηρήσουμε έχει άμεση συσχέτιση και με την Ελληνική πραγματικότητα. Τα κύρια προβλήματα που αναφέρονται στη διδασκαλία της σχολικής άλγεβρας έχουν να κάνουν με τη γλώσσα της άλγεβρας, τη δομή της και την έλλειψη πρακτικής χρήσης της άλγεβρας από τους μαθητές. Ένα άλλο σοβαρό ζήτημα είναι ο τρόπος διδασκαλίας. Οι μαθητές φαίνεται ότι μαθαίνουν να αντιγράφουν κανόνες και αλγεβρικούς χειρισμούς από το δάσκαλό τους χωρίς πραγματική κατανόηση για το *τι* και το *πώς*. Δίνεται λίγη προσοχή στη *γενίκευση* και στη δυναμική όψη των *μεταβλητών*. Το *άλμα* στο τυπικό επίπεδο γίνεται πολύ γρήγορα, σχεδόν σε μια ή δυο σελίδες του σχολικού βιβλίου, έτσι δεν δίνεται επαρκής χρόνος στους μαθητές για να αναπτύξουν τα δικά τους γνωστικά σχήματα.

Μία από τις σημαντικότερες ερμηνείες που προτείνονται για τι δυσκολίες των μαθητών στην άλγεβρα είναι ο αφηρημένος και χωρίς αναφορικό νόημα τρόπος προσέγγισης των εννοιών της. Οι μαθητές δεν κατανοούν γιατί μαθαίνουν τους διάφορους συμβολισμούς και τους χειρισμούς τους και αδυνατούν να κάνουν μια σύνδεση όλων αυτών των εννοιών και ταυτόχρονα όλες αυτές οι έννοιες να έχουν μια πραγματική αναφορά στις εμπειρίες τους με βάση τις οποίες θα κατασκευάσουν ένα νόημα για τις έννοιες που διδάσκονται.

Στο Ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα και τα βιβλία δεν φαίνεται να υπάρχει ένας σαφής και με συγκεκριμένους στόχους προσανατολισμός, για την εισαγωγή στην άλγεβρα. Αν θεωρήσουμε ότι η εισαγωγή στην άλγεβρα γίνεται όταν αρχίζουν να χρησιμοποιούνται τα 'γράμματα' ως αφηρημένα αριθμητικά σύμβολα, είτε για να γενικεύσουν ιδιότητες του αριθμητικού συστήματος, τις οποίες έχουν ήδη παρατηρήσει οι μαθητές όπως για παράδειγμα 5+3=3+5, την οποία γενικεύουν ως α+β=β+α, είτε ως άγνωστο για την επίλυση εξισώσεων με βάση ιδιότητες πράξεων όπως για παράδειγμα 5+3=8 ή 5=8-3 και 3.4=12 ή 3=12:4, τις οποίες γενικεύουν ως χ+3=8 ή χ=8-3 και 4.χ=12 ή χ=12:4, τότε από την Α Γυμνασίου γίνεται μια εισαγωγή στην άλγεβρα με τον τρόπο αυτό. Επίσης χρησιμοποιούνται τα γράμματα για να γενικεύσουν μια συγκεκριμένη καινούργια ιδιότητα ή ένα ορισμό, για παράδειγμα $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha.\beta+\alpha.\gamma$ ή $\chi+\chi+\chi+\chi=4\chi$ ή $\alpha^{\nu}=\alpha.\alpha.\alpha.\alpha\ldots\alpha$. Επίσης τα 'γράμματα' χρησιμοποιούνται σε τύπους πχ εμβαδών $E=\frac{1}{2}\beta\upsilon$. Στη Β τάξη γίνεται μια πιο συστηματική χρήση της άλγεβρας με επίλυση γραμμικών εξισώσεων, η διδασκαλία των οποίων εξαντλείται μέσα σε τρεις σελίδες του σχολικού βιβλίου, όπου παρουσιάζονται εξισώσεις με άγνωστο και στα δύο μέλη, με παρενθέσεις, με δεκαδικούς συντελεστές, με κλασματικούς συντελεστές, αδύνατες και αόριστες. Είναι τεκμηριωμένες στη βιβλιογραφία οι δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές στην εννοιολογική κατανόηση της επίλυσης εξισώσεων(MacGregor M., 1999, Pirie S. & Martin L., 1997, Kieran, 1989, 1994, 1997). Δεν είναι περίεργο που οι μαθητές 'μαθαίνουν' αλγοριθμικές διαδικασίες, αν αναλογιστεί κανείς ότι τη κύρια μεθοδολογική προσέγγιση αποτελεί η συνταγή 'αλλάζω μέλος, αλλάζω πρόσημο'. Προσέγγιση που έχει υποστεί ισχυρή κριτική και ενισχύει τεχνικές και τρικ χωρίς κατανόηση. Η συνάρτηση, που αποτελεί μια από τις κεντρικές έννοιες στα μαθηματικά, αποτελεί ένα ξεκομμένο κεφάλαιο της ύλης των μαθηματικών του Γυμνασίου. Με παρόμοιο τυπικό τρόπο προσεγγίζεται και η ύλη των μαθηματικών στη Γ τάξη, περιλαμβάνοντας στοιχεία άλγεβρας από τετραγωνικές ρίζες, διάταξη πραγματικών αριθμών, ταυτότητες και παραγοντοποίηση, εξισώσεις δευτέρου βαθμού, κλασματικές εξισώσεις που ανάγονται σε δευτεροβάθμιες, συναρτήσεις (γραμμική και δευτεροβάθμια), συστήματα εξισώσεων πρώτου και δεύτερου βαθμού.

Ο μεγάλος μαθηματικός και φιλόσοφος Bertrand Russell αναφέρει στην αυτοβιογραφία του (αναφέρεται στο Henk van der Kooij, 2001): «Το ξεκίνημα της άλγεβρας το βρήκα πολύ δύσκολο, ίσως ως αποτέλεσμα κακής διδασκαλίας. Έπρεπε να αποστηθίσω : 'το τετράγωνο του αθροίσματος δύο αριθμών είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων τους αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενό τους'. Δεν είχα την παραμικρή ιδέα τι σήμαινε αυτό και όταν δεν μπορούσα να θυμηθώ τα λόγια, ο δάσκαλος μου πέταγε το βιβλίο στο κεφάλι μου, πράγμα που δεν διέγειρε με κανένα τρόπο τη νόησή μου». Το απόσπασμα αυτό από την αυτοβιογραφία το B. Ruseell υποδηλώνει τον τρόπο με τον οποίο 'διδάσκονταν και μαθαίνονταν' για ένα πολύ μεγάλο διάστημα τα μαθηματικά. Έχουν περάσει από τότε πάνω από εκατό χρόνια και στα βιβλία μας μπορεί κανείς να δει και σήμερα τέτοιες ασκήσεις με αλγορίθμους ρουτίνας που μαθαίνονται χωρίς κατανόηση του νοήματος με αποστήθιση από τους περισσότερους μαθητές. 'Η παραδοσιακή διδασκαλία όπως τονίζει η Kieran (1997), έχει αμελήσει και δεν έχει δείξει την απαιτούμενη προσοχή στην παροχή εννοιολογικής κατανόησης των αλγεβρικών συμβόλων. Πολύ συχνά η μόνη έμφαση που δίνεται είναι στις εξισώσεις και στη λύση εξισώσεων. Η χρήση των γραμμάτων για την παράσταση γενικότητας προκειμένου να δικαιολογήσουμε, να εικάσουμε ή να προβλέψουμε και να αποδείξουμε έχει παραμεληθεί σφοδρά. Εκείνοι που θα επιχειρούσαν να δώσουν περισσότερο νόημα στα σύμβολα της άλγεβρας χρησιμοποιώντας την έννοια της *συνάρτησης* ως ένα ενοποιητικό νήμα έχουν τη δυνατότητα στη διδασκαλία τους να παρέχουν αυτά τα σύμβολα με μια λογική, η οποία προηγουμένως απουσίαζε'.

