

Ορισμός Μαθηματικών Εννοιών (Definition)

Ειρήνη Μπιζά, Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών

Ο ορισμός των μαθηματικών εννοιών παρουσιάζει ενδιαφέρον όχι μόνο σε επίπεδο μαθηματικής θεωρίας αλλά και σε επίπεδο μαθησιακής διαδικασίας. Στην καθημερινή ζωή οι έννοιες χρησιμοποιούνται χωρίς πολλές φορές να οριστούν ή, ακόμα και όταν έχουν οριστεί, ο ορισμός αυτός έχει ελάχιστο ρόλο στον τρόπο που αναφερόμαστε σε αυτές (Fodor κ.ά, 1980). Σε επίπεδο μαθηματικής θεωρίας, αντίθετα, αν δεν οριστεί μία έννοια δεν μπορεί να αποκτήσει υπόσταση και να χρησιμοποιηθεί. Ένας ορισμός πρέπει να ικανοποιεί κάποιες λογικές αρχές. Για παράδειγμα:

- Ο ορισμός δίνει όνομα και περιεχόμενο σε μία νέα έννοια η οποία πρέπει να ορίζεται χωρίς αυτοαναφορά.
- Ο ορισμός πρέπει να είναι σαφής και να μην εξαρτάται από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας που ορίζει.
- Για να οριστεί μία νέα έννοια πρέπει να χρησιμοποιηθούν άλλες ήδη ορισμένες έννοιες.
- Ο ορισμός πρέπει να είναι καλά ορισμένος και να καθορίζει τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες για μία έννοια. Το σύνολο αυτών των συνθηκών πρέπει να είναι το ελάχιστο δυνατό.
- Ένας ορισμός είναι αυθαίρετη επιλογή αλλά καλό είναι να είναι *εύχρηστος*, *οικονομικός*, *κομψός* και *εύκολα κατανοητός*.

(π.χ. Harel κ.ά, 2006· Mamona-Downs & Downs, 2002· Shir & Zaslavsky, 2001, 2002· Vinner, 1991· Winicki & Leikin, 2000α)

Συχνά συμβαίνει για την ίδια έννοια να υπάρχουν ισοδύναμοι ορισμοί και η επιλογή του κατάλληλου να γίνεται αυθαίρετα ανάλογα με τα κριτήρια αυτού που τη διαχειρίζεται. Σε

επίπεδο μαθηματικής θεωρίας κανένας κίνδυνος ασυνέπειας δεν εμφανίζεται αν χρησιμοποιηθεί ο ένας ή ο άλλος ορισμός. Σε επίπεδο όμως μαθησιακής διαδικασίας δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι όλοι οι ορισμοί είναι ισοδύναμοι.

Οι Winicki και Leikin (2000α) επιχειρήσαν να αναλύσουν τα μαθηματικά και διδακτικά χαρακτηριστικά ενός ορισμού θεωρώντας ότι ο *βέλτιστος* ορισμός μιας έννοιας είναι εκείνος που είναι μαθηματικά σωστός και διδακτικά κατάλληλος. Ενώ η μαθηματική ορθότητα είναι εύκολο να ελεγχθεί, για τη διδακτική χρειάζονται κάποιες παραδοχές για το τι σημαίνει διδακτικά κατάλληλος ορισμός:

- Ο ορισμός μίας νέας έννοιας πρέπει να χρησιμοποιεί μόνο γνωστές στον μαθητή έννοιες, γιατί, σύμφωνα με τη *θεωρία κατασκευής της γνώσης (constructivism)*, ο μαθητής κατασκευάζει τη γνώση του στη βάση των εννοιών που ήδη κατέχει και μπορεί να διαχειριστεί (von Glasersfeld, 1991)
- Η έννοιες που προσεγγίζονται και ο τρόπος προσέγγισης τους πρέπει να λάβει υπόψη τη *ζώνη επικείμενης ανάπτυξης* του μαθητή (*zone of proximal development*: η απόσταση μεταξύ του πραγματικού αναπτυξιακού επιπέδου του μαθητή, όπως καθορίζεται από ανεξάρτητη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και του εν δυνάμει επιπέδου, όπως καθορίζεται μέσω της επίλυσης των προβλημάτων κάτω από την καθοδήγηση ενός ενήλικα ή σε συνεργασία με πιο ικανούς συμμαθητές του, Vygotsky, 1962).
- Ο ορισμός πρέπει να βασιστεί, όσο γίνεται περισσότερο, στις διαισθήσεις των μαθητών (Fischbein, 1987).

