ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Ορίζουσες

Ευάγγελος Ράπτης

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Περιεχόμενα ενότητας

4.1 Η έννοια της ορίζουσας

1. Οι ορίζουσες εκτός των άλλων εφαρμογών, βοηθούν και στην εύρεση λύσεων των γραμμικών συστημάτων.

2. Έστω $\mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, το σύνολο των πινάκων $\nu \times \nu$ με συντελεστές από το $\mathbb{F}$. Ένας τέτοιος πίνακας έχει την μορφή

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

Ονομάζουμε την πρώτη γραμμή A_1, δηλαδή $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} \end{pmatrix}$.
Ομοίως $A_2 = \begin{pmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} \end{pmatrix}$, A_3, A_4,... ,$A_\nu = \begin{pmatrix} \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$.

3. Ο πίνακας Α μπορεί να γραφεί ως ακολούθως:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ A_\nu \end{pmatrix}$$

4. Μπορούμε τώρα να δώσουμε τον ορισμό της ορίζουσας:

Ορισμός 4.1.1. *Η απεικόνιση $D : \mathbb{F}^{\nu\times\nu} \longrightarrow \mathbb{F}$, ονομάζεται απεικόνιση ορίζουσας αν ικανοποιεί τις παρακάτω τρείς ιδιότητες:*

(α) Είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβολή γραμμής.

(β) Εάν δύο γραμμές ενός πίνακα είναι ίσες, τότε $D(A) = 0$.

(γ) $D(I_\nu) = 1$

5. Για πίνακες 1×1, έχουμε $D(\alpha) = \alpha$.

6. Θέλουμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα 2×2. Έχουμε ότι:
$$D\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} \alpha\cdot(1\ \ 0) + \beta\cdot(0\ \ 1) \\ \gamma\cdot(1\ \ 0) + \delta\cdot(0\ \ 1) \end{pmatrix} =$$
$$= D\begin{pmatrix} \alpha\cdot(1\ \ 0) \\ \gamma\cdot(1\ \ 0) + \delta\cdot(0\ \ 1) \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} \beta\cdot(0\ \ 1) \\ \gamma\cdot(1\ \ 0) + \delta\cdot(0\ \ 1) \end{pmatrix} =$$
$$= D\begin{pmatrix} \alpha\cdot(1\ \ 0) \\ \gamma\cdot(1\ \ 0) \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} \alpha\cdot(1\ \ 0) \\ \delta\cdot(0\ \ 1) \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} \beta\cdot(0\ \ 1) \\ \gamma\cdot(1\ \ 0) \end{pmatrix} + D\begin{pmatrix} \beta\cdot(0\ \ 1) \\ \delta\cdot(0\ \ 1) \end{pmatrix} =$$
$$= \alpha\gamma D\begin{pmatrix} (1\ \ 0) \\ (1\ \ 0) \end{pmatrix} + \alpha\delta D\begin{pmatrix} (1\ \ 0) \\ (0\ \ 1) \end{pmatrix} + \beta\gamma D\begin{pmatrix} (0\ \ 1) \\ (1\ \ 0) \end{pmatrix} + \beta\delta D\begin{pmatrix} (0\ \ 1) \\ (0\ \ 1) \end{pmatrix}$$

Ο πρώτος και τελευταίος προσθετέος είναι μηδέν (γιατί;). Τελικά έχουμε ότι $D\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$ (γιατί;).

Ασκήσεις

Άσκηση 4.1.2. *Να δικαιολογηθούν πλήρως τα γιατί στον υπολογισμό της ορίζουσας ενός πίνακα* 2×2*, όπως παραπάνω.*

Άσκηση 4.1.3. *Δείξτε ότι ένας πίνακας* 2×2 *είναι αντιστρέψιμος εάν η ορίζουσά του είναι διαφορετική του μηδενός.*

Άσκηση 4.1.4. *Δείξτε ότι εάν ένας πίνακας* 2×2 *έχει τις γραμμές του γραμμικά εξαρτημένες, τότε η ορίζουσά του είναι μηδέν.*

4.2 Υπολογισμός της ορίζουσας

1. Ας υπολογίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα 3×3. Ο πίνακας είναι ο

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

2. Θέτουμε $e_1 = (1\ 0\ 0), e_2 = (0\ 1\ 0), e_3 = (0\ 0\ 1)$. Τα e_1, e_2, e_3 είναι πίνακες-γραμμές στο χώρο $\mathbb{R}^{1\times 3}$.

3. Ο πίνακας A γίνεται:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \cdot e_1 + \alpha_{12} \cdot e_2 + \alpha_{13} \cdot e_3 \\ \alpha_{21} \cdot e_1 + \alpha_{22} \cdot e_2 + \alpha_{23} \cdot e_3 \\ \alpha_{31} \cdot e_1 + \alpha_{32} \cdot e_2 + \alpha_{33} \cdot e_3 \end{pmatrix}$$

4. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες και μάλιστα την πρώτη ιδιότητα, βρίσκουμε ότι η ορίζουσα $D(A)$, είναι ένα άθροισμα $3^3 = 27$ όρων, που κάθε ένας είναι της μορφής:

$$\alpha_{1k} \cdot \alpha_{2\lambda} \cdot \alpha_{3\mu} \cdot D\begin{pmatrix} e_k \\ e_\lambda \\ e_\mu \end{pmatrix}$$

Όπου $k, \lambda, \mu \in \{1, 2, 3\}$.

5. Εάν τα k, λ, μ **δεν** είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο, τότε η ορίζουσα $D\begin{pmatrix} e_k \\ e_\lambda \\ e_\mu \end{pmatrix}$ είναι μηδέν (γιατί ;), επομένως μηδενίζεται και όλος ο προσθετέος.

6. Δε μηδενίζονται, επομένως κατ ανάγκην μόνο οι ορίζουσες της μορφής $D\begin{pmatrix} e_k \\ e_\lambda \\ e_\mu \end{pmatrix}$, όπου τα $k, \lambda, \mu \in \{1, 2, 3\}$ είναι διαφορετικά μεταξύ τους ανά δύο. Μα τότε $\{k, \lambda, \mu\} = \{1, 2, 3\}$.

7. Υπάρχουν επομένως μόνο 6 προσθετέοι και η ορίζουσα παίρνει την εξής μορφή:

$$\begin{aligned} D(A) \;=\; & \alpha_{11} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{33} D\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} + \alpha_{11} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{32} D\begin{pmatrix} e_1 \\ e_3 \\ e_2 \end{pmatrix} + \\ & + \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{33} D\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \\ e_3 \end{pmatrix} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{22} \cdot \alpha_{31} D\begin{pmatrix} e_3 \\ e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} + \\ & + \alpha_{12} \cdot \alpha_{23} \cdot \alpha_{31} D\begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_1 \end{pmatrix} + \alpha_{13} \cdot \alpha_{21} \cdot \alpha_{32} D\begin{pmatrix} e_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

8. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες έχουμε:

$$D\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = 1, D\begin{pmatrix} e_1 \\ e_3 \\ e_2 \end{pmatrix} = -1, D\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \\ e_3 \end{pmatrix} = -1, D\begin{pmatrix} e_3 \\ e_2 \\ e_1 \end{pmatrix} = -1, D\begin{pmatrix} e_2 \\ e_3 \\ e_1 \end{pmatrix} = 1, D\begin{pmatrix} e_3 \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 1$$

9. Τελικά η ορίζουσα του πίνακα A είναι

$$\begin{aligned} D(A) &= \alpha_{11}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{33}-\alpha_{11}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{32}-\alpha_{12}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{33}-\alpha_{13}\cdot\alpha_{22}\cdot\alpha_{31}+\\ &+\ \alpha_{12}\cdot\alpha_{23}\cdot\alpha_{31}+\alpha_{13}\cdot\alpha_{21}\cdot\alpha_{32} \end{aligned}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 4.2.1. *Αποδείξτε αναλυτικά τα σημεία 4,5 7 και 8 παραπάνω του υπολογισμού της ορίζουσας ενός πίνακα* 3×3.

Άσκηση 4.2.2. *Να υπολογισθεί η τιμή της ορίζουσας του πίνακα*

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$$

4.3 Υπολογισμός της ορίζουσας - μέρος ΙΙ

Πορεία μελέτης

1. Να κάνετε μία προσπάθεια να βρείτε τύπο για την ορίζουσα πίνακα 4×4. Θα είναι άθροισμα $4! = 24$ προσθετέων.

2. Συμβουλευθείτε για θέματα σχετικά με ορίζουσες τα βιβλία που δίδονται στη βιβλιογραφία στην κεντρική σελίδα του μαθήματος.

3. Να αποδείξετε ότι αν η ορίζουσα ενός πίνακα 3×3 είναι 0, τότε οι γραμμές του είναι γραμμικά εξαρτημένες. Ισχύει το αντίστροφο; Το συμπέρασμα αυτό θα το χρειασθούμε διότι θα μας δώσει ιδέες γενίκευσης για τις ορίζουσες πινάκων $\nu \times \nu$.

4. **Προετοιμασία για γενίκευση:** Έστω $T_\nu = \{1, 2, 3, \cdots, \nu\}$, το σύνολο των φυσικών αριθμών από το 1 έως το ν. Θεωρούμε το σύνολο:

$$S_\nu = \{\theta : T_\nu \longrightarrow T_\nu, \theta \;\; 1-1 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; \epsilon\pi\iota\}$$

5. Η ταυτοτική απεικόνιση ανήκει στο σύνολο S_ν.

6. Αν πάρουμε τη σύνθεση δύο απεικονίσεων του S_ν το αποτέλεσμα θα ανήκει ξανά στο S_ν (γιατί;).

7. Κάθε στοιχείο του S_ν έχει αντίστροφο, το οποίο ανήκει και αυτό στο S_ν (γιατί;).

8. Το πλήθος των στοιχείων του S_ν είναι $\nu! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \nu$.

9. Κάθε στοιχείο του S_ν, ονομάζεται **μετάθεση** του συνόλου T_ν.

10. Όταν ένα στοιχείο του S_ν, μία μετάθεση θ του T_ν δηλαδή, έχει την ιδιότητα:
Υπάρχουν $\kappa, \lambda \in T_\nu$ με $\theta(\kappa) = \lambda, \theta(\lambda) = \kappa$ και $\theta(\mu) = \mu$ για κάθε $\mu \neq \kappa, \lambda$, η μετάθεση αυτή λέγεται **αντιμετάθεση**.