Παραθέτουμε στη συνέχεια το test, το οποίο δόθηκε σε 3 τμήματα της Β και 3 της Γ Γυμνασίου σε δύο διαφορετικά σχολεία ενός μέσου προαστίου της Αθήνας. Συνολικά το test δόθηκε σε 167 μαθητές και μαθήτριες. Ο χρόνος που είχαν στη διάθεσή τους για να απαντήσουν ήταν 60 λεπτά. Το τεστ αυτό αποτελεί μέρος μιας ευρύτερης μελέτης για τη μάθηση και τη διδασκαλία της άλγεβρας στο Γυμνάσιο.

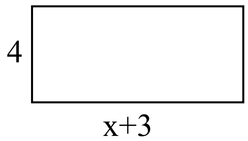
Στη συνέχεια δίνουμε στοιχεία και το στόχο για κάθε ερώτηση χωριστά, παραθέτουμε τις απαντήσεις σε έναν εκτενή πίνακα καθώς επίσης και μερικούς συγκριτικούς πίνακες και τέλος σχολιάζουμε και συζητάμε τις απαντήσεις των μαθητών.

Στην εργασία αυτή κάνουμε μια περιγραφή του test, μια παρουσίαση των απαντήσεων και ένα πρώτο σχολιασμό των απαντήσεων των μαθητών, χωρίς να στοχεύουμε στην παρούσα φάση σε μια εις βάθος ερμηνεία τους, πράγμα το οποίο είναι στους στόχους μας να γίνει με την ολοκλήρωση της έρευνας που διεξάγουμε. Τα όποια αποτελέσματα και συμπεράσματα δεν μπορούν να γενικευτούν, αποτελούν όμως ενδείξεις για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στη μάθηση και κατανόηση εννοιών της άλγεβρας οι μαθητές του Γυμνασίου.

ΤΟ TEST

Πρόβλημα 1

Δίνεται το ορθογώνιο



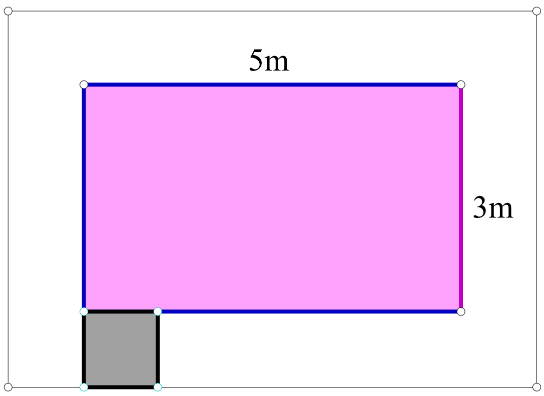
1. Ποιο είναι το εμβαδόν του;
2. Ποια είναι η περίμετρός του;

3. Ποια από τις ακόλουθες εξισώσεις έχει την ίδια λύση με την εξίσωση 6(x-4)=10; Α) 6x-4=10 Β) x-4=4 Γ) 3x-12=5 Δ) 3x-6=5

4. Η Αθηνά κέρδισε α € κατά τη διάρκεια της βδομάδας. Από αυτά ξόδεψε β € για ρούχα και γ € για τρόφιμα. Γράψτε μια παράσταση χρησιμοποιώντας τα α,β,γ, η οποία να αναπαριστά τον αριθμό των € που της απέμειναν

Πρόβλημα 2

Μια πισίνα σχήματος ορθογωνίου έχει διαστάσεις 5m μήκος και 3m πλάτος. Περιμετρικά της πισίνας υπάρχει διάδρομος πλάτους 1m, που πρέπει να στρωθεί με πλάκες 1 m^2 (στο σχήμα φαίνεται τοποθετημένη μια τέτοια πλάκα).
1. Πόσες πλάκες θα χρειαστούν;
2. Αν οι διαστάσεις της πισίνας είναι μ m μήκος και π m πλάτος, πόσες τετραγωνικές πλάκες 1 m^2 θα χρειαστούν;