Για τους Winicki και Leikin, (2000α, σελ.18), κάθε ορισμός μίας έννοιας αποτελείται από μία τετράδα: την *έννοια* που ορίζεται, τη λεκτική *διατύπωση* του ορισμού, τη *κλάση* των αντικειμένων που αντιστοιχούν στην έννοια αυτή και το σύνολο των *συνθηκών* που ορίζουν την έννοια. Για παράδειγμα, για να ορίσουμε την *έννοια* του παραλληλογράμμου μπορούμε

να το δηλώσουμε μέσω της έκφρασης: *το τετράπλευρο που οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες*. Η κλάση των γεωμετρικών αντικειμένων που αποτελούν περιπτώσεις αυτής τις έννοιας είναι τα ορθογώνια, οι ρόμβοι, τα τετράγωνα και όλα τα υπόλοιπα παραλληλόγραμμα που δεν ανήκουν στις παραπάνω κατηγορίες. Οι *συνθήκες* που ορίζουν το παραλληλόγραμμο και περιγράφονται στην διατύπωση του ορισμού, είναι να είναι *τετράπλευρο* και *οι απέναντι πλευρές του να είναι παράλληλες*. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον από διδακτικής πλευράς παρουσιάζουν οι περιπτώσεις που δύο ή περισσότεροι ορισμοί εννοιών ορίζουν *κλάσεις* αντικειμένων που η μια περιέχεται στην άλλη. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μία ειδική και μια γενικότερη περίπτωση της ίδιας έννοιας. Το ερώτημα σχετικά με τον τρόπο που θα διδαχθούν οι ορισμοί αυτοί έγκειται στην επιλογή της μίας ή της άλλης κατεύθυνσης (από το ειδικό στο γενικό ή αντίστροφα) ως της αποτελεσματικότερης διδακτικής διαδικασίας. Από ό,τι φαίνεται, στη διδακτική πρακτική επιλέγεται η μια ή η άλλη κατεύθυνση ανάλογα με την έννοια. Για παράδειγμα, στη διδασκαλία των τετραπλεύρων εισάγεται πρώτα ο ορισμός του παραλληλογράμμου και μετά ο ορισμός του τετραγώνου, ενώ στην περίπτωση της εφαπτόμενης ευθείας διδάσκεται πρώτα η εφαπτομένη του κύκλου και έπειτα η εφαπτομένη γραφικής παράστασης.

Από διδακτική άποψη, η επιλογή του κατάλληλου ορισμού δεν είναι τόσο απλή. Ένας ορισμός δεν είναι απλά η διαδικασία κατά την οποία δίνουμε ένα όνομα σε μία έννοια αλλά και η καθιέρωση των ιδιοτήτων αυτής της έννοιας και της κλάσης αντικειμένων που συνδέονται με αυτήν (Winicki & Leikin, 2000β, σελ.28). Όταν όμως οι μαθητές γνωρίζουν τον ορισμό μίας έννοιας σε ένα πλαίσιο και αντιμετωπίζουν την ίδια έννοια σε ένα ευρύτερο πλαίσιο τότε υπάρχει ο κίνδυνος να θεωρήσουν ότι ιδιότητες της έννοιας που ισχύουν στο ένα πλαίσιο ισχύουν και στο άλλο, ενώ αυτό μπορεί να μην είναι σωστό. Αυτό θα έχει ως αποτέλεσμα να θεωρηθούν ως *αναγκαίες* και *ικανές συνθήκες* για τον ορισμό μιας έννοιας *συνθήκες* που είναι μόνο *αναγκαίες* ή μόνο *ικανές*, αλλοιώνοντας έτσι την *κλάση* των

αντικειμένων που συνδέονται με την έννοια αυτή. Φαίνεται δηλαδή ότι αυτό που κατανοούν τελικά οι μαθητές είναι διαφορετικό από αυτό που εμείς ως εκπαιδευτικοί θέλουμε να κατανοήσουν.

1.1. *Εικόνα Έννοιας και Ορισμός Έννοιας (Concept Image, Concept Definition)*

Η εισαγωγή των όρων *concept definition* (ορισμός έννοιας) και *concept image* (εικόνα έννοιας) έγινε αρχικά από τους Vinner και Hershkowitz (1980) αναφορικά με έννοιες της Γεωμετρίας. Ο στόχος ήταν να γίνει διάκριση μεταξύ του τυπικού και κοινά αποδεκτού ορισμού μίας έννοιας και της νοητικής δομής του ατόμου που σχετίζεται με την έννοια αυτή, συμπεριλαμβανομένων των σχετικών παραδειγμάτων, αντιπαραδειγμάτων, γεγονότων και σχέσεων. Αυτή τη διάκριση επεξεργάστηκαν λίγο αργότερα οι Tall και Vinner (1981) και την εφάρμοσαν στην περίπτωση του ορίου και της συνέχειας. Στη συνέχεια οι όροι αυτοί χρησιμοποιήθηκαν εκτεταμένα στις έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών και ειδικά σε θέματα που σχετίζονταν με την *Προχωρημένη Μαθηματική Σκέψη* (δες πρόσφατη ανασκόπηση στο Harel κ.ά, 2006, σελ. 148-150). Ειδικά το άρθρο των Tall και Vinner (1981) συμπεριλήφθηκε πρόσφατα στα 17 πιο κλασικά κείμενα της βιβλιογραφίας της έρευνας στην Διδακτική των Μαθηματικών (Carpenter, Dossey & Koehler, 2004).