11. Παραθέτουμε, χωρίς απόδειξη, το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.3.1. *(α) Κάθε μετάθεση $\theta \in S_\nu$, γράφεται ως σύνθεση[1] αντιμεταθέσεων.*

(β) Αν έχουμε δύο γραφές της μετάθεσης $\theta \in S_\nu$, ως σύνθεση αντιμεταθέσεων, τότε το πλήθος των αντιμεταθέσεων θα είναι ή άρτιος αριθμός και στις δύο γραφές ή περιττός αριθμός και στις δύο γραφές. Στην πρώτη περίπτωση μιλάμε για ***άρτια*** *μετάθεση , στη δεύτερη για* ***περιττή*** *μετάθεση.*

(γ) Το πλήθος των αρτίων μεταθέσεων του S_ν είναι $\frac{\nu!}{2}$ και το πλήθος των περιττών $\frac{\nu!}{2}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη θα γίνει σε μεταγενέστερα μαθήματα. Δείτε επίσης και στη διεύθυνση εδώ για παραπάνω.

12. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.3.2. *Ορίζουμε ως σημείο μίας μετάθεσης θ το $\sigma(\theta) = 1$, εάν η θ είναι άρτια μετάθεση και το $\sigma(\theta) = -1$, εάν η θ είναι περιττή μετάθεση.*

[1] Τη σύνθεση μεταθέσεων θα τη λέμε και γινόμενο.

13. Σύμφωνα με τα προηγούμενα μαθήματα εάν

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

είναι ένας πίνακας $\nu \times \nu$, τότε η ορίζουσα του A είναι

$$D(A) = \sum_{\theta \in S_\nu} \sigma(\theta) \cdot \left(\alpha_{1\theta(1)}\alpha_{2\theta(2)} \cdots \alpha_{\nu\theta(\nu)}\right)$$

14. Δείτε περισσότερα για τις μεταθέσεις από τη διεύθυνση εδώ.

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν όλες οι μεταθέσεις του $T_3 = \{1, 2, 3\}$. Ποιές από αυτές είναι άρτιες και ποιές περιττές; Να γίνει το ίδιο και για τις μεταθέσεις του $T_4 = \{1, 2, 3, 4\}$.

2. **(Δύσκολη)** Να δείξετε χρησιμοποιώντας τον τύπο παραπάνω ότι η ορίζουσα του τετραγωνικού πίνακα A είναι ίση με την ορίζουσα του αναστρόφου A^t.

4.4 Ορίζουσα γινομένου πινάκων

1. Ας θεωρήσουμε δύο πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

και

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix}$$

2. Πολλαπλασιάστε με τον γνωστό τρόπο τους δύο πίνακες.

3. Η πρώτη γραμμή του γινομένου AB είναι
$\alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{13}\beta_{31},\ \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{13}\beta_{32},\ \alpha_{11}\beta_{13} + \alpha_{12}\beta_{23} + \alpha_{13}\beta_{33}$

4. Η δεύτερη γραμμή του γινομένου AB είναι
$\alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \alpha_{23}\beta_{31},\ \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{23}\beta_{32},\ \alpha_{21}\beta_{13} + \alpha_{22}\beta_{23} + \alpha_{23}\beta_{33}$

5. Η τρίτη γραμμή του γινομένου AB είναι
$\alpha_{31}\beta_{11} + \alpha_{32}\beta_{21} + \alpha_{33}\beta_{31},\ \alpha_{31}\beta_{12} + \alpha_{32}\beta_{22} + \alpha_{33}\beta_{32},\ \alpha_{31}\beta_{13} + \alpha_{32}\beta_{23} + \alpha_{33}\beta_{33}$

6. Ο πίνακας AB γίνεται:

$$AB = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \alpha_{12}\beta_{21} + \alpha_{13}\beta_{31} & \alpha_{11}\beta_{12} + \alpha_{12}\beta_{22} + \alpha_{13}\beta_{32} & \alpha_{11}\beta_{13} + \alpha_{12}\beta_{23} + \alpha_{13}\beta_{33} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \alpha_{22}\beta_{21} + \alpha_{23}\beta_{31} & \alpha_{21}\beta_{12} + \alpha_{22}\beta_{22} + \alpha_{23}\beta_{32} & \alpha_{21}\beta_{13} + \alpha_{22}\beta_{23} + \alpha_{23}\beta_{33} \\ \alpha_{31}\beta_{11} + \alpha_{32}\beta_{21} + \alpha_{33}\beta_{31} & \alpha_{31}\beta_{12} + \alpha_{32}\beta_{22} + \alpha_{33}\beta_{32} & \alpha_{31}\beta_{13} + \alpha_{32}\beta_{23} + \alpha_{33}\beta_{33} \end{pmatrix}$$

7. Ο πίνακας AB « γίνεται» επίσης ένας πίνακας 3×1 με
$AB = \begin{pmatrix} X & Y & Z \end{pmatrix}$όπου

$$X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} \cdot \beta_{11} + \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{21} + \begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \beta_{31}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} \cdot \beta_{12} + \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{22} + \begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \beta_{32}$$

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} \cdot \beta_{13} + \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{23} + \begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \beta_{33}$$

8. Παρατηρούμε ότι το X είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A με συντελεστές από τον πίνακα B. Το ίδιο και για το Y και το Z.

9. Θέλοντας να υπολογίσουμε την ορίζουσα του AB σκεπτόμαστε ότι λόγω της γραμμικότητας (δες τον ορισμό 4.1.1) έχουμε ότι:

$$|\ AB\ | = \text{άθροισμα 27 όρων}$$

Κάθε προσθετέος προκύπτει λαμβάνοντας έναν προσθετέο από το X , έναν προσθετέο από το Y και έναν προσθετέο από το Z.

10. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Επιλέγουμε το στοιχείο:
$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} \cdot \beta_{11}$ του X, το στοιχείο $\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{22}$ του Y και το στοιχείο $\begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \beta_{33}$ του Z.
Τότε σχηματίζεται ο πίνακας που έχει ως στήλες
Πρώτη στήλη την $\begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} \cdot \beta_{11}$
δεύτερη στήλη την $\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{22}$
και τρίτη στήλη την $\begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \beta_{33}$

11. Η ορίζουσα του παραπάνω πίνακα θα είναι ίση με

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \beta_{11}\beta_{22}\beta_{33}$$

12. Ας δούμε ένα ακόμη παράδειγμα. Επιλέγουμε το στοιχείο
$\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{21}$ του X και τα υπόλοιπα δύο τα ίδια όπως πρίν δηλαδή:

$\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{22}$ του Y και το στοιχείο $\begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \beta_{33}$ του Z
Τότε σχηματίζεται ο πίνακας που έχει ως στήλες
Πρώτη στήλη την $\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{21}$
δεύτερη στήλη την $\begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} \cdot \beta_{22}$
και τρίτη στήλη την $\begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \beta_{33}$

13. Η ορίζουσα του παραπάνω πίνακα θα είναι ίση με

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \beta_{21}\beta_{22}\beta_{33}$$

Η ποσότητα αυτή είναι ίση με μηδέν διότι η ορίζουσα έχει δύο στήλες ίσες.

14. Αν θελήσουμε, λοιπόν, να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα AB θα πρέπει να υπολογίσουμε ένα άθροισμα με $3^3 = 27$ προσθετέους.
Όμως αν παρατηρήσουμε πιο καλά θα δούμε ότι **μόνο** έξι το πλήθος προσθετέοι παραμένουν, οι οποίοι ενδέχεται να μην είναι μηδέν.

15. Γράφουμε τους προσθετέους που μιλήσαμε παραπάνω:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \beta_{11}\beta_{22}\beta_{33} = |A| \cdot \beta_{11}\beta_{22}\beta_{33}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{22} & \alpha_{21} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{31} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \cdot \beta_{12}\beta_{21}\beta_{33} = -|A| \cdot \beta_{12}\beta_{21}\beta_{33}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{12} & \alpha_{11} \\ \alpha_{23} & \alpha_{22} & \alpha_{21} \\ \alpha_{33} & \alpha_{32} & \alpha_{31} \end{vmatrix} \cdot \beta_{13}\beta_{22}\beta_{31} = -|A| \cdot \beta_{13}\beta_{22}\beta_{31}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{23} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{33} & \alpha_{32} \end{vmatrix} \cdot \beta_{11}\beta_{23}\beta_{32} = -|A| \cdot \beta_{11}\beta_{23}\beta_{32}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{11} \\ \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{21} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{31} \end{vmatrix} \cdot \beta_{12}\beta_{23}\beta_{31} = |A| \cdot \beta_{12}\beta_{23}\beta_{31}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{23} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{33} & \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} \cdot \beta_{13}\beta_{21}\beta_{32} = |A| \cdot \beta_{13}\beta_{21}\beta_{32}$$

16. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε την ποσότητα:
$|A| \cdot (\beta_{11}\beta_{22}\beta_{33} - \beta_{12}\beta_{21}\beta_{33} - \beta_{13}\beta_{22}\beta_{31} - \beta_{11}\beta_{23}\beta_{32} + \beta_{12}\beta_{23}\beta_{31} + \beta_{13}\beta_{21}\beta_{32})$

17. Παρατηρούμε ότι η παράσταση μέσα στην παρένθεση είναι η ορίζουσα του πίνακα B (δες σχετικά προηγούμενα μαθήματα).

18. Τελικά έχουμε για πίνακες 3×3 ότι

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Άσκηση

Να αποδείξετε λεπτομερώς, χρησιμοποιώντας τις ιδέες του σημερινού μαθήματος ότι η ορίζουσα του γινομένου δύο τετραγωνικών πινάκων είναι ίση με το γινόμενο των οριζουσών των πινάκων, όταν έχουμε πίνακες 2×2 και πίνακες 4×4. Να κάνετε μία προσπάθεια για την περίπτωση των πινάκων $\nu \times \nu$.

4.5 Ανάπτυγμα ορίζουσας

1. Δείτε ξανά τον ορισμό της ορίζουσας 4.1.1 και σκεφθείτε ότι στην πραγματικότητα η ορίζουσα είναι μία συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των τετραγωνικών πινάκων και το πεδίο τιμών οι συντελεστές.