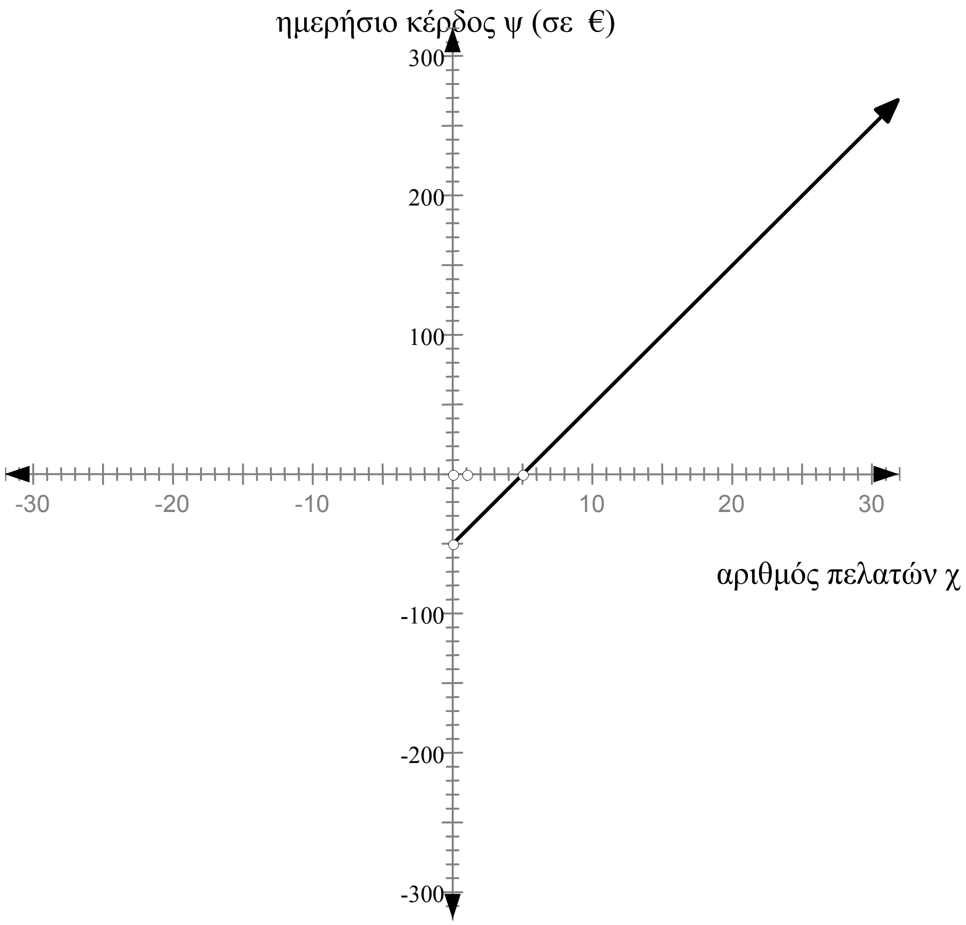
Πρόβλημα 3

Στον παρακάτω πίνακα ο ψ προκύπτει από τον χ με ένα συγκεκριμένο κανόνα. Συμπληρώστε το πίνακα και διατυπώστε τον κανόνα ή εκφράστε τον ψ συναρτήσει του χ.
(Υπόδειξη: Μπορείτε, αν θέλετε, να παραστήσετε κάθε ζεύγος αριθμών με ένα σημείο σε ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων)

x	1	3	4	7	;
y	8	;	11	14	21

Πρόβλημα 4

Το διάγραμμα αναπαριστά το ημερήσιο κέρδος ψ ως συνάρτηση του αριθμού χ των πελατών ενός μικρού ξενοδοχείου δυναμικότητας 30 κλινών.



1. Για ποιο αριθμό πελατών το ξενοδοχείο δεν έχει ούτε κέρδος ούτε ζημιά;
2. Με πόσους πελάτες το ξενοδοχείο έχει ζημιά;
3. Με πόσους πελάτες το ξενοδοχείο έχει κέρδος;
4. Πόσους πελάτες πρέπει να έχει το ξενοδοχείο για να έχει κέρδος 150 €;

Ανάλυση – Στόχοι των ερωτήσεων του test

Ο γενικός σκοπός του τεστ ήταν να διαπιστωθεί αν οι μαθητές του Γυμνασίου που έχουν διδαχτεί τουλάχιστον ένα σχολικό έτος στοιχεία άλγεβρας κατέχουν βασικές δεξιότητες στο χειρισμό αλγεβρικών παραστάσεων. Οι ειδικοί στόχοι είναι οι εξής για κάθε ερώτηση:

Με τις ερωτήσεις 1 και 2 του προβλήματος 1 θέλουμε να διαπιστώσουμε αν οι μαθητές μπορούν να κάνουν πράξεις σε απλές αλγεβρικές παραστάσεις, αφού προηγουμένως τις σχηματίσουν, αν μπορούν να χειριστούν την αλγεβρική παράσταση ως ένα μαθηματικό αντικείμενο και αν οι μαθητές μπορούν να αποδεχτούν ως αποτέλεσμα μιας διαδικασίας μια ανοικτή έκφραση ή αν περιμένουν να βρουν ως απάντηση ένα συγκεκριμένο αριθμό. Η ερωτήσεις αυτές έγιναν με βάση έρευνες που αφορούν τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι αρχάριοι στην άλγεβρα μαθητές στην αντιμετώπιση αλγεβρικών παραστάσεων.

Με την ερώτηση 3 του προβλήματος 1 θέλουμε να διαπιστώσουμε αν οι μαθητές μπορούν να λύνουν απλές γραμμικές εξισώσεις, αν οι μαθητές έχουν κατανοήσει την ισοδυναμία μεταξύ δύο εξισώσεων εξετάζοντας αν μπορούν να διακρίνουν δύο ισοδύναμες μεταξύ τους εξισώσεις και τον τρόπο που προκύπτει μια ισοδύναμη εξίσωση με μια άλλη, χωρίς να χρειαστεί να τις λύσουν.

Με την ερώτηση 4 θέλουμε να διαπιστώσουμε αν μπορούν οι μαθητές, χρησιμοποιώντας αλγεβρικό συμβολισμό να κατασκευάσουν μια αλγεβρική παράσταση, για τη μαθηματικοποίηση μιας κατάστασης. Ο D. Kuchemann (1981), αναφέρει ότι οι περισσότεροι μαθητές 11-16 χρόνων από το μεγάλο δείγμα. που χρησιμοποίησε στο πρόγραμμα '*έννοιες στα δευτεροβάθμια μαθηματικά και την επιστήμη*' ήταν ανίκανοι να αντιμετωπίσουν θέματα που απαιτούσαν την ερμηνεία των γραμμάτων ως γενικευμένων αριθμών ή ως αγνώστων. Παρόμοια αποτελέσματα αναφέρει ο Carpenter (Carpenter et al, 1981). Αυτά τα αποτελέσματα ρίχνουν φως στο πρόβλημα της μετάφρασης από ένα συμβολικό σύστημα (φυσική γλώσσα) σε ένα άλλο (αλγεβρικός κώδικας), το οποίο εμφανίζει τη δυσκολία που έχουν οι αρχάριοι μαθητές της άλγεβρας κατά τη χρήση ενός νέου συμβολικού συστήματος, όταν σύμφωνα με τα αποτελέσματα του Kuchemann, δεν εξοικειώνονται ακόμα με τη σημασιολογική δομή του.

Με την ερώτηση 1 του προβλήματος 2 θέλουμε να διαπιστώσουμε αν μπορούν οι μαθητές να λύνουν προβλήματα, κατανοώντας εκφράσεις που εμπλέκονται σε μια πραγματική κατάσταση. Με την ερώτηση 2 θέλουμε να διαπιστώσουμε αν μπορούν οι μαθητές να γενικεύσουν μια κατάσταση, χρησιμοποιώντας αλγεβρικό συμβολισμό. Το πρόβλημα αυτό προέρχεται από το άρθρο του D. Tall 'The transition from arithmetic to algebra: Number patterns or proceptual programming?' στο οποίο αναφέρει τις δυσκολίες που παρουσιάζουν οι λιγότερο ικανοί μαθητές όταν προσπαθούν να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ αριθμητικής και άλγεβρας, προσπαθώντας από τους συγκεκριμένους αριθμούς να γενικεύσουν με τη χρήση γραμμάτων, πράγμα που για τους μαθητές που βρίσκονται στο στάδιο των συγκεκριμένων ενεργειών αποτελεί ένα κενό που μοιάζει σχεδόν αδύνατο να γεφυρώσουν. Το θέμα αυτό αναφέρεται επίσης στα 'NCTM Standards 2000, για τα Grades 6-8', ως μια ερευνητική δραστηριότητα, για να αποκτήσουν οι μαθητές την ευχέρεια να εναλλάσονται μεταξύ διαφόρων αναπαραστάσεων ενός προβλήματος. Αυτή η ελαστικότητα μπορεί να αναπτυχθεί καθώς οι μαθητές αποκτούν εμπειρίες με πολλαπλούς τύπους αναπαράστασης ενός προβλήματος.