Η ευρύτητα της εφαρμογής των όρων αυτών στη Διδακτική των Μαθηματικών οφείλεται και στο γεγονός ότι έδωσαν *όνομα*, δηλαδή *υπόσταση*, σε αυτό που ενδιαφέρει τους ερευνητές του χώρου αυτού: τι είναι αυτό που κατασκευάζεται στο μυαλό των μαθητών και πώς αυτό σχετίζεται με την τυπική μαθηματική θεωρία. Η ορολογία αυτή (*εικόνα/ορισμός έννοιας*) είναι αρκετά ανοικτή ώστε αφενός να μπορεί να αξιοποιηθεί σε ευρύ φάσμα μελετών και αφετέρου να αφήνει περιθώρια για πιο εξειδικευμένους ορισμούς με στόχο τη διευκρίνιση ή τη διάκριση πιο εκλεπτυσμένων διαφορών. Έτσι ανακύπτουν βασικά ερωτήματα όπως, για παράδειγμα, πώς σχηματίζεται η *εικόνα* μίας *έννοιας* στο μυαλό των

μαθητών, από ποιους παράγοντες επηρεάζεται και σε ποιο βαθμό αυτή σχετίζεται με τον τυπικό ορισμό.

Στη συνέχεια κάνουμε μία σύντομη παρουσίαση των όρων *εικόνα* και *ορισμός έννοιας* και της ερμηνείας τους. Τέλος, καταλήγουμε στον τρόπο που αυτές θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία.

Οι Tall και Vinner (1981) εισάγουν τους όρους *εικόνα έννοιας* και *ορισμός έννοιας* ως εξής:

Εικόνα έννοιας (concept image) είναι ο όρος που περιγράφει ολόκληρη τη γνωστική δομή που σχετίζεται με την έννοια η οποία περιλαμβάνει όλες τις νοητικές εικόνες και τις σχετικές ιδιότητες και διεργασίες. Η δομή αυτή κατασκευάζεται μέσα από τις εμπειρίες και μπορεί να αλλάξει με την ωριμότητα του ατόμου αλλά και με τα ερεθίσματα με τα οποία αυτό έρχεται αντιμέτωπο.

Ορισμός έννοιας (concept definition) είναι ο όρος που περιγράφει το λεκτικό σύνολο που προσδιορίζει την έννοια. (ως άνω, σελ. 152)

Ο *ορισμός έννοιας* μπορεί να είναι ένα λεκτικό σύνολο που χρησιμοποιεί το άτομο για να εξηγήσει εκείνο το τμήμα της *εικόνας έννοιας* που επικαλείται σε κάθε περίπτωση (για την *επικαλούμενη εικόνα έννοιας* θα μιλήσουμε παρακάτω). Αυτό έχει ως συνέπεια, ο ορισμός που κατασκευάζεται από ένα άτομο (*προσωπικός ορισμός έννοιας, personal concept definition*) σε κάποιες περιπτώσεις να είναι διαφορετικός από τον *τυπικό ορισμό έννοιας (formal concept definition)* που είναι ο ορισμός που είναι αποδεκτός από τη μαθηματική κοινότητα. Ο *προσωπικός ορισμός έννοιας* είναι προσωπική νοητική κατασκευή του ατόμου και θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι έχει τη δική του *εικόνα (εικόνα ορισμού έννοιας)* που αποτελεί μέρος της ευρύτερης *εικόνας έννοιας*. Για κάποια άτομα η *εικόνα ορισμού έννοιας* μπορεί να είναι κενή ή στην πραγματικότητα να μην υπάρχει. Για άλλους μπορεί να υπάρχει και να είναι ή να μην είναι συνεκτικά συνδεδεμένη με άλλα τμήματα της *εικόνας έννοιας* (ως άνω, σελ. 153). Θα επανέλθουμε στην σύνδεση *εικόνας* και *ορισμού έννοιας* παρακάτω αφού πρώτα αναφερθούμε στο τρόπο που περιγράφεται η δομή και η λειτουργία της *εικόνας έννοιας*.