2. Σκεφθείτε επίσης ότι η έννοια της ορίζουσας στο 4.1.1 ορίζεται επικαλούμενοι ιδιότητες μιας συνάρτησης. Χρησιμοποιούμε μία συνάρτηση χωρίς να είμαστε σίγουροι **αν υπάρχει!**[2]

3. Η πρώτη φορά, στο μάθημα αυτό, που βεβαιωνόμαστε ότι υπάρχει συνάρτηση ορίζουσας είναι στο σημείο 13 . Εκεί βρίσκουμε μάλιστα τύπο για τη συνάρτηση αυτή.[3]

4. Από τα προηγούμενα βρίσκουμε και έχουμε αποδείξει όχι μόνο ότι υπάρχει η συνάρτηση ορίζουσας, αλλά οι ιδιότητες που απαιτούμε καθορίζουν την μοναδικότητα, με την έννοια: **αν υπάρχει συνάρτηση ορίζουσας**[4] , τότε είναι μοναδική.

5. Σύμφωνα με τα παραπάνω αν βρούμε μία συνάρτηση με τις ιδιότητες που συζητάμε στο 4.1.1 τότε αναγκαστικά η συνάρτηση αυτή είναι η ορίζουσα.

6. Εδώ είναι που βρίσκουμε την έννοια του αναπτύγματος μιας ορίζουσας ως προς μία γραμμή ή μία στήλη. Δείτε λοιπόν:

7. Έστω
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$
ένας πίνακας $\nu \times \nu$.

8. Σε κάθε στοιχείο α_{ij} αντιστοιχίζουμε το στοιχείο
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} K_{ij},$$
όπου K_{ij} είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον A εάν διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη.

9. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

   Ορισμός 4.5.1. *Θεωρούμε το άθροισμα:*
$$D_i(A) = \sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{ij} \cdot A_{ij}$$
   Το άθροισμα αυτό το λέμε **ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα A ως προς τη γραμμή i**.

[2] Στα Μαθηματικά δεν αρκεί να πούμε *έστω θ μία συνάρτηση με κάποιες ιδιότητες*. Πρέπει να βρεθεί τρόπος να αποδείξουμε ή να βεβαιωθούμε ότι υπάρχει. Για παράδειγμα αν πούμε έστω $\theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες 1) Η θ είναι σταθερή και 2) $\theta(1) = 2, \theta(3) = 7$ τότε είμαστε σε αντίφαση, τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει.

[3] Όπως ίσως θα γνωρίζετε **δεν είναι ανάγκη** μία συνάρτηση να έχει τύπο. Δες περισσότερα εδώ.

[4] μόλις πριν λίγο βεβαιωθήκαμε ότι υπάρχει

10. Δίνουμε ακόμη και τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.5.2. *Θεωρούμε το άθροισμα:*

$$D^j(A) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{ij} \cdot A_{ij}$$

Το άθροισμα αυτό το λέμε **ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα A ως προς τη στήλη j**.

11. Οι παραπάνω παραστάσεις $D_i(A)$ και $D^j(A)$ ως συναρτήσεις του πίνακα A ικανοποιούν τις τρεις απαιτήσεις του ορισμού της ορίζουσας (γιατί;) και για τον λόγο αυτό είναι ίσες με την τιμή της ορίζουσας του πίνακα A ως προς τη γραμμή i ή με το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα A ως προς τη στήλη j για κάθε γραμμή και για κάθε στήλη.

12. Παρακολουθήστε προσεκτικά το βιντεοσκοπημένο μάθημα του καθηγητή W.Gilbert Strang του MIT εδώ σχετικά με την εισαγωγή των οριζουσών.

Ασκήσεις

1. Βρείτε από οποιοδήποτε βιβλίο το *ανάπτυγμα* μιας ορίζουσας ως προς μία γραμμή και αποδείξτε ότι έτσι υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα A.

2. Βρείτε από οποιοδήποτε βιβλίο το *ανάπτυγμα* μιας ορίζουσας ως προς μία στήλη και αποδείξτε ότι έτσι υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα A.

4.6 Ορίζουσα και αντιστρεψιμότητα

1. Όπως και στο προηγούμενο μάθημα ας θεωρήσουμε τον πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

2. Σε κάθε στοιχείο α_{ij} αντιστοιχίζουμε το στοιχείο

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} K_{ij}$$

όπου K_{ij} είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει από τον A εάν διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη.

3. Κατασκευάζουμε ένα νέο πίνακα[5] τον

$$adj(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{\nu 1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{\nu 2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \cdots & \alpha_{\nu 3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1\nu} & A_{2\nu} & A_{3\nu} & \cdots & A_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

4. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός 4.6.1. *Ο παραπάνω πίνακας λέγεται* **προσαρτημένος πίνακας του A**[6] *και συμβολίζεται με adjoint(A) ή με adj(A).*

5. Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 4.6.2. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Τότε $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = \mid A \mid I_\nu$*

Απόδειξη Η απόδειξη γίνεται με υπολογισμό του γινομένου $A \cdot adj(A)$ και $adj(A) \cdot A$, χρησιμοποιώντας τα σχετικά με το ανάπτυγμα ορίζουσας. Δες και τα αναγραφόμενα στο βιβλίο εδώ σελίδα 322.

6. Αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.6.3. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$. Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος εάν και μόνο εάν η ορίζουσά του είναι διαφορετική του μηδενός.*

Απόδειξη Έστω ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Τότε θα υπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{F}^{\nu\times\nu}$, με την ιδιότητα $A \cdot B = B \cdot A = I_\nu$. Από τις ιδιότητες της ορίζουσας έχουμε ότι $\mid A \cdot B \mid = \mid I_\nu \mid = 1 = \mid A \mid \cdot \mid B \mid$. Από εδώ συμπεραίνουμε ότι $\mid A \mid \neq 0$.

Αντίστροφα έστω ότι $\mid A \mid \neq 0$. Από την προγούμενη σχέση για τον προσαρτημένο πίνακα έχουμε ότι ορίζεται ο πίνακας $\frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο αντίστροφος του A είναι ο $\frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$.

[5] Προσοχή τι βάζουμε για τον σχηματισμό γραμμών και στηλών.

[6] Στα αγγλικά ο όρος είναι adjoint.

Ο Ωραίος ισομορφισμός

Έχουμε πει σε προηγούμενα μαθήματα ότι αν δύο διανυσματικοί χώροι είναι ισόμορφοι, τότε **δεν** κάνουμε διάκριση μεταξύ τους. Στην πραγματικότητα αν δύο διανυσματικοί χώροι A και B είναι ισόμορφοι, πρόκειται για τον *ίδιο* διανυσματικό χώρο με διαφορετική μορφή. Κάθε *συμβάν* και κάθε σχέση στον A έχει το αντίστοιχό του στον B και αντίστροφα.

Παρακάτω θα αναφερθούμε σε έναν ισομορφισμό από τα προηγούμενα μαθήματα:

1. Θεωρούμε δύο διανυσματικούς χώρους A και B με $dimA = \mu$ και $dimB = \nu$ και συντελεστές από το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών[7].

2. Θεωρούμε το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων $\mathcal{L}\,(A, B)$ από τον διανυσματικό χώρο A στον διανυσματικό χώρο B.

3. Το σύνολο $\mathcal{L}\,(A, B)$ γίνεται και αυτό διανυσματικός χώρος με πράξεις την πρόσθεση συναρτήσεων και γινόμενο συντελεστή επι συνάρτηση.

4. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο των πινάκων $\mathbb{R}^{\nu\times\mu}$.

5. Επιλέγουμε μία διατεταγμένη βάση $\overline{\alpha}$ του A και μία διατεταγμένη βάση $\overline{\beta}$ του B.

6. Η απεικόνιση $\Theta : \mathcal{L}\,(A, B) \longrightarrow \mathbb{R}^{\nu\times\mu}$ με
$$f \longmapsto (f : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$$
είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων[8].

7. Ο ισομορφισμός Θ, που θα τον λέμε από τώρα και στα επόμενα **Ωραίο ισομορφισμό**[9] μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι οι δύο διανυσματικοί χώροι $\mathcal{L}\,(A, B)$ και $\mathbb{R}^{\nu\times\mu}$ είναι στην πραγματικότητα το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο με διαφορετικές μορφές.

Ασκήσεις

1. Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ καθώς και ο $adj(A)$.

2. Να βρείτε δύο ιδιότητες του διανυσματικού χώρου $\mathcal{L}\,(A, B)$ και να τις «μεταφράσετε» με τη βοήθεια του «ωραίου ισομορφισμού» σε ιδιότητες πινάκων π.χ. αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση έχει ως «μετάφραση» αντιστρέψιμος πίνακας. Βεβαιωθείτε για τη μετάφραση αυτή.

[7] Όπως έχουμε επισημάνει και σε άλλα σημεία, θα μπορούσαμε να έχουμε διανυσματικούς χώρους με άλλους συντελεστές.

[8] Έχει αποδειχθεί σε προηγούμενα μαθήματα ότι σε κάθε γραμμική απεικόνιση αντιστοιχεί ένας πίνακας και αντίστροφα, αρκεί βέβαια να έχουμε επιλέξει βάσεις.

[9] Μόνο στο μάθημα αυτό θα χρησιμοποιούμε τον όρο *Ωραίο ισομορφισμό*.

4.7 Τετραγωνικά Γραμμικά Συστήματα

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}\cdot x_1+\alpha_{12}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{1\nu}\cdot x_\nu=\beta_1 \\ \alpha_{21}\cdot x_1+\alpha_{22}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{2\nu}\cdot x_\nu=\beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\nu1}\cdot x_1+\alpha_{\nu2}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{\nu\nu}\cdot x_\nu=\beta_\nu \end{array} \qquad (\mathbf{T\Sigma})$$

Το παραπάνω σύστημα λέγεται *τετραγωνικό* διότι έχουμε ίσο αριθμό εξισώσεων και αγνώστων και ως εκ τούτου ο πίνακας A του συστήματος είναι τετραγωνικός.