Στο πρόβλημα 3 θέλουμε να διαπιστώσουμε αν μπορούν οι μαθητές να συνδέσουν τον πρώτο αριθμό του ζεύγους με τον δεύτερο και να βρουν το ένα στοιχείο του ζεύγους όταν είναι γνωστό το άλλο και να διαπιστώσουμε αν μπορούν οι μαθητές να περιγράψουν, να εικάσουν τον σχετικό κανόνα, με τον οποίο παράγονται τα στοιχεία του πίνακα, είτε περιγράφοντάς τον είτε γράφοντας τον σχετικό τύπο. Το συγκεκριμένο πρόβλημα προέρχεται από το άρθρο των Carpenter, T.P, M.K. Corbit, H. S. Pepner Jr., M. M. Lindquist and P.E. Reys: 'Results from the second mathematics assessment of the national assessment of education progress. Reston: NCTM, 1981'. (Αναφέρεται στο: PBS mathline, ATMP lesson: Up, Up, and Away) όπου αναφέρεται ότι στην εύρεση του y όταν x=3, απάντησε σωστά μόνο το 35% των 13-χρονων και μόνο το 59% των 17-χρονων.

Στο πρόβλημα 4 ο γενικός στόχος είναι να διαπιστώσουμε αν μπορούν οι μαθητές να κάνουν ερμηνεία ενός γραφήματος μιας συνάρτησης, η οποία είναι μοντέλο μιας -πραγματικής- κατάστασης. Οι ειδικοί στόχοι για κάθε ερώτηση είναι να διαπιστώσουμε αν μπορούν οι μαθητές: α) - στην ερώτηση 1- να ερμηνεύσουν το σημείο, με x=0 ως το σημείο όπου η επιχείρηση δεν έχει κέρδος ούτε ζημία [ή με άλλα λόγια να διαπιστώσουμε αν μπορούν οι μαθητές να λύσουν γραφικά –αν και δεν ερωτούνται με ρητό τρόπο- την εξίσωση ax+b=0, με y=ax+b την εξίσωση της ευθείας], β) να λύσουν γραφικά –αν και δεν ερωτούνται ευθέως- τις ανισώσεις ax+b>0 ή <0 , (ερωτήσεις 2 και 3) γ) να εκτιμήσουν το ένα μέλος του ζεύγους (x,y) όταν τους δίδεται το άλλο, μέσω του γραφήματος (ερώτηση 4).

Αποτελέσματα test

Τις απαντήσεις των μαθητών τις κατατάξαμε σε 3 κατηγορίες: Η κατηγορία με τον χαρακτηρισμό 2 αντιστοιχεί σε '*σωστή απάντηση'*. Η κατηγορία με τον χαρακτηρισμό 1 αντιστοιχεί σε απάντηση στην οποία ο μαθητής '*κάτι έκανε-όχι σωστό'*. Η κατηγορία με τον χαρακτηρισμό 0 αντιστοιχεί σε απάντηση η οποία '*είναι εντελώς λανθασμένη ή δεν έχει απαντήσει καθόλου*'. Τα γράμματα Β, Γ, όπου αναφέρονται αντιστοιχούν σε Β , Γ τάξη και το Σ αντιστοιχεί στο σύνολο των μαθητών Β και Γ τάξης.

Πίνακας 1

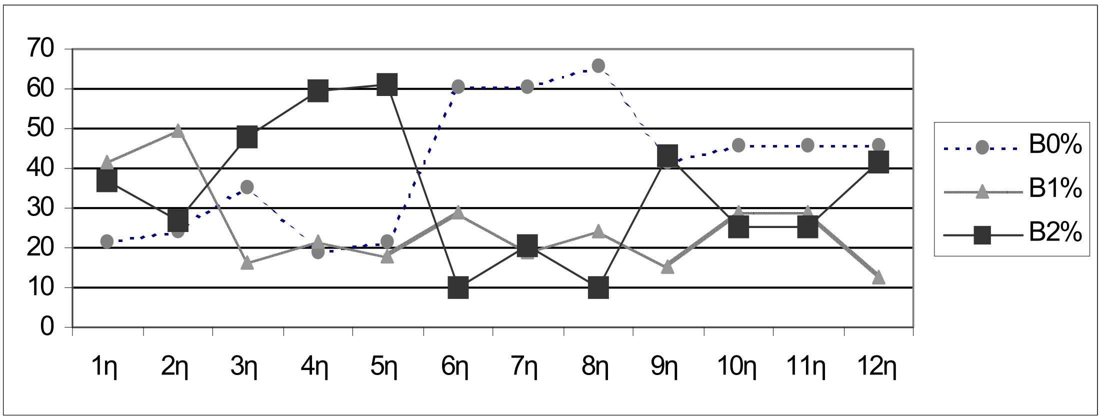
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ που παρουσίασαν οι μαθητές στο test [κατηγορίες 2 και 1]		
ΕΡΩΤΗΣΗ	*ΣΩΣΤΗ* *[2]*	*ΚΑΤΙ ΕΚΑΝΕ- ΟΧΙ ΣΩΣΤΟ* *[1]*
1^{η} Εμβαδόν ορθογωνίου με διαστάσεις 4, χ+3	1. (χ+3)4=4χ+12 2. 4 · χ+3=4χ+12 3. 4(χ+3) 4. 4 · χ+3 ή χ+3 · 4	1. (χ+3)4=4χ+12=16χ ή 4 · χ+3=4χ+12=16χ 2. 4(χ+3)=4χ+3 ή 4(χ+3)=4χ+7 3. α.α.α.α=4.α ή 4.3χ ή(χ+3).4=3χ.4=12χ ή (χ+3).4=12 ή (χ+3).4=14χ ή χ+3.4=χ+12=13
2^{η} Περίμετρος ορθογωνίου με διαστάσεις 4, χ+3	1. 2.4+(χ+3).2=8+2χ+6=14+2χ 2. 4+4+χ+3+χ+3=8+2χ+6=14+2χ 3. 2[4+(χ+3)] ή 4.2+[(χ+3).2] 4. 4+4+χ+3+χ+3=8+2χ+6 5. 4+4+χ+3+χ+3=8+(χ+3)+(χ+3) 6. 4+4+χ+3+χ+3=8+2.(χ+3) 7. 4+(χ+3)+4+(χ+3)	1. 2(χ+3)+2.4=6χ+8 2. 4+4+(χ+3)+(χ+3)=8+6χ 3. 2.4+2(χ+3)=8+2χ+3=11+2χ 4. 4+4+3χ+3χ 5. (χ+3)+4=3χ+4=12χ.2=24χ 6. 2.4+(χ+3).2=8+2χ+3=10χ+3=13χ 7. Δίνεται συγκεκριμένη τιμή στο χ πχ 1 και υπολογισμός: 4+4.2=16 ή 2(χ+3)=2(1+3)=8 8. (χ+3+4)+(χ+3+4)=χ+6+8=χ+14 9. 4+(χ+3)+4+(χ+3)=7χ+7χ=14χ 10. 4+(χ+3)+4+(χ+3)=6χ+8=14χ 11. 2.4+2(χ+3)=8+2χ+6=$\frac{2\chi}{2}+\frac{14}{2}=\chi+7$ ή 4+χ+3=7+χ 12. 2.4.2.(χ+3)=8.2χ.6 13. Αγνοείται εντελώς το χ και εύρεση της περιμέτρου για διαστάσεις 4 και 3. 14. Εύρεση ενός αποτελέσματος για την περίμετρο – συνήθως το σωστό 14 +2χ, μετατροπή σε εξίσωση
3^{η} Εξίσωση ισοδύναμη με την 6(χ-4)=10	1. Πολλαπλασιασμός της Γ με 2 ή διαίρεση της δεδομένης εξίσωσης με 2, οπότε προκύπτει η Γ 2. Λύση μόνο της αρχικής ή μόνο της Γ 3. Λύση της αρχικής και της Γ 4. Απάντηση Γ, χωρίς εξήγηση 5. Εξήγηση με ιδιότητα, αλλά όχι σαφής 6. Με λύση όλων των εξισώσεων	1. Εξήγηση με ιδιότητα, όχι με σαφή τρόπο, ότι είναι ισοδύναμη είναι η Α 2. Άλλες απαντήσεις ήταν Β ή Δ ή και ταυτόχρονα Β και Δ ή Γ και Δ
4^{η} Μετάφραση μιας κατάστασης σε αλγεβρική γλώσσα [α,β,γ, €]	1. α-(β+γ) 2. α-β-γ 3. (α-β)-γ 4. α-(β+γ)=χ ή α-(β+γ)=δ ή α-β-γ=χ ή α-β-γ=δ 5. α-β=δ και δ-γ=ε 6. α-χ=β+γ 7. α=β+γ+χ 8. χ=α-(β+γ)	1. α-β+γ 2. α=α-(β+γ) 3. α-(β+γ)=α-βγ 4. α-(β,γ)=χ 5. α-β+α-γ=α-(β+γ) 6. β+γ-α 7. β-γ+α 8. Με συγκεκριμένες τιμές για τα α, β ,γ
5^{η} Πισίνα [1ο ερώτημα, με συγκεκριμένες διαστάσεις]	1. 20, εξήγηση χωρίς χρήση εμβαδών 2. Με χρησιμοποίηση τύπων εμβαδών: Εμβαδόν μεγάλου ορθογωνίου – Εμβαδόν μικρού ορθογωνίου. Συγκεκριμένα E_1-E_2=35-25=20 3. 20, χωρίς εξήγηση 4. (6.2)+(2.4)=20	1. 5+5+7+7=24 2. 5.3=15 ή 15 χωρίς εξήγηση 3. 3.5+4=19 4. Χρήση περιμέτρου: 5+3+3=16 ή 5.2+3.2=16