Οι Tall και Vinner (1981) ισχυρίζονται ότι η *εικόνα έννοιας* είναι μία νοητική κατασκευή που δεν αναπτύσσεται πάντα έτσι ώστε να παρουσιάζει ενιαία συνοχή. Τα αισθητηριακά δεδομένα διεγείρουν κάθε φορά συγκεκριμένα νευρολογικά μονοπάτια και εμποδίζουν την ενεργοποίηση άλλων. Με αυτήν την έννοια διαφορετικά ερεθίσματα μπορούν να ενεργοποιήσουν διαφορετικά τμήματα από την *εικόνα έννοιας* και να τα αναπτύξουν με τέτοιο τρόπο χωρίς να τη θεωρούν σαν μια συγκροτημένη ολότητα. Για το λόγο αυτό ορίζεται ο όρος *επικαλούμενη εικόνα της έννοιας (evoked concept image)* ως εξής:

Επικαλούμενη εικόνα της έννοιας είναι εκείνο το κομμάτι της *εικόνας έννοιας* που ενεργοποιείται μία συγκεκριμένη στιγμή (ως άνω, σελ. 152)

Ο Vinner (1991) δηλώνει ότι η *εικόνα έννοιας* δεν είναι *λεκτική (verbal)* αλλά αποτελείται από ένα σύνολο ιδιοτήτων συνοδευμένες από νοητικές εικόνες. Θα μπορούσε να είναι οπτική αναπαράσταση σε περίπτωση που η έννοια έχει οπτική αναπαράσταση, επίσης μπορεί να είναι συλλογή από εμπειρίες ή εντυπώσεις αλλά δεν είναι λεκτική αλλά παίρνει λεκτική μορφή μετέπειτα. Πάντως η λεκτική μορφή, κατά τον Vinner, δεν είναι το πρώτο πράγμα που επικαλείται κανείς αλλά έρχεται σε επόμενο στάδιο (Vinner, 1991, σελ. 68). Επιπλέον, μελετά την *επικαλούμενη εικόνα έννοιας* συνδεδεμένη με το συγκεκριμένο άτομο που τη διαπραγματεύεται και το πλαίσιο κάτω από το οποίο το κάνει. Το ίδιο άτομο μπορεί να αντιδράσει διαφορετικά στον ίδιο όρο (το όνομα της έννοιας) κάτω από διαφορετικές συνθήκες. Η *επικαλούμενη εικόνα έννοιας* αναφέρεται ως εκείνο το τμήμα της *μνήμης* που επικαλείται σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο (Vinner, 1991, σελ. 68).

Επίσης, ο Vinner (1983) αναφέρει ότι οι ορισμοί που κατασκευάζονται από εμάς είναι αποτέλεσμα της εμπειρίας με την έννοια. και αποτελούν την περιγραφή της *εικόνας έννοιας*. Οι ορισμοί που διδασκόμαστε από την άλλη μεριά, είναι μέρος ενός γενικού συστήματος, ένα σύστημα με το οποίο δεν είμαστε απαραίτητα εξοικειωμένοι. (Vinner, 1983, σελ. 294)

Για να περιγράψει την αλληλεπίδραση *ορισμού* και *εικόνας*, ο Vinner (1983, 1991) περιγράφει την *εικόνα έννοιας* και τον *ορισμό έννοιας* ως δύο *κελιά (cells)* που διευκρινίζει ότι είναι γνωστικές δομές. Φαίνεται ότι αυτά τα *κελιά* θεωρούνται ανεξάρτητες δομές και μελετάται η αλληλεπίδραση τους. Θα μπορούσε να συμβεί κάποιο ή και τα δύο αυτά *κελιά* να είναι κενά. Για παράδειγμα, το *κελί* της *εικόνας έννοιας* μπορεί να παραμείνει κενό όσο δεν προσδίδεται νόημα στο όνομα της έννοιας. Αυτό μπορεί να συμβεί σε διαφορετικές περιπτώσεις, όπως όταν ο ορισμός της έννοιας έχει απλά απομνημονευτεί χωρίς να του έχει αποδοθεί σε αυτόν νόημα. Παρόλο, όμως, που τα δύο αυτά *κελιά* αναπτύσσονται ανεξάρτητα, υπάρχει κάποια αλληλεπίδραση μεταξύ τους (Vinner 1991, σελ. 70)

Όπως είδαμε και παραπάνω, μερικές φορές ο *προσωπικός ορισμός* που κατασκευάζει ένα άτομο δεν είναι απαραίτητα ο ίδιος με τον *τυπικό ορισμό*. Καμιά φορά δεν είναι σαφές, στην βιβλιογραφία, αν με τον όρο *ορισμός έννοιας* γίνεται αναφορά στον πρώτο ή στο δεύτερο και αν ο *ορισμός έννοιας* αποτελεί μέρος ή όχι της *εικόνας έννοιας*. Κάποιοι ερευνητές χρησιμοποίησαν ρητά αυτή την διάκριση (*προσωπικού/τυπικού ορισμού*) όταν θέλησαν να αναφερθούν στον ορισμό μίας έννοιας έτσι όπως αυτός εκφράζεται από κάποιο άτομο σε αντιδιαστολή με τον επίσημο ορισμό. Για παράδειγμα, οι Tsamir και Onodenko (2004) στη ερώτηση «Τι είναι σημείο καμπής;» ανέμεναν από τους ερωτηθέντες να δώσουν τους δικούς τους *προσωπικούς ορισμούς έννοιας* που θα περιλάμβαναν αναγκαίες, ικανές και ενδεχομένως επιπρόσθετες αλλά σχετικές ιδιότητες.