1. Υπενθυμίζουμε ότι ο πίνακας A του συστήματος είναι ο

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \cdots & \alpha_{3\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\nu1} & \alpha_{\nu2} & \alpha_{\nu3} & \cdots & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

2. Μπορούμε[10] να γράψουμε το σύστημα $(\mathbf{T\Sigma})$ υπό μορφή πινάκων ως εξής:

$$A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_\nu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_\nu \end{pmatrix}$$

   και έτσι αντί να έχουμε να λύσουμε το γραμμικό σύστημα, έχουμε την εξίσωση αυτή με πίνακες.

3. Υποθέτουμε τώρα ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της τελευταίας ισότητας και έχουμε:

$$A^{-1}\cdot(A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_\nu \end{pmatrix})=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_\nu \end{pmatrix}$$

   συνεχίζοντας[11] έχουμε:

$$(A^{-1}\cdot A)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_\nu \end{pmatrix}=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_\nu \end{pmatrix}$$

[10] Η αντιμετώπιση αυτή είχε γίνει και σε προηγούμενο μάθημα.

[11] Δεν έχουμε αποδείξει ακόμη ότι ο πολλάπλασιασμός πινάκων έχει την προσεταιριστική ιδιότητα. Ο φοιτητής παροτρύνεται να το αποδείξει χρησιμοποιώντας τον Ωραίο ισομορφισμό, μετατρέποντας το ερώτημα για πίνακες σε ερώτημα σχετικά με γραμμικές απεικονίσεις.

και έτσι έχουμε

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_\nu \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_\nu \end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα και συγκεκριμένα το 4.6.3 ο αντίστροφος του πίνακα A είναι ο $\frac{1}{|A|} \cdot adj(A)$ δηλαδή ο

$$\frac{1}{\mid A \mid} \cdot adj(A) = \frac{1}{\mid A \mid} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{\nu 1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{\nu 2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \cdots & \alpha_{\nu 3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1\nu} & A_{2\nu} & A_{3\nu} & \cdots & A_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

και τελικά

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_\nu \end{pmatrix} = \frac{1}{\mid A \mid} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \cdots & A_{\nu 1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \cdots & A_{\nu 2} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & \cdots & \alpha_{\nu 3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1\nu} & A_{2\nu} & A_{3\nu} & \cdots & A_{\nu\nu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_\nu \end{pmatrix}$$

4. Αν κάνουμε τις πράξεις στο δεύτερο μέλος θα βρούμε ένα πίνακα $\nu \times 1$ και εξισώνοντας βρίσκουμε κάθε $x_i, i = 1, 2, \cdots, \nu$.

5. Ας βρούμε λοιπόν το x_1. Στη θέση 11 στο δεξιό μέλος μετά από τις πράξεις έχουμε την ποσότητα:

$$\frac{1}{\mid A \mid} \cdot (A_{11} \cdot \beta_1 + A_{21} \cdot \beta_2 + \cdots + A_{\nu 1} \cdot \beta_\nu)$$

Παρατηρώντας προσεκτικά θα διαπιστώσουμε ότι η ποσότητα
$A_{11} \cdot \beta_1 + A_{21} \cdot \beta_2 + \cdots + A_{\nu 1} \cdot \beta_\nu$ είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας του πίνακα

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \cdots & \alpha_{3\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_\nu & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \cdots & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

ως προς την πρώτη στήλη.

6. Σύμφωνα με τα παραπάνω, λοιπόν, έχουμε·

$$x_1 = \frac{1}{\mid A \mid} \cdot det \begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \beta_2 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \beta_3 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \cdots & \alpha_{3\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_\nu & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \cdots & \cdots & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

7. Θέτουμε

$$D_i = det\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \beta_1 & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \beta_2 & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \beta_3 & \alpha_{3\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \cdots & \beta_\nu & \alpha_{\nu\nu} \end{pmatrix}$$

δηλαδή το D_i είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας ενός πίνακα, ο οποίος προέρχεται από τον πίνακα A του συστήματος αν αντικαταστήσουμε την i στήλη με τη στήλη των σταθερών όρων $\beta_i, i = 1, 2, \dots, \nu$ και αναπτύξουμε ως προς την i-στήλη.

8. Οι τύποι τελικά που δίνουν τα $x_1, i = 1, 2, \dots, \nu$, είναι οι:

$$x_i = \frac{D_i}{\mid A \mid}, i = 1, 2, \dots, \nu$$

9. Οι τελευταίοι τύποι εύρεσης της μοναδικής λύσης ενός τετραγωνικού γραμμικού συστήματος με αντιστρέψιμο πίνακα λέγονται **τύποι του Cramer**.

10. Διαβάστε επί πλέον εδώ για τον κανόνα του Cramer .

11. Δείτε επίσης και τις διαλέξεις του καθηγητή W.G.Strang σε βίντεο εδώ και εδώ. Δώστε ιδιαίτερη προσοχή όταν συνδέει την ορίζουσα με το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου και τον όγκο ενός παραλληλεπιπέδου.

Ασκήσεις

1. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + \lambda \cdot z &= 0 \end{aligned}$$

Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση και ποια είναι αυτή;

2. Δίνεται ένας πίνακας A 3×3 με τάξη 2 (π.χ. ο $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$)

   2. 1. Δείξτε ότι ο πίνακας A έχει ορίζουσα μηδέν.

   2. 2. Διαγράφουμε από τον πίνακα A μία γραμμή και μία στήλη, οπότε σχηματίζεται ένας *υποπίνακας* 2×2. Πόσοι υποπίνακες υπάρχουν;

   2. 3. Δείξτε ότι τουλάχιστον ένας υποπίνακας έχει ορίζουσα διαφορετική του μηδενός.

4.8 Τάξη πίνακα

1. Αποδεικνύουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 4.8.1. *Δίνονται τα διανύσματα:*

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots, x_{1\mu}, \cdots, x_{1\nu}) \\
\alpha_2 &= (x_{21}, x_{22}, x_{23}, \cdots, x_{2\mu}, \cdots, x_{2\nu}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_\kappa &= (x_{\kappa 1}, x_{\kappa 2}, x_{\kappa 3}, \cdots, x_{\kappa\mu}, \cdots, x_{\kappa\nu})
\end{aligned}$$

και τα διανύσματα:

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots, x_{1\mu}) \\
\beta_2 &= (x_{21}, x_{22}, x_{23}, \cdots, x_{2\mu}) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\beta_\kappa &= (x_{\kappa 1}, x_{\kappa 2}, x_{\kappa 3} \cdots, x_{\kappa\mu})
\end{aligned}$$

(α) *Εάν τα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε και τα διανύσματα $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\kappa$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.*

(β) *Εάν τα διανύσματα $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\kappa$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε και τα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη

(α) *Ας υποθέσουμε ότι τα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\kappa$ όχι όλοι μηδέν έτσι ώστε:*

$$\lambda_1 \cdot \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \alpha_2 + \cdots + \lambda_\kappa \cdot \alpha_\kappa = 0$$

Αντικαθιστώντας όπου $\alpha_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, \cdots, x_{i\mu}, \cdots, x_{i\nu}), i = 1, 2, \cdots, \kappa$ έχουμε:

$$\lambda_1 \cdot (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \cdots, x_{1\mu}, \cdots, x_{1\nu}) + \lambda_2 \cdot (x_{21}, x_{22}, x_{23}, \cdots, x_{2\mu}, \cdots, x_{2\nu}) + \cdots +$$

$$+\lambda_\kappa \cdot (x_{\kappa 1}, x_{\kappa 2}, x_{\kappa 3}, \cdots, x_{\kappa\mu}, \cdots, x_{\kappa\nu}) = (0, 0, 0, 0, \cdots, 0)$$

Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στις ισότητες:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \cdot x_{11} + \lambda_2 \cdot x_{21} + \cdots + \lambda_\kappa \cdot x_{\kappa 1} = 0 \\
&\lambda_1 \cdot x_{12} + \lambda_2 \cdot x_{22} + \cdots + \lambda_\kappa \cdot x_{\kappa 2} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\lambda_1 \cdot x_{1\mu} + \lambda_2 \cdot x_{2\mu} + \cdots + \lambda_\kappa \cdot x_{\kappa\mu} = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\lambda_1 \cdot x_{1\nu} + \lambda_2 \cdot x_{2\nu} + \cdots + \lambda_\kappa \cdot x_{\kappa\nu} = 0
\end{aligned}$$

Από τις πρώτες μ ισότητες έχουμε:

$$\lambda_1 \cdot \beta_1 + \lambda_2 \cdot \beta_2 + \cdots + \lambda_\kappa \cdot \beta_\kappa = 0$$

Αφού, όπως είπαμε προηγουμένως, δεν είναι όλοι οι συντελεστές μηδέν, συμπεραίνουμε από τον ορισμό ότι τα διανύσματα $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\kappa$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.

(β) *Έστω τώρα ότι τα διανύσματα $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\kappa$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ενώ τα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Σύμφωνα με τα προηγούμενα θα έπρεπε και τα $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\kappa$ να είναι γραμμικά εξαρτημένα, άτοπο από την υπόθεση.*

2. Σχολιάζοντας το Λήμμα, που μόλις αποδείξαμε, θα μπορούσαμε να πούμε τα παρακάτω:

2. 1. Τα κ το πλήθος διανύσματα $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\kappa$, προήλθαν από τα κ το πλήθος διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa$ με αποκοπή ν-μ στοιχείων της ίδιας θέσης για όλα.

2. 2. Τα κ το πλήθος διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa$, προήλθαν από τα κ το πλήθος διανύσματα $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\kappa$ με επισύναψη $\nu - \mu$ στοιχείων της ίδιας θέσης όλα.

2. 3. Από την απόδειξη προκύπτει ότι δεν έχει σημασία αν αποκόψουμε τα τελευταία $\nu - \mu$ στοιχεία κάθε διανύσματος από τα $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa$. Μπορούμε να αποκόψουμε οποιαδήποτε $\nu - \mu$ το πλήθος στοιχεία από όλα τα διανύσματα αυτά, αρκεί να είναι όλα στις ίδιες θέσεις.

2. 4. Από την απόδειξη προκύπτει επίσης, ότι δεν έχει σημασία αν επισυνάψουμε τα τελευταία $\nu - \mu$ στοιχεία κάθε διανύσματος από τα $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\kappa$. Μπορούμε να επισυνάψουμε οποιαδήποτε $\nu - \mu$ το πλήθος στοιχεία από όλα τα διανύσματα αυτά, αρκεί να είναι όλα στις ίδιες θέσεις.

3. Αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.8.2. *Έστω $A \in \mathbb{F}^{\mu \times \nu}$ ένας πίνακας με μ γραμμές και ν στήλες. Υποθέτουμε ότι η τάξη $rank(A)$ του πίνακα A είναι κ. Επιλέγουμε οποιεσδήποτε λ γραμμές*[12] *και λ στήλες του πίνακα A, οπότε σχηματίζεται ένας υποπίνακας $\lambda \times \lambda$.*

(α) *Υπάρχει υποπίνακας (τουλάχιστον ένας) $\kappa \times \kappa$ του A με ορίζουσα διαφορετική του μηδενός.*

(β) *Κάθε υποπίνακας $((\kappa+1) \times (\kappa+1))$, $((\kappa+2) \times (\kappa+2)), \cdots$ είναι μη αντιστρέψιμος και έχει ορίζουσα μηδέν.*

Απόδειξη

(α) *Ο πίνακας $A \in \mathbb{F}^{\mu \times \nu}$ έχει τάξη κ. Άρα το μέγιστο πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών ή στηλών είναι κ. Επιλέγουμε κ το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές. Σχηματίζεται ένας πίνακας $\kappa \times \nu$. Ο πίνακας αυτός έχει τάξη ακριβώς κ και αυτός, διότι έχει κ γραμμές, οι οποίες είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα θα υπάρχουν στον πίνακα αυτόν κ το πλήθος γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, τις οποίες επιλέγουμε. Τελικά σχηματίζεται ένας υποπίνακας $\kappa \times \kappa$ με τάξη κ, ας τον ονομάσουμε B.*

Γιατί ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και έχει ορίζουσα διαφορετική του μηδενός;

Ο υποπίνακας B είναι τετραγωνικός $\kappa \times \kappa$ με τάξη κ από την κατασκευή του. Σύφωνα με προηγούμενα μαθήματα[13] *ο πίνακας B αντιστοιχεί σε μία γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{F}^\kappa \longrightarrow \mathbb{F}^\kappa$ με $dim(Imf) = rank(B) = \kappa$. Ο υπόχωρος Imf έχει διάσταση κ, ίση με τη διάσταση όλου του χώρου $\mathbb{F}^\kappa$, άρα η f είναι επί. Επί πλέον έχουμε ότι $\kappa = dimV = dimKerf + dimImf = dimKerf + \kappa$ και έτσι $dimKerf = 0$ άρα $Kerf = \{\mathbf{0}\}$ και έτσι η γραμμική απεικόνιση είναι $1-1$. Τελικά η γραμμική απεικόνιση f είναι ισομορφισμός και επομένως ο αντίστοιχος σ' αυτήν πίνακας B είναι αντιστρέψιμος. Υπάρχει επομένως ο B^{-1} με την ιδιότητα $B \cdot B^{-1} = I$,άρα $\mid B \mid \cdot \mid B^{-1} \mid = \mid I \mid = 1$ και τελικά $\mid B \mid \neq 0$.*

[12] προφανώς $\lambda \leq min(\mu, \nu)$

[13] Δες την παράγραφο 4.6

(β) *Για να σχηματισθεί ένας υποπίνακας* $((\kappa+1)\times(\kappa+1))$ *από τον πίνακα* A *επιλέγουμε* $(\kappa+1)$ *γραμμές και* $(\kappa+1)$ *στήλες. Όμως ο πίνακας* A *έχει τάξη* κ *και επομένως οι* $(\kappa+1)$ *γραμμές θα είναι γραμμικά εξαρτημένες. Κατά τον σχηματισμό* $(\kappa+1)$ *στηλών από τις ήδη επιλεγμένες* $(\kappa+1)$ *γραμμές αποκόπτουμε κατάλληλο πλήθος στοιχείων και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.8.1 έχουμε ότι ο υποπίνακας αυτός είναι τετραγωνικός* $((\kappa+1)\times(\kappa+1))$ *και έχει γραμμικά εξαρτημένες γραμμές ή στήλες. Έτσι ο υποπίνακας είναι μη αντιστρέψιμος και επομένως η ορίζουσά του είναι μηδέν.*

4.9 Γραμμικά συστήματα

Συνολική αντιμετώπιση και συμπεράσματα

Πορεία μελέτης

1. Μελετήστε καλά τα προηγούμενα μάθηματα. Οι αναφορές και οι συμβολισμοί θα προέρχονται από το μάθημα αυτό.

2. Θα αποδείξουμε τώρα το θεώρημα 3.10.1, που το είχαμε διατυπώσει χωρίς απόδειξη. Εάν η τάξη $rank(A)$ του πίνακα A του συστήματος είναι ίση με την τάξη $rank(\Gamma)$ του επαυξημένου πίνακα, αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα-στήλη $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_\mu \end{pmatrix}$, γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων-στηλών του πίνακα του συστήματος. Έχουμε δηλαδή τη δυνατότητα να γράψουμε μία σχέση της μορφής:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{\mu 1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{\mu 2} \end{pmatrix} + \cdots + x_\nu \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{3\nu} \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{\mu 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_\mu \end{pmatrix} \tag{4.9.0.1}$$

αλλά τότε το διάνυσμα $(x_1, x_2, \cdots, x_\nu)$ είναι (τουλάχιστον) μία λύση του συστήματος.

Αντίστροφα έστω ότι το γραμμικό σύστημα έχει (τουλάχιστον) μία λύση. Τότε μπορούμε να έχουμε μία σχέση όπως η 4.9.0.1. Αλλά αυτό σημαίνει ότι το διάνυσμα-στήλη $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_\mu \end{pmatrix}$ ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν οι στήλες του πίνακα του συστήματος και έτσι η τάξη $rank(A)$ του πίνακα A του συστήματος είναι ίση με την τάξη $rank(\Gamma)$ του επαυξημένου πίνακα.

3. Ερχόμαστε τώρα στην περίπτωση ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος. Σύμφωνα με τους συμβολισμούς και την προσέγγιση στα προηγούμενα έχουμε ότι το σύνολο λύσεων του

$$\begin{array}{l} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu} \cdot x_\nu = 0 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu} \cdot x_\nu = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1} \cdot x_1 + \alpha_{\mu 2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu} \cdot x_\nu = 0 \end{array} \qquad (\mathbf{O}\Sigma)$$

είναι ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης

$$\theta : \mathbb{F}^{\nu\times 1} \longrightarrow \mathbb{F}^{\mu\times 1}$$

η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\theta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ \dots \\ x_\nu \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ \dots \\ x_\nu \end{pmatrix}$$

4. Όπως βρίσκουμε η διάσταση του συνόλου λύσεων είναι

$$dim(\mathbf{O}\Lambda) = dim\mathbb{F}^{\nu\times 1} - dimIm\theta = \nu - rank(A)$$

Δες και στην παράγραφο 3.9, στο 9.

5. Καταλήγουμε στο παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 4.9.1. *(α) Το ομογενές γραμμικό σύστημα έχει ακριβώς μία λύση (αναγκαστικά τη μηδενική λύση) εάν και μόνο εάν η τάξη του πίνακα A είναι ίση με τον αριθμό των αγνώστων.*

(β) Το ομογενές γραμμικό σύστημα έχει παραπάνω από μία λύσεις[14] εάν και μόνο εάν $\nu > rank(A)$ δηλαδή ο αριθμός των αγνώστων είναι μεγαλύτερος από την τάξη του πίνακα του συστήματος A[15].

6. **Πως βρίσκουμε το σύνολο λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος**

6. 1. Βρίσκουμε την τάξη του πίνακα του συστήματος. Αν η τάξη είναι ίση με τον αριθμό των αγνώστων απαντάμε απλά ότι υπάρχει μοναδική λύση η μηδενική $(0,0,.....,0)$.

6. 2. Αν η τάξη του πίνακα είναι μικρότερη του αριθμού των αγνώστων έχουμε πολλές λύσεις. Στο σύστημα

$$\begin{matrix} \alpha_{11}\cdot x_1 + \alpha_{12}\cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu}\cdot x_\nu = 0 \\ \alpha_{21}\cdot x_1 + \alpha_{22}\cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu}\cdot x_\nu = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{\mu 1}\cdot x_1 + \alpha_{\mu 2}\cdot x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu}\cdot x_\nu = 0 \end{matrix} \qquad (\mathbf{O}\Sigma)$$

ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \cdots & \alpha_{3\nu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} & \cdots & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

και έχει τάξη κ. Σύμφωνα με προηγούμενο μάθημα (δες το 4.8) ο A έχει ένα τετραγωνικό υποπίνακα $\kappa\times\kappa$ με ορίζουσα διαφορετική του μηδενός, ενώ όλοι οι άλλοι υποπίνακες $(\kappa+1)\times(\kappa+1)$ κλπ έχουν ορίζουσα μηδέν.

[14] Δεν γράφουμε εδώ άπειρες λύσεις, διότι όπως θα μάθετε υπάρχουν και διανυσματικοί χώροι και γραμμικά συστήματα με συντελεστές από ένα πεπερασμένο σύνολο. Για παράδειγμα στην Πληροφορική χρησιμοποιούμε το πεπερασμένο σύνολο $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ ως σύνολο συντελεστών. Συνήθως όμως εδώ χρησιμοποιούμε για συντελεστές το σύνολο των πραγματικών αριθμών οπότε έχουμε ή μία ή άπειρες λύσεις.

[15] Αυτό ανταποκρίνεται στη διαίσθησή μας, αν ερμηνεύσουμε τον αριθμό αγνώστων ως βαθμούς ελευθερίας και κάθε εξίσωση (ανεξάρτητη από τις προηγούμενες) ως δεσμεύσεις που πρέπει να υπακούουν οι άγνωστοι.

6. 3. Επιλέγουμε έναν τετραγωνικό υποπίνακα του A $\kappa \times \kappa$ με ορίζουσα διαφορετική του μηδενός και κρατάμε μόνο αυτές τις εξισώσεις[16].

6. 4. Οι άγνωστοι που εμπλέκονται στον τετραγωνικό υποπίνακα παραμένουν στο πρώτο μέλος ενώ οι άλλοι πάνε στο δεύτερο μέλος.