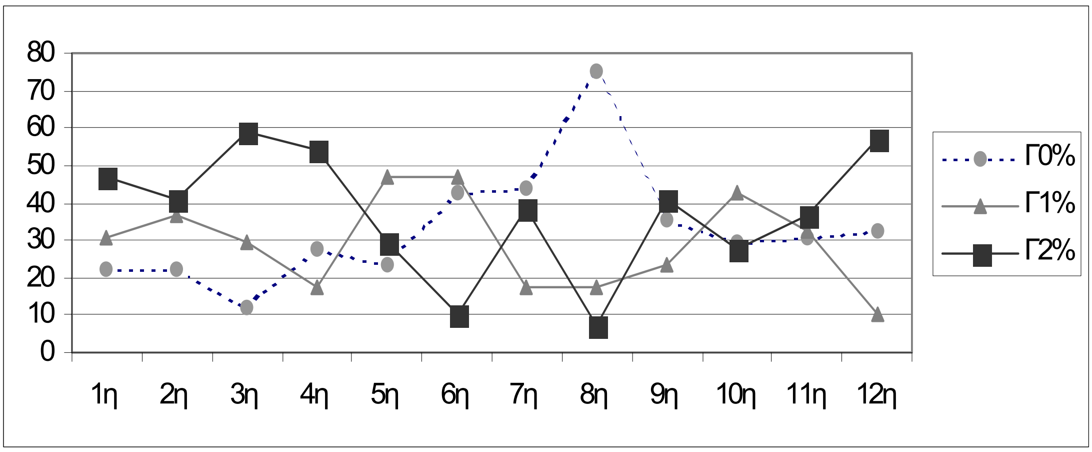
6η Πισίνα [2ο ερώτημα, γενίκευση, με διαστάσεις μ και π]	1. (μ+2)(π+2)-μπ ή μ+2 . π+2 – μπ 2. 2μ+2π+4=χ ή μ+π+μ+π+4 ή (2μ+4)+2.2 3. 20, χωρίς εξήγηση	1. 2μ+2μ+2π+2π 2. (μ.π).(π.2) ή μ.ν+π.π 3. (πμ+2)-πμ ή μπ-μπ+2.2 4. 5.3=15 ή μπ [18] 5. 2μ+2π ‘η μ+μ+π+π 6. (μ+1)+(π+1).2
7η Συμπλήρωση πίνακα	1. (3,10), (14,21) 2. (3,10), (14,21) ή (3,10), (13,21) με γράφημα	1. Χρήση ανάλογων ποσών 2. (3,9,5), (9,21) ή (3,10), (10,21) ή άλλο ζεύγος λάθος 3. (3,10) και το άλλο ζεύγος λάθος
8η Πίνακας, διατύπωση κανόνα	1. Τα χ και ψ έχουν διαφορά 7 2. Στο χ προσθέτουμε το 7 και βγαίνει το ψ 3. Σε κάθε αριθμό ψ αφαιρούμε 7 και βγαίνει το χ 4. ψ-7=χ 5. Όλα τα ζευγάρια έχουν αφαιρετέο το 7 6. ψ=χ+7, σε 2 απαντήσεις και σχήμα,	1. Ψ=αχ+β 2. Εξήγηση με λόγια, ασαφής 3. Όσο αυξάνεται το χ αυξάνεται και το ψ 4. Ψ=χ+β 5. Τα ποσά δεν είναι ανάλογα, άρα πρέπει να είναι αντιστρόφως ανάλογα 6. Τα ποσά είναι ανάλογα 7. Η αναλογία στις τιμές των χ και ψ είναι 2/7
9η Γράφημα [ούτε κέρδος, ούτε ζημία]	1. 5 πελάτες 2. (5,0)	1. 0 2. 10 3. Το 30% των πελατών 4. 1 5. περίπου 15 6. 20 ή 27 ή 30 ή 35 7. (0,5) 8. Με 25 πελάτες δεν κερδίζει λίγα, αλλά ούτε και πολλά
10η Γράφημα [πότε έχει ζημία]	1. Κάτω από 5 2. Χ<5 ή $5 > \chi \geq 1$ 3. Από 1 μέχρι και 4 ή $0 \leq 4$	1. 5 πελάτες 2. κάποιος άλλος αριθμός όπως 25 ή –5 ‘ή 10 ή 4 ή 0 ή 1 3. 30 ή με λιγότερους από 30 ή πάνω από 30 4. 9 και κάτω ή κάτω από 100 5. Δεν έχει ζημιά ή λιγότερους από την πρώτη ημέρα 6. $0 \leq 4+1$
11η Γράφημα [πότε έχει κέρδος]	1. Πάνω από 5 πελάτες 2. Χ>5 3. 6 έως 30 4. $5 \leq 30$	1. 30 πελάτες 2. 10 ή 11 και πάνω 3. 15 πελάτες 4. $5 \leq 30+1$ 5. Από 5 έως άπειρους 6. Μέχρι να γεμίσει
12η Γράφημα[εύρεση του χ (αριθμός πελατών) όταν δίνεται το ψ (κέρδος)]	1. 20 πελάτες [27Β,34Γ, οι μισοί από αυτούς έκαναν και σχήμα] 2. Μόνο γράφημα [1Β, όπου φαίνεται ότι στο ψ=150 αντιστοιχεί χ=20] 3. Με σχήμα [4Β, 6Γ, γι αυτό το αποτέλεσμα είναι προσεγγιστικό από 16 μέχρι και 19]	1. 15 [7] 2. Ανάλογα ποσά [2] 3. Διάφοροι απαντήσεις πχ 5 ή 25 ή 12 ή 30 ή 20 και πάνω ή χ+30=150