Ο Tall (2007), σε αντιδιαστολή με τον Vinner (1991) που βλέπει τον *ορισμό έννοιας* σε διαφορετικό *κελί* από την *εικόνα έννοιας*, υποστηρίζει ότι αφού και τα δύο αποτελούν μέρος της γνωστικής δομής του ατόμου (όπως υποστηρίζουν και οι δύο) τότε και ο *ορισμός έννοιας* αποτελεί μέρος της *εικόνας έννοιας*. Στη συνέχεια θα περιγράψουμε με ποιο τρόπο αξιοποιήσαμε τους όρους αυτούς στην εργασία μας.

Ο όρος *εικόνα έννοιας* χρησιμοποιείται ακριβώς όπως ορίστηκε από τους Tall και Vinner (1981) για να εκφράσει το σύνολο της γνωστικής κατασκευής του ατόμου που σχετίζεται με την έννοια αυτή. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να περιλαμβάνει λεκτικές, συμβολικές και οπτικές αναπαραστάσεις της έννοιας και ιδιότητες που σχετίζονται με αυτήν. Ειδικά στην παρούσα έρευνα τα δεδομένα προέρχονται από την ανταπόκριση των μαθητών/φοιτητών σε συγκεκριμένα ερωτήματα, άρα τα στοιχεία που έχουμε αναφέρονται στην *επικαλούμενη εικόνα έννοιας* που ενεργοποιείται στις συγκεκριμένες καταστάσεις. Από εδώ και στο εξής όταν αναφερόμαστε στην *εικόνα έννοιας* των μαθητών/φοιτητών που συμμετείχαν στην έρευνα θα εννοούμε την *επικαλούμενη εικόνα έννοιας* εκτός αν διευκρινίζεται κάτι διαφορετικό.

Ως μέρος της *εικόνας έννοιας* θεωρούμε και την *εικόνα* του ατόμου που αντιστοιχεί στον *ορισμό* της *έννοιας*, δηλαδή τον *προσωπικό ορισμό έννοιας*. Αναφερόμαστε σε αυτόν με τον πλήρη όρο *προσωπικός ορισμός έννοιας* για να δώσουμε έμφαση στη διάκριση/αντιπαραβολή του με τον *τυπικό ορισμό έννοιας*. Ο *προσωπικός ορισμός έννοιας* αποτελεί προσωπική περιγραφή της *εικόνας έννοιας* του ατόμου και χαρακτηρίζεται από ιδιότητες της έννοιας αυτής όπως αυτές προκύπτουν είτε από τις επιλογές των ατόμων σε συγκεκριμένα προβλήματα, είτε από επιχειρήματα που χρησιμοποιούν για να δικαιολογήσουν τις επιλογές του αυτές. Οι ιδιότητες που αναφέρονται παραπάνω δεν είναι απαραίτητα οι *μαθηματικά σωστές*. Αν ένα άτομο λειτουργεί σε κάποιο πλαίσιο μπορεί να χρησιμοποιήσει διαφορετικούς (από τους γνωστούς μαθηματικούς) ορισμούς ή/και να αναμίξει ορισμούς ή να δημιουργήσει νέους άρα θα μπορούσαμε να μιλήσουμε για *επικαλούμενο προσωπικό ορισμό έννοιας* ή για *επικαλούμενη εικόνα (προσωπικού) ορισμού έννοιας*. Για να αποφευχθεί η χρήση τόσο σύνθετης ορολογίας κρατήσαμε τον όρο *προσωπικός ορισμός έννοιας*, όπως προαναφέραμε, και διερευνήσαμε αν οι ιδιότητες που τον χαρακτηρίζουν, στο πλαίσιο της αντίστοιχης μαθηματικής θεωρίας είναι ικανές ή/και

αναγκαίες ή ενδεχομένως και εντελώς λανθασμένες για να ορίσουν την αντίστοιχη έννοια. Με δεδομένο, επομένως, το αντίστοιχο πλαίσιο της μαθηματικής θεωρίας μπορούμε να θεωρήσουμε τον *τυπικό ορισμό έννοιας* και να τον αντιπαραβάλλουμε με τον *προσωπικό ορισμό έννοιας* που έχει κάποιο άτομο. Θεωρούμε ότι πρέπει να δούμε την *εικόνα έννοιας* (συμπεριλαμβανομένου και του *προσωπικού ορισμού έννοιας*) ως μία γνωστική κατασκευή του ατόμου μέσα στο πλαίσιο που αυτή αναπτύσσεται.

