ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Γραμμικές απεικονίσεις

Ευάγγελος Ράπτης

Τμήμα Μαθηματικών

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Περιεχόμενα ενότητας

3.1 Γραμμικές απεικονίσεις

Αρχίζουμε σήμερα τη μελέτη συναρτήσεων μεταξύ διανυσματικών χώρων. Οι συναρτήσεις που μας ενδιαφέρουν περισσότερο είναι αυτές που «**σέβονται**» τη δομή του διανυσματικού χώρου και τις ονομάζουμε γραμμικές απεικονίσεις.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω V_1 και V_2 δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$. Μία απεικόνιση[1] $f : V_1 \longrightarrow V_2$, θα λέγεται **γραμμική απεικόνιση**[2], εάν*

1. $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta)\ \ \forall \alpha, \beta \in V_1$
2. $f(\lambda \cdot \alpha) = \lambda \cdot f(\alpha)\ \ \forall \lambda \in \mathbb{F}, \alpha \in V_1$

1. Δύο διανυσματικοί χώροι V_1 και V_2 λέγονται **ισόμορφοι** εάν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : V_1 \longrightarrow V_2$ η οποία είναι $1-1$ και επί. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε $V_1 \cong V_2$ και λέμε ότι η γραμμική απεικόνιση f είναι **ισομορφισμός**.
2. Δείτε τα παραδείγματα 4.1.3 σελ 141 από το Βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα, Τόμος Α».
3. Μελετήστε τις προτάσεις 4.1.4 και 4.1.5 σελ 143 από το Βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα, Τόμος Α».
4. Ισχύει η εξής ιδιότητα:

   Πρόταση 3.1.2. *Έστω $f : V_1 \longrightarrow V_2$ μία γραμμική απεικόνιση. Τότε*

   $$f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$$

   Απόδειξη: *Έχουμε $f(0_{V_1} + 0_{V_1}) = f(0_{V_1}) + f(0_{V_1})$ από την πρώτη ιδιότητα των γραμμικών απεικονίσεων. Ας ονομάσουμε το $f(0_{V_1})$ με ω. Τότε έχουμε τη σχέση $\omega + \omega = \omega$, άρα $\omega = 0$.*
   Η πρόταση μας λέει ότι οποιαδήποτε γραμμική απεικόνιση $f : V_1 \longrightarrow V_2$ απεικονίζει πάντα το μηδενικό στοιχείο του πρώτου χώρου στο μηδενικό στοιχείο του δευτέρου χώρου.

5. Ισχύει ακόμα η εξής ιδιότητα:

   Πρόταση 3.1.3. *Έστω $f : V_1 \longrightarrow V_2$ μία γραμμική απεικόνιση. Τότε*

   $$f(-x) = -f(x)$$

   Απόδειξη: *Έχουμε $0_{V_2} = f(0_{V_1}) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$.*

[1] Η έννοια της απεικόνισης είναι ταυτόσημη με την έννοια της συνάρτησης.

[2] λέγεται επίσης και γραμμικός μετασχηματισμός

3.2 Πυρήνας και Εικόνα μίας γραμμικής απεικόνισης

1. Δίνουμε τον ορισμό του πυρήνα μίας γραμμικής απεικόνισης:

   Ορισμός 3.2.1. *Έστω $f : V_1 \longrightarrow V_2$ μία γραμμική απεικόνιση. Το σύνολο*

   $$Kerf = \{x \in V_1 \mid f(x) = \mathbf{0}_{V_2}\}$$

   *το ονομάζουμε **πυρήνα** της γραμμικής απεικόνισης.*

2. Ο πυρήνας μιας γραμμικής απεικόνισης είναι πάντα υπόχωρος.
   Απόδειξη: Έχουμε από την πρόταση 3.1.2 ότι $f(0_{V_1}) = 0_{V_2}$, άρα $0_{V_1} \in Kerf$. Αν $x, y \in Kerf$, τότε $f(x) = f(y) = 0_{V_2}$. Άρα $f(x+y) = f(x) + f(y) = 0_{V_2}$ και τελικά $x + y \in Kerf$. Ομοίως αποδεικνύεται και η τρίτη απαίτηση και έτσι ο πυρήνας είναι ένας υπόχωρος του χώρου V_1.