Πίνακας 2 – Ποσοστά απαντήσεων

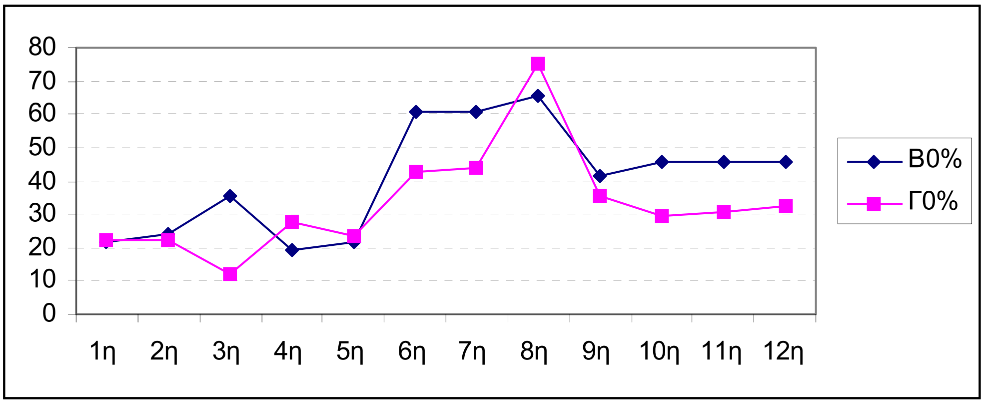
Ερωτήσεις	B0 %	B1 %	B2 %	Γ0 %	Γ1 %	Γ2 %	Σ0 %	Σ1 %	Σ2 %
1η	21,5	41,8	36,7	22,1	30,9	47,1	21,8	36,7	41,5
2η	24,1	49,4	26,6	22,1	36,8	41,2	23,1	43,5	33,3
3η	35,4	16,5	48,1	11,8	29,4	58,8	24,5	22,4	53,1
4η	19	21,5	59,5	27,9	17,6	54,4	23,1	19,7	57,1
5η	21,5	17,7	60,8	23,5	47,1	29,4	22,4	31,3	46,3
6η	60,7	29,1	10,1	42,6	47,1	10,3	52,4	37,4	10,2
7η	60,7	19	20,3	44,1	17,6	38,2	53,1	18,4	28,6
8η	65,8	24,1	10,1	75	17,6	7,4	70	21,1	8,8
9η	41,8	15,2	43	35,3	23,5	41,2	38,8	19	42,2
10η	45,6	29,1	25,3	29,4	42,6	27,9	38,1	35,4	26,5
11η	45,6	29,1	25,3	30,9	32,4	36,8	38,8	30,6	30,6
12η	45,6	12,7	41,8	32,4	10,3	57,4	39,5	11,6	49

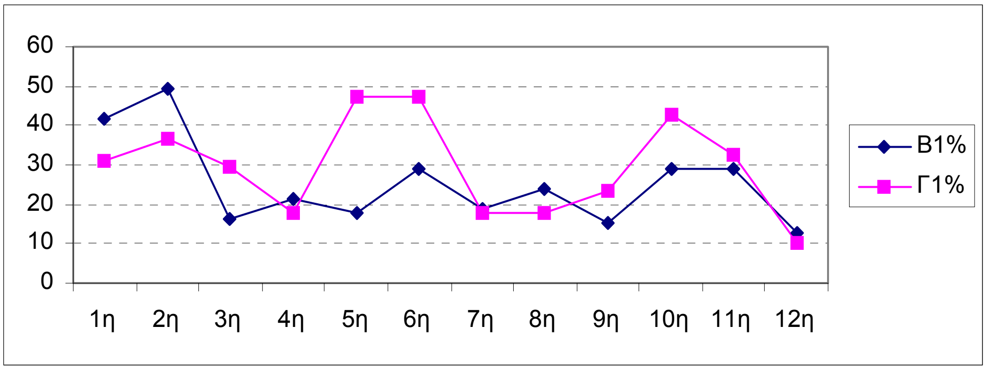
ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ Β ΚΑΙ Γ ΤΑΞΕΩΝ

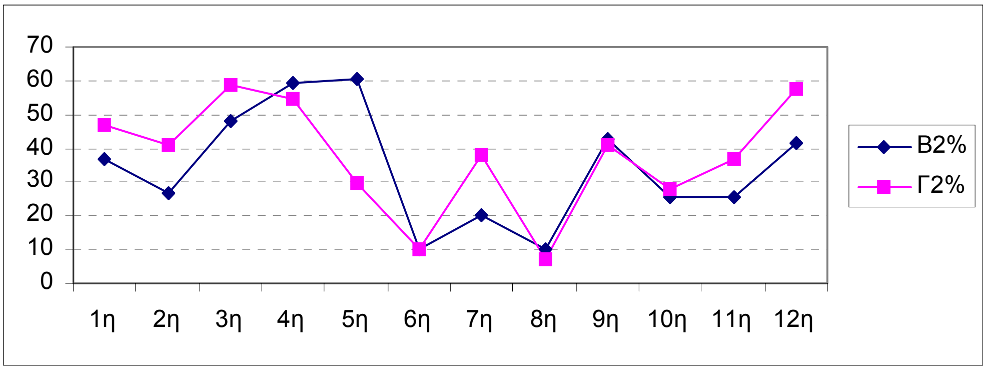




ΣΥΓΚΡΙΤΙΚΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ Β ΚΑΙ Γ ΑΝΑ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ







Παρατηρήσεις – Σχόλια - Συμπεράσματα

Ένα συμπέρασμα που διαπιστώσουμε παρατηρώντας τα διαγράμματα με τις σωστές απαντήσεις είναι ότι το μικρότερο ποσοστό επιτυχίας είναι για τις ερωτήσεις 6 και 8. Είναι οι ερωτήσεις στις οποίες απαιτείται μια μορφή γενίκευσης. Η ερμηνεία εστιάζεται κατά τη γνώμη μας αφ' ενός μεν στο γεγονός ότι το ζήτημα της γενίκευσης είναι ένα από τα δυσκολότερα θέματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές αυτής της ηλικίας στη μάθηση των μαθηματικών, ειδικά στα αρχικά στάδια μάθησης της άλγεβρας, αφ' ετέρου δε στο γεγονός ότι η εκπαίδευσή μας δεν περιέχει καθόλου δραστηριότητες οι οποίες να αφορούν ζητήματα γενίκευσης. Η αποτυχία στα ερωτήματα αυτά είναι και για τις δύο τάξεις σχεδόν καθολική, μόνο ένα ποσοστό γύρω στο 10% ανταποκρίνεται ικανοποιητικά σ' αυτά τα ερωτήματα.

Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι στο ερώτημα 4 που ζητείται από τους μαθητές να γράψουν σε συμβολική μορφή τα δεδομένα μιας απλής κατάστασης τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων φαίνεται να συμφωνούν σε σχέση με τα ποσοστά που αναφέρει η έρευνα από την οποία αντλήσαμε το σχετικό ερώτημα. Το ποσοστό είναι πάνω από 50% και για τις δύο τάξεις, ενώ τα στοιχεία που έχουμε από την έρευνα αναφέρουν ότι το 1/3 των 17χρονων μαθητών με ένα έτος άλγεβρας και το ¼ των μαθητών με 2 έτη άλγεβρας δεν απάντησαν ικανοποιητικά. Επίσης στις δύο πρώτες ερωτήσεις τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων δείχνουν ότι υπάρχει συμφωνία σε αυτό που η βιβλιογραφία αναφέρει σε σχέση με την αντιμετώπιση των αλγεβρικών παραστάσεων από τους αρχάριους στην άλγεβρα μαθητές.

Επιβεβαιώνεται η βιβλιογραφία σχετικά με την αδυναμία ορισμένων μαθητών να αποδεχτούν το 4χ+12 ως απάντηση και συνεχίζουν γράφοντάς το σαν 16χ ή ακόμα και σαν 16. Συγκεκριμένα υπάρχει δυσκολία να αντιμετωπιστεί το γράμμα ως αριθμός, ο οποίος σε μια αλγεβρική παράσταση ακολουθεί όλους τους κανόνες του αριθμητικού συστήματος.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι απαντήσεις όπου οι μαθητές μη αποδεχόμενοι ως απάντηση μια ανοικτή έκφραση όπως 2χ+14, την οποία μετατρέπουν σε *εξίσωση* (πολλές φορές χωρίς καν να υπάρχει δεύτερο μέλος) και την λύνουν για να βρουν μια τιμή στο χ. Αρκετοί την τιμή του χ που βρίσκουν την αντικαθιστούν στον τύπο που έχουν βρει για το εμβαδόν ή για την περίμετρο και βρίσκουν ένα αριθμητικό αποτέλεσμα. Δεν ενοχλούνται καθόλου αν το χ που βρίσκουν είναι αρνητικός αριθμός. Για παράδειγμα βρίσκουν ένα αποτελέσματα για την περίμετρο – συνήθως το σωστό 14 +2χ - και το μετατρέπουν σε εξίσωση για να βρεθεί το χ: γράφουν είτε 2χ=14 και χ=7 είτε -2χ=14 και χ=-7.

Ενδιαφέρον έχουν οι απαντήσεις όπου αγνοείται εντελώς το χ και γίνεται εύρεση της περιμέτρου και του εμβαδού για διαστάσεις 4 και 3.

Επίσης είναι σημαντικό το γεγονός ότι 6 μαθητές (κυρίως της Β τάξης) δίνουν αυθαίρετα μια συγκεκριμένη τιμή στο χ και κάνουν πράξεις για να υπολογίσουν το εμβαδόν και την περίμετρο.

Οι παραπάνω μαθητές είναι φανερό ότι βρίσκονται ακόμα στο στάδιο των συγκεκριμένων ενεργειών και δεν είναι ακόμα ώριμοι να αποδεχτούν τα 'αφηρημένα γράμματα' της άλγεβρας ως αριθμούς, τους οποίους με βάση κάποιους κανόνες μπορούμε να τα χειριστούμε.

Μια άλλη ενδιαφέρουσα παρατήρηση σε 3 απαντήσεις μαθητών Γ τάξης είναι η εξής: γράφουν 4(χ+3)=4χ+12=$\frac{4\chi}{4}+\frac{12}{4}=\chi+3$. Η υπόθεση που κάναμε ως προς την προέλευση αυτής της παρανόησης των συγκεκριμένων μαθητών, επιβεβαιώθηκε όταν ρωτήσαμε τον καθηγητή της τάξης 'αν όταν δίδαξε δευτεροβάθμιες εξισώσεις, που είχαν μεγάλους συντελεστές συνιστούσε στους μαθητές να απλοποιούν τους συντελεστές για να προκύψει εξίσωση ισοδύναμη, που θα λυνόταν πιο εύκολα;' μας απάντησε καταφατικά. Οι μαθητές αυτοί παρανόησαν τη διδακτική οδηγία γιατί έχουν προφανώς ασθενή κατανόηση των εννοιών αλγεβρική παράσταση , εξίσωση και του συμβόλου της ισότητας, που άλλοτε το θεωρούν ως προτροπή για μα εκτελέσουν κάποια διαδικασία και άλλοτε ως το σύμβολο που ταυτίζει δύο αλγεβρικές παραστάσεις, όπως στις εξισώσεις όπου αναζητείται ο άγνωστος με μια συγκεκριμένη διαδικασία.

Στην ερώτηση 3 οι περισσότεροι μαθητές που έδωσαν σωστές απαντήσεις το έκαναν λύνοντας όλες ή σχεδόν όλες τις εξισώσεις, για να καταλήξουν στο ποιες έχουν την ίδια λύση, έχοντας προφανώς μικρή κατανόηση του τρόπου με τον οποίο προκύπτουν ισοδύναμες εξισώσεις. Ελάχιστοι απάντησαν με βάση κάποια ιδιότητα η οποία καθιστά ισοδύναμες τις δύο εξισώσεις $6(x-4)=10$ και $3x-12=5$. Μερικοί μαθητές πιθανόν να 'είδαν' την ισοδυναμία αυτών των εξισώσεων, αλλά για σιγουριά έλυσαν είτε και τις δύο είτε τη μία από αυτές. Κάποιοι απάντησαν ότι είναι ισοδύναμες, αλλά δεν έγραψαν πως το βρήκαν.

Τέλος παρατηρούμε ότι οι απαντήσεις στο πρόβλημα που αφορά το γράφημα, το οποίο είναι το μοντέλο μιας πραγματικής κατάστασης, ακόμα κι αν δεν έχουν διδαχτεί καθόλου ή ελάχιστα τέτοια θέματα οι μαθητές δίνουν σωστές απαντήσεις σε πολύ μεγαλύτερα ποσοστά από ερωτήματα που αφορούν αφηρημένες και τυπικού χαρακτήρα αλγεβρικές δραστηριότητες. Συγκεκριμένα τα ποσοστά επιτυχίας είναι για τη Β τάξη πάνω από 40% και για τη Γ τάξη 60% , το μεγαλύτερο ποσοστό επιτυχίας.