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω και προσαρμόζοντας τα στην παρούσα εργασία, επιδιώξαμε τα δεδομένα της έρευνας να δώσουν στοιχεία για την *εικόνα έννοιας της εφαπτόμενης ευθείας (εικόνες εφαπτομένης)* του μαθητή/φοιτητή και από αυτά τα στοιχεία να αναδειχθούν εκείνες οι πληροφορίες που μπορούν να σκιαγραφήσουν τον *προσωπικό ορισμό έννοιας της εφαπτόμενης ευθείας (προσωπικός ορισμός εφαπτομένης)* που αυτός έχει.

1.2. Γενίκευση και Αφαίρεση (*Generalisation and Abstraction*)

Οι όροι της *γενίκευσης* και της *αφαίρεσης* χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά όταν μία έννοια μπορεί να αντιμετωπιστεί από ένα περιορισμένο σε ένα ευρύτερο πλαίσιο (Tall, 1991β). Σε επίπεδο γνωστικής εξέλιξης γίνεται συχνά η διάκριση ανάμεσα σε διαφορετικές λειτουργίες που απαιτούνται για την μετάβαση από μία νοητική κατάσταση σε μια άλλη. Οι μηχανισμοί της *αφομοίωσης* και *συμμόρφωσης* που περιγράφονται από τον Piaget (1972) ή η διάκριση σε *διεύρυνση (expansion)* και *ανακατασκευή (reconstruction)* της γνωστικής δομής του ατόμου (Skemp, 1979) ανήκουν σε αυτή τη κατηγορία. Ο Bachelard (1970), όπως αναφέρεται στην Sierpinska (1994), υποστηρίζει την ασυνέχεια στη γνωστική διαδικασία και δίνει έμφαση στην διάκριση μεταξύ της *κοινής γνώσης* και της *επιστημονικής γνώσης*. Επιπλέον μελετά τον τρόπο που η πρώτη λειτουργεί ως εμπόδιο στη δεύτερη.

Οι Harel και Tall (1991) διακρίνουν τρεις τύπους γενίκευσης: *γενίκευση μέσω επέκτασης (expansive generalization)*, *γενίκευση μέσω ανακατασκευής (reconstructive generalization)* και *γενίκευση μέσω διάσπασης (disjunctive generalization)*.

Γενίκευση μέσω επέκτασης συμβαίνει όταν το άτομο διευρύνει την εφαρμογή της υπάρχουσας δομής που έχει χωρίς να την ανακατασκευάσει.

Γενίκευση μέσω ανακατασκευής συμβαίνει όταν το άτομο ανακατασκευάζει την υπάρχουσα δομή με στόχο να διευρύνει το πεδίο εφαρμογής της.

Γενίκευση μέσω διάσπασης συμβαίνει όταν το άτομο, μεταβαίνοντας από ένα οικείο πλαίσιο σε ένα άλλο, κατασκευάζει μία νέα αποκομμένη δομή για να αντιμετωπίσει το νέο πλαίσιο και την προσθέτει στις διαθέσιμες δομές που έχει. (μετάφραση από Harel και Tall (1991), σελ. 39)

Η *αφαίρεση* θα μπορούσε να θεωρηθεί περίπτωση της *γενίκευσης μέσω*

ανακατασκευής, διότι οι ιδιότητες που προέρχονται από την αφαίρεση είναι ανακατασκευή αρχικών ιδιοτήτων που εφαρμόζονται σε ένα ευρύ πλαίσιο (ως άνω). Συχνά οι αρχικές ιδιότητες βασίζονται σε ειδικές περιπτώσεις της προς *αφαίρεση* έννοιας. Τότε, όπως θα δούμε παρακάτω, η ειδική περίπτωση μπορεί να μην είναι ένα απλό παράδειγμα αλλά ένα *πρότυπο* που επιβάλλει τις ιδιότητες του (Tall, 1987· Harel & Tall, 1991) ή ένα *παραδειγματικό μοντέλο* (*paradigmatic model*, Fischbein, 1987).

Η έννοια της εφαπτομένης προσεγγίζεται σε επίπεδο δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αρχικά ως προς τον κύκλο, αργότερα ως προς τις κωνικές τομές και τέλος ως προς τη γραφική παράσταση συνάρτησης. Η γενίκευση και αφαίρεση της έννοιας σε επίπεδο μαθηματικής θεωρίας υποθέτουμε ότι επηρεάζει τη γνωστική διαδικασία κατανόησής της δημιουργώντας διαισθητικές απόψεις που εδραιώνεται στις προϋπάρχουσες γνώσεις. Κρίναμε επομένως απαραίτητο να ανατρέξουμε σε θεωρητικές προσεγγίσεις που αφορούν αφενός στη διαισθητική γνώση και αφετέρου στο ρόλο της προϋπάρχουσας γνώσης στη διαδικασία της μάθησης.