6. 5. Λύνουμε το σύστημα με τη μέθοδο Cramer.

7. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Παράδειγμα 4.9.2. *Έστω ότι έχουμε το ομογενές γραμμικό σύστημα:*

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 6z + 7\omega &= 0 \\ x + 2y + 9z + 8\omega &= 0 \\ 3x + 5y + 15z + 15\omega &= 0 \\ 6x + 10y + 30z + 30\omega &= 0 \end{aligned}$$

7. 1. Βρίσκουμε ότι ο πίνακας του συστήματος είναι ο

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 5 & 15 & 15 \\ 6 & 10 & 30 & 30 \end{pmatrix}$$

7. 2. Με τους τρόπους που γνωρίζουμε βρίσκουμε ότι η τάξη του πίνακα είναι 2.

7. 3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα μαθήματα υπάρχει υποπίνακας 2×2 με ορίζουσα διαφορετική του μηδενός ενώ όλοι οι υποπίνακες[17] 3×3 έχουν ορίζουσα μηδέν, όπως και ο A.

7. 4. Επιλέγουμε ένα υποπίνακα 2×2 με ορίζουσα διαφορετική του μηδενός. Ας επιλέξουμε τον υποπίνακα πάνω αριστερά, οπότε έχουμε μόνο τις δύο εξισώσεις:
$2x + 3y + 6z + 7\omega = 0$
$x + 2y + 9z + 8\omega = 0$

7. 5. Το παραπάνω σύστημα γίνεται:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= -6z - 7\omega \\ x + 2y &= -9z - 8\omega \end{aligned}$$

7. 6. Θεωρούμε εδώ ως αγνώστους τα x, y και ως σταθερούς όρους τα $-6z - 7\omega$ και $-9z - 8\omega$. Λύνουμε το συτημα με τη μέθοδο Cramer και βρίσκουμε $x = -15z + 10\omega$ και $y = -12z - 9\omega$

7. 7. Διατυπώνουμε το αποτέλεσμά μας ως εξής:
Το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι το:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \{(x, y, z, \omega) \in \mathbb{R}^4 \mid x = -15z + 10\omega, y = -12z - 9\omega\} = \\ &= (-15z + 10\omega, -12z - 9\omega, z, \omega) = \\ &= (-15z, -12z, z, 0) + (10\omega, -9\omega, 0, \omega) = \\ &= z(-15, -12, 1, 0) + \omega(10, -9, 0, 1) \end{aligned}$$

7. 8. Παρατηρούμε άμεσα ότι το σύνολο λύσεων είναι ένας υπόχωρος που παράγεται από δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^4$, τα $(-15, -12, 1, 0)$ και $(10, -9, 0, 1)$.

7. 9. Βρίσκουμε με έλεγχο ότι τα διανύσματα του $\mathbb{R}^4$ τα $(-15, -12, 1, 0)$ και $(10, -9, 0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τελικά συμπεραίνουμε ότι το σύνολο λύσεων Λ του συστήματος είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ διάστασης 2.

[16] οι άλλες δεν χρειάζονται γιατί είναι εξαρτημένες

[17] Βρείτε τον αριθμό των υποπινάκων 3×3 και 2×2.

Άσκηση

Να βρεθεί το σύνολο λύσεων του συστήματος:

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 6z - 7\omega + 2\xi &= 0 \\ x + 2y - 9z - 8\omega + 7\xi &= 0 \end{aligned}$$

4.10 Η θεμελιώδης αντιστοιχία

1. Όπως έχουμε πει παραπάνω το σύνολο λύσεων **κάθε ομογενούς γραμμικού συστήματος** είναι ένας υπόχωρος. Πιο συγκεκριμένα, αν το σύνολο συντελεστών είναι το $\mathbb{F}$ και ο αριθμός των αγνώστων είναι ν, τότε το σύνολο λύσεων είναι ένας υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{F}^{\nu}$.

2. Αν $\mathbf{O\Gamma}$ είναι το σύνολο των ομογενών γραμμικών συστημάτων με ν αγνώστους και συντελεστές από το $\mathbb{F}$, και $\mathcal{Y}$ το σύνολο των υπόχωρων του $\mathbb{F}^{\nu}$ ορίζεται η απεικόνιση:

$$\mathcal{L} : \mathbf{O\Gamma} \longrightarrow \mathcal{Y}$$

   όπου σε κάθε ομογενές γραμμικό σύστημα αντιστοιχίζεται ο υπόχωρος των λύσεων μέσω της $\mathcal{L}$.

3. Αν $\mathbf{O\Sigma}$ ένα ομογενές σύστημα με ν μεταβλητές και συντελεστές από το $\mathbb{F}$, ένα στοιχείο του συνόλου $\mathbf{O\Gamma}$ δηλαδή, τότε το $\mathcal{L}\ (\mathbf{O\Sigma})$ είναι ο υπόχωρος των λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος $\mathbf{O\Sigma}$.

4. Ψάχνουμε τώρα να βρούμε αν υπάρχει η αντίστροφη της $\mathcal{L}$.

5. Έστω τώρα A ένας υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\nu}$. Θέλουμε να βρούμε κάποιο ομογενές γραμμικό σύστημα, του οποίου το σύνολο λύσεων είναι ο A.

6. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{F}_1[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$ των γραμμικών πολυωνύμων το πολύ βαθμού ένα με ν μεταβλητές της μορφής $f_{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_\nu)} = \alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_\nu \cdot x_\nu + c, \alpha_i \in \mathbb{F}$. Το σύνολο αυτό[18] είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης $\nu + 1$.

7. Επιλέγουμε[19] μία βάση $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu\}$ του A και θεωρούμε το σύνολο

$$\Upsilon(A) = \{f \in \mathbb{F}_1[x_1, x_2, \cdots, x_\nu] \mid f(\beta_i) = 0, f(0,0,\cdots,0) = 0, i = 1,2,\cdots,\mu\}$$

8. Το σύνολο $\Upsilon(A)$ είναι, όπως εύκολα διαπιστώνουμε ένας υπόχωρος του διανυσματικού χώρου $\mathbb{F}_1[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$.

9. Τα στοιχεία του $\Upsilon(A)$ είναι πολυώνυμα πρώτου βαθμού, στοιχεία του $\mathbb{F}_1[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$ της μορφής: $\alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_\nu \cdot x_\nu$.

10. Σύμφωνα με το παραπάνω σημείο, μία βάση του $\Upsilon(A)$ θα αποτελείται από το πολύ ν πολυώνυμα πρώτου βαθμού, στοιχεία του $\mathbb{F}_1[x_1, x_2, \cdots, x_\nu]$ της μορφής: $\alpha_1 \cdot x_1 + \cdots + \alpha_\nu \cdot x_\nu$. Τα πολυώνυμα αυτά σχηματίζουν ένα ομογενές σύστημα $O\Sigma$ για το οποίο ψάχναμε.

Άσκηση

Δίνεται ο υπόχωρος $A =< (1,2,3), (4,5,6) >$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$ Να βρεθεί γραμμικό σύστημα με 5 εξισώσεις του οποίου το σύνολο λύσεων να είναι ο υπόχωρος αυτός.

[18] Το c είναι μία σταθερά. Στο μάθημα αυτό στην πραγματικότητα μας ενδιαφέρει ο υπόχωρος που λαμβάνεται αν $c = 0$.

[19] Κάθε στοιχείο του A, ταυτίζεται με το διάνυσμα των συντεταγμένων του

4.11 Υπόχωροι και γραμμικά συστήματα

1. Ας δούμε ένα παράδειγμα. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ και τον υπόχωρο $A =< (2,3) >$ αυτού διάστασης 1. Θέλουμε να βρούμε το αντίστοιχο σύστημα $\mathbf{O}\Sigma$ με τη βοήθεια της αντίστροφης της $\mathcal{L}$.

2. Υποψήφιες εξισώσεις για να ανήκουν στο σύστημα είναι της μορφής $\alpha x + \beta y$, διότι έχουμε δύο συντεταγμένες.

3. Το γραμμικό ομογενές σύστημα, που ψάχνουμε είναι το

$$\{\mathbf{O}\Sigma : \ \alpha \cdot x + \beta \cdot y = 0 \mid 2\alpha + 3\beta = 0 \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

4. Αυτό που βρήκαμε είναι ότι το ομογενές σύστημα έχει όλες τις εξισώσεις της μορφής $\alpha \cdot x + \beta \cdot y = 0$ με $2\alpha + 3\beta = 0$. Το σύνολο αυτών των εξισώσεων, όπως έχουμε πει είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}_1[x, y]$.

5. Στον παραπάνω υπόχωρο των εξισώσεων υπάρχουν άπειρες εξισώσεις. Όμως επειδή αυτός ο υπόχωρος έχει πεπερασμένη διάσταση αρκεί να βρούμε μία βάση του. Τη βάση αυτή βρίσκουμε ως εξής:

6. Έχουμε $2\alpha + 3\beta = 0$ άρα $\beta = -\frac{2}{3}\alpha$ και έτσι μία εξίσωση του συστήματος είναι της μορφής $\alpha \cdot x + (-\frac{2}{3}\alpha) \cdot y = 0$ ή $3\alpha x - 2\alpha y = 0$.

7. Παρατηρούμε οτι κάθε εξίσωση του συστήματος είναι πολλαπλάσιο της $3 \cdot x - 2y = 0$ και έτσι θα μπορούσαμε ως σύστημα να έχουμε μόνο αυτή την εξίσωση. Στην πραγματικότητα έχουμε μία βάση του $\Upsilon(A)$.

8. Αυτό που γίνεται σχεδόν πάντα, όταν ψάχνουμε για τον υπόχωρο $\Upsilon(A)$ είναι να δίνουμε τελικά μία βάση του υπόχωρου αυτού και αυτό είναι το ζητούμενο γραμμικό ομογενές σύστημα.

9. Οι γραμμοπράξεις αλλάζουν τη βάση του υπόχωρου $\Upsilon(A)$, αλλά δεν αλλάζουν τον $\Upsilon(A)$. Με γραμμοπράξεις φροντίζουμε να φέρουμε τον $\Upsilon(A)$, δηλαδή τη βάση του σε μία «καλή» μορφή για να είναι εύκολη η επίλυσή του. Μία από αυτές τις καλές μορφές είναι η **ανηγμένη** μορφή για την οποία θα μιλήσουμε σε άλλα μαθήματα.