3. Δίνουμε τον ορισμό της εικόνας μίας γραμμικής απεικόνισης:

   Ορισμός 3.2.2. *Έστω $f : V_1 \longrightarrow V_2$ μία γραμμική απεικόνιση. Το σύνολο*

   $$Imf = \{\omega \in V_2 \mid \exists \ x \ \in V_1 : f(x) = \omega\}$$

   *το ονομάζουμε **εικόνα** της γραμμικής απεικόνισης.*

4. Το σύνολο Imf είναι ένας υπόχωρος του V_2. Η απόδειξη είναι όμοια με την παραπάνω.

5. Να διαβάσετε το παράδειγμα 4.2.4 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α».

6. Μελετήστε για τις γραμμικές απεικονίσεις στη δικτυακή διεύθυνση εδώ.

Ασκήσεις

1. Δίνεται η Γραμμική απεικόνιση $\theta_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με

   $$\theta_1(x, y, z) = (x + y + z, x, 2x)$$

   Να βρεθεί μία βάση του πυρήνα και της εικόνας της γραμμικής απεικόνισης θ_1.

2. Να βρεθούν όλες οι γραμμικές απεικονίσεις $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ που έχουν τον ίδιο πυρήνα και την ίδια εικόνα με την θ_1.

3.3 Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

1. Δίνουμε τον ορισμό του πίνακα μίας γραμμικής απεικόνισης:

   Ορισμός 3.3.1. *(α) Έστω $f : V_1 \longrightarrow V_2$ μία γραμμική απεικόνιση.*

   (β) Δεχόμαστε ότι οι διανυσματικοί χώροι V_1 και V_2 επί του $\mathbb{F}$ είναι πεπεραμένης διάστασης μ και ν αντίστοιχα.

   (γ) Υποθέτουμε ότι $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mu)$ και $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu)$ είναι δύο διατεταγμένες[3] βάσεις των διανυσματικών χώρων V_1 και V_2 αντίστοιχα.

   (δ) Τα διανύσματα $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_\nu)$ είναι διανύσματα του χώρου V_2, άρα το καθένα θα είναι γραμμικός συνδυασμός των $(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu)$.

   (ε) Έχουμε
   $$\begin{aligned} & f(\alpha_1) = \lambda_{11}\cdot\beta_1 + \lambda_{12}\cdot\beta_2 + \cdots + \lambda_{1\nu}\cdot\beta_\nu \\ & f(\alpha_2) = \lambda_{21}\cdot\beta_1 + \lambda_{22}\cdot\beta_2 + \cdots + \lambda_{2\nu}\cdot\beta_\nu \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & f(\alpha_\mu) = \lambda_{\mu1}\cdot\beta_1 + \lambda_{\mu2}\cdot\beta_2 + \cdots + \lambda_{\mu\nu}\cdot\beta_\nu \end{aligned}$$

   (στ) Σχηματίζεται ένας πίνακας ως εξής[4]:
   $$A = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{21} & \cdots & \lambda_{\mu1} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{\mu2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{1\nu} & \lambda_{2\nu} & \cdots & \lambda_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

   *(ζ) Ο παραπάνω πίνακας A λέγεται **πίνακας της γραμμικής απεικόνισης** f ως προς τις διατεταγμένες βάσεις $\overline{\alpha}$ και $\overline{\beta}$ και συμβολίζεται με*
   $$(f : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$$

2. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας είναι $\nu \times \mu$, δηλαδή πίνακας ν γραμμών και μ στηλών, ενώ η γραμμική απεικόνιση είναι από ένα διανυσματικό χώρο διάστασης μ σε ένα διανυσματικό χώρο διάστασης ν.

3. Μελετήστε τα παραδείγματα 5.1.3 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α».