1.3. Διαισθητική Γνώση (*Intuitive Knowledge*)

Κατά το Fischbein (1987) ο όρος *διαίσθηση* (*intuition*) χρησιμοποιείται ως ισοδύναμος του όρου *διαισθητική γνώση* (*intuitive knowledge*). Η διαισθητική γνώση είναι άμεση γνώση και όχι πηγή ή μέθοδος γνώσης. Δηλαδή ένα είδος γνώσης που εμφανίζεται στο άτομο σαν να είναι κάτι αυταπόδεικτο και αυτονόητο. Η διαίσθηση εκφράζει τη θεμελιώδη και πάγια τάση του ανθρώπινου μυαλού που είναι η αναζήτηση της βεβαιότητας

και σημαίνει τη σφαιρική και συνθετική σύλληψη του νοήματος και την ερμηνεία μίας κατάστασης (Fischbein 1987, 1999).

Η διαισθητική γνώση έχει τα παρακάτω χαρακτηριστικά: είναι *αυταπόδεικτη* (*self-evident*), χαρακτηρίζεται από *εγγενή βεβαιότητα* (*intrinsic certainty*), είναι *επίμονη* (*perseverance*), έχει *εξαναγκαστικό χαρακτήρα* (*coerciveness*), έχει *υπόσταση θεωρίας* (*theory status*), έχει *δυνατότητα διεύρυνσης* (*extrapolativeness*), έχει *σφαιρικότητα* (*globality*) και είναι *υπονοούμενη* (*implicitness*) (Fischbein 1987, σελ. 43-56).

Οι διαισθήσεις μπορούν να διακριθούν ανάλογα με τη προέλευση τους σε *πρωταρχικές* (*primary*) και *δευτερεύουσες* (*secondary*). Οι πρώτες αναφέρονται στα γνωστικά πιστεύω που αναπτύσσουν τα άτομα, ανεξάρτητα από την συστηματική τους εκπαίδευση, ως απόρροια της προσωπικής τους εμπειρίας. Οι δεύτερες είναι διαισθήσεις που δεν προκύπτουν από την φυσική – φυσιολογική εμπειρία το ατόμου. Τέτοιες διαισθήσεις αποκτώνται όταν οι έννοιες που μαθαίνονται μετατρέπονται σε πιστεύω και χρησιμοποιούνται μετά ως αυτονόητες (σελ. 64, ως άνω). Δεν είναι σαφές αν οι δευτερεύουσες διαισθήσεις είναι απαραίτητα και τυπικά ορθές. Αν ναι, τότε κατά την Tsamir (2002) υπάρχουν και οι *παροδικές διαισθήσεις* (*transitory intuition*) μεταξύ των *πρωταρχικών* και *δευτερευουσών*. Η *παροδική διαίσθηση* μπορεί να θεωρηθεί ως *προχωρημένη πρωταρχική διαίσθηση* και αποτελείται από ένα μίγμα των *πρωταρχικών διαισθήσεων* και των θεωρημάτων της τυπικής θεωρίας. Τέτοιες διαισθήσεις δημιουργούνται μέσω της διδακτικής παρέμβασης και γίνονται μέρος των εμπειριών του ατόμου, όταν νέα στοιχεία προσθέτονται χωρίς να τροποποιηθούν οι *πρωταρχικές διαισθήσεις*. Οι *παροδικές διαισθήσεις*, κατά τη Tsamir (2002), δεν είναι τυπικά ορθές σε αντίθεση με τις *δευτερεύουσες διαισθήσεις*. Ο όρος *παροδική διαίσθηση* δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το άτομο κάποια στιγμή θα φτάσει στη *δευτερεύουσα διαίσθηση*, γεγονός που μπορεί να μην πραγματοποιηθεί και ποτέ (ως άνω, σελ. 23). Στην επόμενη ενότητα, καλούμε το μίγμα αυτό των αρχικών διαισθήσεων με τα νέα στοιχεία μέσω της

διδασκαλίας *συνθετικό μοντέλο* (*synthetic model*, Vosniadou, 2007). Αυτή η μίξη στοιχείων θα μας απασχολήσει στη μελέτη της εφαπτομένης, η οποία επειδή προσεγγίζεται σε διαφορετικά πλαίσια φέρνει σε επαφή τους μαθητές με διαφορετικής φύσης πληροφορίες.