Ένα συμπέρασμα που φαίνεται να προκύπτει από την παρούσα εργασία και είναι σύμφωνο με τη μαθηματική εκπαιδευτική βιβλιογραφία είναι ότι υπάρχει ουσιαστικό πρόβλημα με τη μάθηση της άλγεβρας και των μαθηματικών γενικότερα. Από τα αποτελέσματα του test παρατηρούμε ότι σχεδόν οι μισοί μαθητές δεν μπορούν να απαντήσουν σε ερωτήματα, τα οποία είναι απαραίτητα για να προχωρήσουν σε ένα επόμενο στάδιο μάθησης. Συνεπώς δεν είναι άνευ σημασίας το ερώτημα: 'μήπως πρέπει να επανεξετάσουμε το τι μαθηματικά θέλουμε να διδάξουμε, σε ποιους θέλουμε να τα διδάξουμε και πως θα τα διδάξουμε;'.

Κλείνουμε με τα λόγια του Usiskin (1994): 'Είμαστε σε μια εξαιρετικά ασυνήθιστη εποχή για τα μαθηματικά, που δεν μοιάζει με καμία άλλη των τελευταίων 400-500 ετών. Η προσιτότητα των μαθηματικών για τον πληθυσμό γενικά έχει αυξηθεί, λόγω της τεχνολογίας. Αυτή η πρόοδος κάνει πιθανό ότι περισσότερα μαθηματικά από οποιαδήποτε άλλη προηγούμενη εποχή θα γίνουν μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης καθενός και της καθημερινής του παιδείας. Αλλά αυτά τα μαθηματικά δεν θα είναι ένα υπερσύνολο αυτών που διδάσκονται σήμερα. Εκείνα που μπορούν να γίνουν γρήγορα και εύκολα με τους υπολογιστές είναι πολύ πιθανό να εξαφανιστούν από το πρόγραμμα. Αυτά που πιθανόν να παραμείνουν θα είναι πιο *εννοιολογικά*, πιο *εφαρμόσιμα* και πιο *οπτικά*.'

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Clement, J. (1982). Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education, 13,* 16-30.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema, *Journal of Mathematical Behavior*, Volume 15, pp. 167- 92.

DeMarois, P., & Tall, D.O. (1998). Facets and Layers of the Function Concept. In Puig, L. & Gutierrez, A. (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Conference for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 2. Valencia, Spain. pp. 297- 304.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In Tall, D.O. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. pp. 95-124.

Goodson-Espy T. (1998). The roles of Reification and Reflective Abstraction in the development of abstract thought: Transitions from arithmetic to algebra. *Educational studies in Mathematic*s 36: 219-245.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1991a). Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking. *Proceedings of the XV International Conference for the Psychology of Mathematics Education* Vol. 2. Assisi. pp. 72-79.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1991b). Success and Failure in Mathematics: Procept and Procedure: A Primary Perspective. Mathematics Education Research Centre. University of Warwick.

Gray, E. M. & Tall, D. O. (1991c). Success and Failure in Mathematics: Procept and Procedure: Secondary Mathematics. Mathematics Education Research Centre. University of Warwick.

Freudenthal H. Didactical phenomenology of mathematical structures, *D. Reidel Publishing Company.*

Herskovics, N., & Linchevski (1994). Acognitive gap between arithmetic and algebra, *Educational studies in mathematics* 27, pp. 59-78.

Kieran, C. (1981). Pre-algebraic notions among 12 and 13 year olds. In *Proceedings of PME 5,* Grenoble, pp. 158-164.

Kieran, C. (1989). The early learning of algebra: A structural perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of algebra* (pp. 33-56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In Grouws, D.A. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York: Macmillan Publishing Company. Pp. 390-419.

Kieran, C. (1993). Functions, Graphing, and Technology: Integrating Research on Learning and Instruction. In Romberg, T. A., Fennema, E., & Carpenter, T. P. (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*.

Kieran C. (1997). ‘Algebra and Functions’ in T. Nunes, P. Bryant (eds) Learning and teaching mathematics: an international perspective, pp.133-158.

Kieran, C. (1994). ‘A functional approach to the introduction of algebra: Some pros and cons’. In da Ponte, J. P. & Matos, J. F. (eds). *Proceeding of the Eighteenth International Conference for Psychology of Mathematics Education*, Lisbon, Portugal, Vol. 1 pp. 157-175.

Kieran, C. (1997). ‘Mathematical Concepts at the Secondary School Level: The Learning of Algebra and Functions’ in *T. Nunes, P. Bryant (eds) ‘Learning and Teaching Mathematics: An Intenational Perspective’,* Psychology Press.

Kooij Henk van der (2001). Algebra : A Tool for Solving Problems, *Freudenthal Institute, Utrecht University.*

Kuchemann (1981). Algebra. In K. M. Hart, (Ed.), *Children’s Understanding of Mathematics*: *11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1984). *Thinking Mathematically*. London: Addison Wesley.
Matz, M. (1980). Towards a Computational Theory of Algebraic Competence. *Journal of Mathematical Behaviour,* Volume 3(1), pp. 93-166.
M.MacGregor, . *How students interpret equations*. In 'Language and communication in the mathematics classroom'. National Council of Teachers of Ma thematics.
Pirie Susan, Martin Lyndon, 1997. *The equation, the whole equation and nothing but the equation!.* Educational Studies in Mathematics 34: 159-181.
Carpenter, T.P. (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, pp. 239-278.
Rosnick, P. & Clement, J. (1980). Learning Without Understanding: The Effect of Tutorial Strategies on Algebra Misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior,* Volume 3(1), pp. 3-27.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.
Sfard, A. (1992). Operationaal Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification—The Case of Function. In Harfel, G. & Dubinsky, E. (Eds.), *The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy.* Washington, D.C.: Mathematical Association of America. Pp. 59-84.
Tall, D. (1998). Symbols and the Bifurcation between Procedural and Conceptual Thinking. Plenary presentation, International Conference on Teaching Mathematics. Pythagorion, Samos, Greece.
Tall, D. & Thomas, M.. (1991). Encouraging versatile thinking in algebra using the computer, *Educational Studies in Mathematics,* **22**, II, pp. 125-147.
Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal for Research in Mathematics Education, 12,* 107-118.
Usiskin Z. (1994). From 'Mathematics for some' to Mathematics for all', in R. Biehler et al (eds), Didactics of mathematics as a scientific discipline, 315-326.

Summary

In the literature is documented by great number of researches that it is difficult for the students to understand the significances of algebra. Most of the students, including those of above 15 years old, are not able to interpret the algebraic letters either as generalized numbers or as concrete unknown. The connection of the levels of cognitive development consists the main interpretation to the difficulties of students in algebra. It is also supported that students who for the first time are taught algebra appear to face many difficulties owing to the way that numerical procedures which are taught in primary school are not suitable in the case of algebra or even the traditional way of teaching which focuses in the skills of the students-do what I am doing- does not aid the conceptual understanding. In the introduction we present a test which was given in students of the second and the third class of high school and which concerns the above algebraic significances with view to confirm whether the difficulties that are recorded in the literature are concurred with the Greek reality. Most questions come from corresponding international researches. In this task, we are restricted in the description of the test based on the national literature, which includes a report and a first annotation of the results, and at this time we do not aim in a profound interpretation of the results. This test constitutes a part of a wider study as far as learning and teaching of algebra in primary high school are concerned.