4. Αν ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης είναι ο μηδενικός πίνακας τι συμπεραίνετε για την γραμμική απεικόνιση;

5. Αν ο πίνακας μιας γραμμικής απεικόνισης είναι ο μοναδιαίος τι συμπεραίνετε για την γραμμική απεικόνιση;

Ασκήσεις

Άσκηση 3.3.2. *Δίνεται η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x,y,z) = (2x - y, x - y)$. Δείξτε ότι:*

1. *Η απεικόνιση f είναι γραμμική.*

2. *Να βρεθεί το σύνολο $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ με $f(x,y,z) = (0,0)\}$ και να αποδειχθεί ότι είναι υπόχωρος. Τι διάσταση έχει το K;*

[3]Με τον όρο διατεταγμένη βάση εννοούμε μία βάση, στην οποία έχουμε βάλει μία διάταξη, μία σειρά στα διανύσματά της.

[4]Προσέξτε ότι βάζουμε ως στήλες τις γραμμές που εμφανίζονται στη γραφή των $f(a_i)$.

3. *Να βρεθεί το σύνολο:*

$$Im(f) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ \epsilon\tau\sigma\iota \ \omega\sigma\tau\epsilon \ \upsilon\pi\alpha\rho\chi\epsilon\iota \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mu\epsilon \ f(x, y, z) = (\alpha, \beta)\}$$

Να αποδειχθεί ότι το σύνολο $Im(f)$ είναι υπόχωρος και να βρεθεί η διάστασή του.

4. *Έστω ότι ένας διανυσματικός χώρος έχει διάσταση 7. Δείξτε ότι ένα σύνολο 7 γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων είναι βάση.*

5. *Έστω ότι ένας διανυσματικός χώρος έχει διάσταση 7. Δείξτε ότι ένα σύνολο 7 διανυσμάτων του χώρου, τα οποία τον παράγουν, είναι βάση.*

3.4 Ισομορφισμοί διανυσματικών χώρων

1. Θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω V_1 και V_2 δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(α) $dim_{\mathbb{F}}V_1 = dim_{\mathbb{F}}V_2$

(β) *Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : V_1 \longrightarrow V_2$ 1-1 και επί.*

Απόδειξη:

Από το (α) στο (β) :
Έστω ότι οι δύο χώροι V_1 και V_2 έχουν ίσες διαστάσεις:

$$dim_{\mathbb{F}}V_1 = dim_{\mathbb{F}}V_2 = \nu.$$

Έστω επίσης $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ μία βάση του χώρου V_1 και $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu\}$ μία βάση του χώρου V_2. Κάθε στοιχείο $x \in V_1$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = \lambda_1 \cdot \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \alpha_2 + \cdots + \lambda_\nu \cdot \alpha_\nu$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \lambda_1 \cdot \beta_1 + \lambda_2 \cdot \beta_2 + \cdots + \lambda_\nu \cdot \beta_\nu$$

Η συνάρτηση αυτή είναι γραμμική $1-1$ και επί. Προσπαθήστε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς αυτούς.

Από το (β) στο (α) :
Έστω $f : V_1 \longrightarrow V_2$ $1-1$ και επί και $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ μία βάση του πρώτου χώρου. Θεωρούμε το σύνολο $\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_\nu)\}$. Το σύνολο αυτό είναι μία βάση του χώρου V_2. σΠροσπαθήστε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς αυτούς.

2. Μία γραμμική απεικόνιση $f : V_1 \longrightarrow V_2$ $1-1$ και επί συνήθως τη λέμε **ισομορφισμό διανυσματικών χώρων**, τους διανυσματικούς χώρους τους λέμε ισόμορφους και συμβολίζουμε με $V_1 \cong V_2$.

3. Έστω $f, g : V_1 \longrightarrow V_2$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Δεχόμαστε ότι οι διανυσματικοί χώροι V_1 και V_2 επί του $\mathbb{F}$ είναι πεπερασμένης διάστασης μ και ν αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mu)$ και $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu)$ είναι δύο διατεταγμένες βάσεις των διανυσματικών χώρων V_1 και V_2 αντίστοιχα. Τότε:

$$(f + g : \overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (f : \overline{\alpha}, \overline{\beta}) + (g : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$$

$$(f - g : \overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (f : \overline{\alpha}, \overline{\beta}) - (g : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$$

$$(\lambda \cdot f : \overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \lambda \cdot (f : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$$

Με λόγια αυτές οι σχέσεις σημαίνουν:

3. 1. Ο πίνακας του αθροίσματος δύο γραμμικών απεικονίσεων(που είναι επίσης γραμμική απεικόνιση) ισούται με το άθροισμα των πινάκων των επι μέρους γραμμικών απεικονίσεων.