Για το σχηματισμό της διαισθητικής γνώσης σημαντικά είναι τα *διαισθητικά μοντέλα* (*intuitive models*) (Fischbein 1987, σελ 121). Ένα σύστημα B αποτελεί ένα μοντέλο του συστήματος A αν, μέσω κάποιου ισομορφισμού, μία περιγραφή ή μία λύση εκφρασμένη με όρους από το A μπορεί να αντιστοιχηθεί με συνέπεια με μία αντίστοιχη εκφρασμένη με όρους του B και αντίστροφα. Τα μοντέλα αποτελούν ένα εργαλείο ή έναν παράγοντα για το σχηματισμό διαισθήσεων και μπορεί να είναι *αναλογικά* ή *παραδειγματικά*. Στη πρώτη περίπτωση το μοντέλο και το αυθεντικό σύστημα ανήκουν σε διαφορετικά εννοιολογικά πλαίσια ενώ στη δεύτερη το μοντέλο είναι ένα υπόδειγμα ή υποκλάση του αυθεντικού συστήματος (αντίστοιχα με τις *μεταφορές* και τις *μετωνυμίες*, Lakoff & Johnson, 1980· Presmeg, 1998) . Ειδικά για τα *παραδειγματικά μοντέλα* θα μιλήσουμε πιο συγκεκριμένα παρακάτω αναφερόμενοι στην περίπτωση της εφαπτόμενης ευθείας.

Γενικά, η προσέγγιση μίας έννοιας μέσω ειδικών περιπτώσεων ενδέχεται να διευκολύνει συγκεκριμενοποιώντας μία γενική ή αφηρημένη έννοια ή να δημιουργήσει παρανοήσεις. Ένα παράδειγμα είναι εμφυτευμένο σε μία πλούσια κατάσταση που περιέχει περισσότερα στοιχεία, δεδομένα και πληροφορίες από αυτά που άμεσα σχετίζονται με το αντικείμενο του οποίου αποτελεί χαρακτηριστική περίπτωση (Sierpiska, 1994). Κατά τη διαδικασία κατανόησης αφηρημένων εννοιών τα παραδείγματα αποτελούν ένα αναγκαίο στήριγμα. Ταυτόχρονα όμως μπορεί να λειτουργήσουν και σαν εμπόδιο, όταν το ίδιο το παράδειγμα καθορίζει τα κριτήρια σύμφωνα με τα οποία αναπτύσσονται οι υποθέσεις, οι συλλογισμοί και τα επιχειρήματα. Ένα παράδειγμα μπορεί να εξελιχθεί από υποδειγματική περίπτωση (*exemplar*) το οποίο είναι ειδική περίπτωση σε πρωτοτυπική περίπτωση (*prototype*) που είναι μία τυπική περίπτωση που επιβάλλει τις ιδιότητες του στη γενική

περίπτωση (Makin & Ross, 1999). Το αποτέλεσμα είναι ο σχηματισμός μίας *Γενικής έννοιας* (*generic concept*) που είναι η έννοια που προκύπτει από αφαίρεση έτσι ώστε «να είναι κοινή σε μία ολόκληρη κλάση από προηγούμενες εμπειρίες» (μετάφραση από Tall, 1987, σελ. 75). Αυτή προκύπτει από την *αρχή της Γενικής επέκτασης* (*generic extension principle*): «αν ένα άτομο εργάζεται σε ένα περιορισμένο πλαίσιο στο οποίο τα παραδείγματα που αντιμετωπίζει έχουν μία συγκεκριμένη ιδιότητα, τότε, με την απουσία αντιπαραδειγμάτων, το μυαλό θεωρεί ότι οι γνωστές αυτές ιδιότητες είναι αυτονόητες και σε άλλα πλαίσια» (μετάφραση από Tall, 1986, όπως αναφέρεται στο Tall, 1991β, σελ. 10).

Οι διαισθητικές γνώσεις των μαθητών πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τη διδασκαλία τους για να ξεπεραστούν οι δυσκολίες στη κατανόηση τους (Fischbein, 1999). Για παράδειγμα, οι μαθητές δεν αισθάνονται την αναγκαιότητα να αποδείξουν κάτι που φαίνεται προφανές και η απαίτηση μίας απόδειξης με τυπικό και αυστηρό τρόπο τους οδηγεί στη σκέψη ότι τα Μαθηματικά είναι ιδιόρρυθμη επιστήμη. Επίσης, συχνά το διαισθητικώς προφανές αντιβαίνει στο τυπικά σωστό. Αν απλά αγνοηθεί η σύγκρουση που προκαλείται από τη λανθασμένη διαισθητική τοποθέτηση, η αρχική διαίσθηση θα μείνει ανέγγιχτη, η αντίφαση θα παραμένει και ενδέχεται αργότερα ο μαθητής να ξεχάσει τον τυπικό μαθηματικό ορισμό (ως άνω, σελ. 26-27).