Ασκήσεις

1. Για τον υπόχωρο $A =< (1,2,3) >$ του $\mathbb{R}^3$ να βρείτε το $\Upsilon(A)$.

2. Δίνεται ο υπόχωρος $B =< (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) >$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$. Να βρεθεί ο $\Upsilon(B)$.

3. Δίνεται ο υπόχωρος $\Gamma =< (1,2,3), (0,4,5), (0,0,6) >$ του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3$. Να βρεθεί ο $\Upsilon(\Gamma)$.

4. Γράψτε ότι σκέψεις και παρατηρήσεις κάνετε σχετικά με τα παραπάνω.

4.12 Ομογενή & μη ομογενή γραμμικά συστήματα

1. Θεωρούμε ένα ομογενές γραμμικό σύστημα $\mathbf{O\Sigma}$ και τον πίνακα του συστήματος.
2. Μελετήστε προσεκτικά την παράγραφο 1.3.
3. Μελετήστε ξανά τη μέθοδο για να κάνουμε ένα τυχαίο πίνακα ανηγμένο κλιμακωτό.
4. Κάνουμε γραμμοπράξεις στον πίνακα του συστήματος $\mathbf{O\Sigma}$ και τον κάνουμε ανηγμένο κλιμακωτό.
5. Ο ανηγμένος κλιμακωτός αυτός πίνακας μας δίνει ένα φαινομενικά διαφορετικό ομογενές γραμμικό σύστημα, που έχει όμως ως σύνολο λύσεων τον ίδιο υπόχωρο A.
6. Οι εξισώσεις του αρχικού ομογενούς γραμμικού συστήματος παράγουν τον υπόχωρο $\Upsilon(A)$.
7. Οι εξισώσεις που βρίσκουμε από τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα παράγουν επίσης τον υπόχωρο $\Upsilon(A)$.

Άσκηση

Δίνεται το ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

1. Να βρεθεί ο πίνακας A του συστήματος και η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του.
2. Να βρεθεί το σύνολο λύσεων A του συστήματος, να αποδειχθεί ότι είναι υπόχωρος και να βρεθεί μία βάση του.
3. Να βρεθεί ο υπόχωρος $\Upsilon(A)$ των γραμμικών εξισώσεων αντίστοιχος του A.

Μη-ομογενή γραμμικά συστήματα

Αρχίζουμε τη μελέτη των μη-ομογενών γραμμικών συστημάτων

1. Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα

$$\begin{array}{l} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu} \cdot x_\nu = \beta_1 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu} \cdot x_\nu = \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1} \cdot x_1 + \alpha_{\mu 2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu} \cdot x_\nu = \beta_\mu \end{array} \qquad (\Sigma)$$

   Το σύστημα αυτό είναι γραμμικό με μ εξισώσεις και ν μεταβλητές. Αν όλα τα $\beta_i, i = 1, 2, \cdots, \mu$ είναι μηδέν, τότε το σύστημα είναι ομογενές και αντιμετωπίζεται σύμφωνα με τα προηγούμενα μαθήματα. Αν κάποιο από τα $\beta_i, i = 1, 2, \cdots, \mu$ είναι διαφορετικό του μηδενός, τότε το σύστημα είναι **μη-ομογενές**.

2. Σύμφωνα με το θεώρημα 3.10.1 αν A ο πίνακας του συστήματος και Γ ο επαυξημένος πίνακας, το σύστημα έχει (τουλάχιστον μία) λύση εάν και μόνο εάν η τάξη του A είναι ίση με την τάξη του Γ.

3. Για κάθε σύστημα όπως παραπάνω έχουμε και το αντίστοιχο ομογενές:

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}\cdot x_1+\alpha_{12}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{1\nu}\cdot x_\nu=0 \\ \alpha_{21}\cdot x_1+\alpha_{22}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{2\nu}\cdot x_\nu=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1}\cdot x_1+\alpha_{\mu 2}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{\mu\nu}\cdot x_\nu=0 \end{array} \qquad (\mathbf{O}\Sigma)$$

4. Το $(O\Sigma)$ προκύπτει από το (Σ) εάν θέσουμε κάθε $\beta_i, i=1,2,\cdots,\mu$ ίσο με μηδέν.

5. Σύμφωνα με τα προηγούμενα το σύνολο λύσεων του $(O\Sigma)$ είναι ένας υπόχωρος A[20] και έχουμε δει τρόπους να βρούμε μία βάση του υπόχωρου αυτού.

6. Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη το παρακάτω θεώρημα:

   Θεώρημα 4.12.1. *Έστω $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_\nu)$ και $(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_\nu)$ δύο λύσεις του συστήματος (Σ). Τότε η διαφορά $(\xi_1-\pi_1,\xi_2-\pi_2,\cdots,\xi_\nu-\pi_\nu)$ είναι λύση του ομογενούς συστήματος $(O\Sigma)$.*

   Η απόδειξη του θεωρήματος γίνεται με απλή επιβεβαίωση.

7. Το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι το σύνολο λύσεων του (Σ) είναι το εξής:

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_\nu)+A=\{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_\nu)+(a_1,a_2,\cdots,a_\nu)\mid(a_1,a_2,\cdots,a_\nu)\in A\}$$

   όπου $(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_\nu)$ μία οποιαδήποτε λύση του αρχικού συστήματος (Σ) και $(a_1,a_2,\cdots,a_\nu)$ μία λύση του αντίστοιχου ομογενούς $(O\Sigma)$.

8. Αν το γραμμικό σύστημα δεν είναι ομογενές, τότε το σύνολο λύσεων δεν είναι βέβαια ένας υπόχωρος, αλλά ένα σύνολο που γεωμετρικά λαμβάνεται αν « μετακινήσουμε» έναν υπόχωρο *κατά μήκος* ή *παράλληλα*, όπως λέμε, προς ένα διάνυσμα (μιας λύσης του (Σ)).

Άσκηση

Δίνεται το γραμμικό σύστημα (Σ):

$$\begin{array}{rcl} x+2y+3z &=& 6 \\ 4x+5y+6z &=& 15 \\ 7x+8y+9z &=& 24 \end{array}$$

1. Να βρεθεί ο πίνακας A του συστήματος και ο επαυξημένος πίνακας Γ.
2. Να εξετασθεί εάν το (Σ) έχει λύσεις.
3. Να βρεθεί το σύνολο λύσεων του (Σ).
4. Να σχολιασθεί η φύση του συνόλου λύσεων του (Σ).

[20] Για λόγους συμβολισμού συμβολίζουμε με το ίδιο γράμμα A και τον πίνακα του συστήματος και το σύνολο λύσεων του ομογενούς συστήματος αν και δεν είναι απαραίτητο.

4.13 Σύμπλοκα υπόχωρων

1. Δίνουμε τον παρακάτω ορισμό:

   Ορισμός 4.13.1. *Έστω A ένας υπόχωρος του διανυσματικού χώρου V και $x \in V$. Το σύνολο*

   $$\{x + \alpha, \alpha \in A\}$$

   θα το λέμε **σύμπλοκο**[21] **του υπόχωρου A με αντιπρόσωπο το** x *ή επίσης* **πλευρική κλάση του υπόχωρου A με αντιπρόσωπο** x *και θα το συμολίζουμε με $x + A$.*

2. Σύμφωνα με τα προηγούμενα μαθήματα:
   το σύνολο λύσεων ενός γραμμικού συστήματος (αν έχει το σύστημα λύσεις) είναι σύμπλοκο του υπόχωρου των λύσεων του αντιστοίχου ομογενούς συστήματος με αντιπρόσωπο μία λύση του συστήματος.

3. Ισχύει και το αντίστροφο: Αν $x + A$ ένα οποιοδήποτε σύμπλοκο τότε υπάρχει κάποιο γραμμικό σύστημα του οποίου το σύνολο λύσεων είναι το σύμπλοκο αυτό.

4. Αν $x \in A$, τότε εύκολα αποδεικνύεται[22] ότι $x + A = A$.

5. Κάθε σύμπλοκο $x + A$ είναι ένας «μετατοπισμένος» υπόχωρος μέσα στον διανυσματικό χώρο V κατά μήκος του x.

6. Ισχύει το παρακάτω[23] :
   $$x + A = y + A \Longleftrightarrow x - y \in A$$
   Αυτό μας λέει ότι δύο σύμπλοκα $x + A$ και $y + A$ είναι ίσα εάν και μόνο εάν η διαφορά $x - y$ των αντιπροσώπων τους ανήκει στον υπόχωρο

7. Έστω $x + A$ και $y + A$ δύο σύμπλοκα. Τότε

   7. 1. Είτε[24] $x + A = y + A$, οπότε σύμφωνα με το παραπάνω $x - y \in A$

   7. 2. Είτε $(x + A) \cap (y + A) = \emptyset$

8. Το παραπάνω σημείο μας λέει ότι αν φαντασθούμε ένα σύμπλοκο ως γεωμετρικό αντικείμενο μέσα στον διανυσματικό χώρο, τότε δύο σύμπλοκα είτε θα συμπίπτουν είτε θα έχουν τομή το κενό σύνολο (θα είναι δηλαδή παράλληλα).

4.13.1 Ο χώρος-πηλίκο

1. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και A ένας υπόχωρος αυτού. Στο σύνολο των συμπλόκων του A εισάγουμε τις πράξεις[25]:

   $$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A, \quad x, y \in V$$

   και

   $$\lambda \cdot (x + A) = \lambda \cdot x + A, \quad \lambda \in \mathbb{F}$$

[21] Στα αγγλικά ο όρος είναι coset.
[22] Προσπαθήστε να το αποδείξετε.
[23] Προσπαθήστε να το αποδείξετε.
[24] Προσπαθήστε να το αποδείξετε.
[25] Πρέπει να αποδείξετε ότι οι πράξεις είναι καλά ορισμένες.

2. Με τις παραπάνω πράξεις το σύνολο των συμπλόκων του υπόχωρου A, γίνεται ένας διανυσματικός χώρος, συμβολίζεται με V/A και ονομάζεται **χώρος-πηλίκο**.

3. Αξίζει να σημειωθεί ότι το μηδενικό στοιχείο του χώρου αυτού είναι το $0 + A = A$, δηλαδή κατά κάποιο τρόπο ο χώρος-πηλίκο V/A λαμβάνεται από τον αρχικό χώρο αν συρρικνώσουμε τον υπόχωρο A σε σημείο[26].

4. Εύκολα αποδεικνύουμε ότι η απεικόνιση:
$$V \longrightarrow V/A, \ \ x \longmapsto x + A$$
είναι γραμμική απεικόνιση με $Ker = A$ και $Im = V/A$ και από γνωστό θεώρημα των προηγουμένων μαθημάτων έχουμε ότι
$$dim(V/A) = dimV - dimA$$

Ασκήσεις

1. Αποδείξτε λεπτομερώς τα σημεία 3 και 4 της παραγράφου 4.13.

2. Δίνεται ο υπόχωρος $A = \{(x, y, z) \mid x + 2y + 3z = 0\}$ του $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Να βρεθεί μία βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}^3/A$.

[26] Αφήστε λίγο τη φαντασία σας ελεύθερη.

4.14 Ο χώρος-πηλίκο - μέρος ΙΙ

1. Όπως είδαμε στο προηγούμενο μάθημα αν A ένας υπόχωρος ενός διανυσματικού χώρου V τότε το σύνολο των συμπλόκων του μπορεί να λάβει τη δομή ενός διανυσματικού χώρου.

2. Οι πράξεις ορίζονται ως εξής:

$$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A, \;\; x, y \in V$$

και

$$\lambda \cdot (x + A) = \lambda \cdot x + A, \;\; \lambda \in \mathbb{F}$$

3. Οι παραπάνω πράξεις πρέπει να αποδειχθεί[27] ότι είναι καλά ορισμένες.

   Καλά ορισμένες πράξεις σημαίνει ότι το αποτέλεσμα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού δεν εξαρτάται από τον αντιπρόσωπο αλλά από το ίδιο το σύμπλοκο. Πιο αυστηρά έχουμε το εξής:

   3. 1. Αν $x_1 + A = x_2 + A$ και $y_1 + A = y_2 + A$ τότε $(x_1 + A) + (y_1 + A) = (x_2 + A) + (y_2 + A)$

   3. 2. Αν $x_1 + A = x_2 + A$ και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε $\lambda \cdot (x_1 + A) = \lambda \cdot (x_2 + A)$

4. **Διάσταση του χώρου-πηλίκο** V/A

   4. 1. Βρίσκουμε μία βάση $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa\}$ του υπόχωρου A.

   4. 2. Η παραπάνω βάση μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\lambda\}$ του χώρου

   4. 3. **Ισχυρισμός:** Μία βάση του V/A είναι η $\{\beta_1 + A, \beta_2 + A, \cdots, \beta_\lambda + A\}$.

      Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αρκεί να αποδείξουμε ότι τα παραπάνω διανύσματα του V/A είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον χώρο.

      4. 3. 1. Έστω $\xi_1 \cdot (\beta_1 + A) + \xi_2 \cdot (\beta_2 + A) + \cdots \xi_\lambda \cdot (\beta_\lambda + A) = A$.
      Από[28] τις ιδιότητες των πράξεων συμπλόκων έχουμε

$$(\xi_1 \cdot \beta_1 + \xi_2 \cdot \beta_2 + \cdots \xi_\lambda \cdot \beta_\lambda) + A = A$$

      Από τις ιδιότητες των συμπλόκων έχουμε ότι

$$(\xi_1 \cdot \beta_1 + \xi_2 \cdot \beta_2 + \cdots \xi_\lambda \cdot \beta_\lambda) \in A$$

      Βρήκαμε ότι το στοιχείο $\xi_1 \cdot \beta_1 + \xi_2 \cdot \beta_2 + \cdots \xi_\lambda \cdot \beta_\lambda)$ είναι ένα στοιχείο του υπόχωρου A. Επειδή το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa\}$ είναι μία βάση του υπόχωρου A, θα έχουμε ότι υπάρχουν συντελεστές $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\kappa$ με

$$\xi_1 \cdot \beta_1 + \xi_2 \cdot \beta_2 + \cdots + \xi_\lambda \cdot \beta_\lambda = \mu_1 \cdot \alpha_1 + \cdots + \mu_\kappa \cdot \alpha_\kappa$$

      ή

$$\xi_1 \cdot \beta_1 + \xi_2 \cdot \beta_2 + \cdots + \xi_\lambda \cdot \beta_\lambda - \mu_1 \cdot \alpha_1 - \cdots - \mu_\kappa \cdot \alpha_\kappa = \mathbf{0}$$

      Τώρα γνωρίζουμε ότι το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\lambda\}$ είναι μία βάση του χώρου V, άρα όλοι οι συντελεστές είναι μηδέν. Εμείς για να αποδείξουμε αυτό που θέλουμε μας αρκεί ότι οι συντελεστές $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\lambda$ είναι όλοι μηδέν.

[27] Σας προτρέπω να κάνετε λεπτομερείς αποδείξεις

[28] Μην ξεχνάμε ότι το μηδενικό στοιχείο του χώρου V/A είναι το A.

4. 3. 2. Έστω $x + A$ ένα οποιοδήποτε στοιχείο του V/A. Το x είναι ένα στοιχείο του χώρου V. Επειδή το σύνολο

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\lambda\}$$

είναι μία βάση του V θα έχουμε

$$x = \sigma_1 \cdot \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \alpha_2 + \cdots + \sigma_\kappa \cdot \alpha_\kappa + \rho_1 \cdot \beta_1 + \rho_2 \cdot \beta_2 + \cdots + \rho_\lambda \cdot \beta_\lambda$$

άρα

$$x + A = (\sigma_1 \cdot \alpha_1 + \sigma_2 \cdot \alpha_2 + \cdots + \sigma_\kappa \cdot \alpha_\kappa + \rho_1 \cdot \beta_1 + \rho_2 \cdot \beta_2 + \cdots + \rho_\lambda \cdot \beta_\lambda) + A$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} x + A &= (\sigma_1 \cdot \alpha_1 + A) + (\sigma_2 \cdot \alpha_2 + A) + \cdots + (\sigma_\kappa \cdot \alpha_\kappa + A) + \\ &\quad +(\rho_1 \cdot \beta_1 + A) + (\rho_2 \cdot \beta_2 + A) + \cdots + (\rho_\lambda \cdot \beta_\lambda + A) \end{aligned}$$

Όμως το σύνολο $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa\}$ είναι μία βάση του Α, άρα $\alpha_i + A = A, i = 1, 2, \cdots, \kappa$ είναι δηλαδή το μηδενικό στοιχείο του χώρου. Τελικά έχουμε:

$$x + A = (\rho_1 \cdot \beta_1 + A) + (\rho_2 \cdot \beta_2 + A) + \cdots + (\rho_\lambda \cdot \beta_\lambda + A) = \rho_1 \cdot (\beta_1 + A) + \cdots + \rho_\lambda \cdot (\beta_\lambda + A)$$

Το τελευταίο δείχνει ότι ο χώρος V/A παράγεται από το σύνολο

$$(\rho_1 \cdot \beta_1 + A) + (\rho_2 \cdot \beta_2 + A) + \cdots + (\rho_\lambda \cdot \beta_\lambda + A)$$

4. 4. Από τα παραπάνω βρίσκουμε ότι $dim(V/A) = dimV - dimA$

5. Έστω[29] $f : V_1 \longrightarrow V_2$, τότε ορίζεται ο χώρος -πηλίκο $V_1/Kerf$. Επι πλέον η απεικόνιση

$$f^* : V_1/Kerf \longrightarrow Imf, \;\; \mu\epsilon \;\; f^*(x + Kerf) = f(x)$$

είναι γραμμική $1-1$ και επί, δηλαδή ισομορφισμός διανυσματικών χώρων. Όπως όμως γνωρίζουμε, δύο διανυσματικοί χώροι είναι ισόμορφοι εάν και μόνο εάν έχουν την ίδια διάσταση. Τελικά

$$dim(V_1/Kerf) = dim(V_1) - dim(Kerf) = dim(Imf)$$

Ξαναβρίσκουμε έτσι το γνωστό θεώρημα που είχαμε συναντήσει στο 3.8.2.

6. Ρίξτε μια ματιά και εδώ για ευρύτερη μελέτη.

Ασκήσεις

1. Έστω A και B δύο διακεκριμένοι (δηλαδή $A \cap B = \emptyset$) διανυσματικοί χώροι με συντελεστές από το $\mathbb{F}$. Κατασκευάζουμε ένα νέο διανυσματικό χώρο Γ ως εξής $\Gamma = \{(\alpha, \beta), \alpha \in A, \beta \in B\}$ Εφοδιάζουμε το παραπάνω σύνολο Γ με τις πράξεις:

   (α) $(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$

   (β) $\lambda \cdot (\alpha, \beta) = (\lambda \cdot \alpha, \lambda \cdot \beta)$

   Δείξτε ότι το αποτέλεσμα είναι ένας νέος διανυσματικός χώρος[30].

2. Δείξτε ότι οι απεικονίσεις $A \longrightarrow A \oplus B, \;\; \mu\epsilon \;\; \alpha \mapsto (\alpha, 0_B)$ και $B \longrightarrow A \oplus B, \;\; \mu\epsilon \;\; \beta \mapsto (0_A, \beta)$ είναι γραμμικές και $1-1$[31].

3. Να γράψετε τον ορισμό του ανηγμένου κλιμακωτού πίνακα και να δώσετε δύο παραδείγματα.

[29] Το Θεώρημα αυτό ονομάζεται *Πρώτο θεώρημα ισομορφισμών Διανυσματικών χώρων*. Το Θεώρημα αυτό με τις κατάλληλες τροποποιήσεις συναντάται και σε άλλες δομές, όπως Δακτυλίους και Ομάδες

[30] Ο νέος αυτός Διανυσματικός χώρος λέγεται **εξωτερικό ευθύ άθροισμα των** A **και** B και συμβολίζεται $A \oplus B$.

[31] Αυτό μας επιτρέπει να ταυτίζουμε τον υπόχωρο $\{(\alpha, 0), \alpha \in A\}$ με τον Α.