3. 2. Ο πίνακας της διαφοράς δύο γραμμικών απεικονίσεων(που είναι επίσης γραμμική απεικόνιση) ισούται με τη διαφορά των πινάκων των επι μέρους γραμμικών απεικονίσεων.

3. 3. Ο πίνακας του γινομένου ενός αριθμού επί μία γραμμική απεικόνιση (που είναι επίσης γραμμική απεικόνιση) ισούται με το γινόμενο του αριθμού επί τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης.

4. Είχαμε παραπάνω δώσει τον ορισμό: Έστω $f : V_1 \longrightarrow V_2$ μία γραμμική απεικόνιση. Το σύνολο

$$Ker f = \{x \in V_1 \mid f(x) = \mathbf{0}_{V_2}\}$$

το ονομάζουμε **πυρήνα** της γραμμικής απεικόνισης. Σχετικά με τον πυρήνα ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3.4.2. *Η γραμμική απεικόνιση f είναι $1-1$ εάν και μόνο εάν*

$$Ker f = \{\mathbf{0}\}$$

Απόδειξη: *Έστω ότι $Ker f = \{\mathbf{0}\}$ και $f(x) = f(y)$. Τότε $f(x-y) = \mathbf{0}$ και άρα $x - y \in Ker f$. Αλλά ο πυρήνας έχει μόνο ένα στοιχείο το $\mathbf{0}$, άρα $x - y = \mathbf{0}$ άρα $x = y$ και η απεικόνιση είναι $1-1$.*

Αν τώρα η f είναι $1-1$ και $x \in Ker f$ τότε $f(x) = \mathbf{0}$. Αλλά επειδή η f είναι γραμμική απεικόνιση, έχουμε $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Άρα $x = \mathbf{0}$.

5. Επίσης έχουμε δώσει τον ορισμό: Έστω $f : V_1 \longrightarrow V_2$ μία γραμμική απεικόνιση. Το σύνολο

$$Im f = \{\omega \in V_2 \mid \exists \ x \ \in V_1 \mid f(x) = \omega\}$$

το ονομάζουμε **εικόνα** της γραμμικής απεικόνισης. Σχετικά με την εικόνα έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.4.3. *Η γραμμική απεικόνιση $f : V_1 \longrightarrow V_2$ είναι επί εάν και μόνο εάν $Im f = V_2$.*

Η ***απόδειξη*** *είναι άμεση από τους ορισμούς.*

6. Άμεσα αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 3.4.4. *Η γραμμική απεικόνιση $f : V_1 \longrightarrow V_2$ είναι ισομορφισμός εάν και μόνο εάν $Ker f = \mathbf{0}$ και $Im f = V_2$.*

Η ***απόδειξη*** *είναι άμεση από τους ορισμούς.*

7. Μελετήστε σε βάθος το θεώρημα 5.1.7 σελ 168 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α» και την απόδειξή του.

8. Ρίξτε μία ματιά στη διεύθυνση εδώ για περισσότερες πληροφορίες γύρω από τις γραμμικές απεικονίσεις.

9. Δείτε επίσης και εδώ.

3.5 Απλή μορφή πίνακα

Πως ο πίνακας μίας γραμμικής απεικόνισης λαμβάνει *απλή* μορφή

1. Έστω $f : V_1 \longrightarrow V_2$ μία γραμμική απεικόνιση και $Kerf, Imf$ ο πυρήνας και η εικόνα της. Γνωρίζουμε ότι ο πυρήνας $Kerf$ είναι υπόχωρος του χώρου V_1 και η εικονα Imf είναι υπόχωρος του δεύτερου χώρου V_2.

2. Διαλέγουμε μία βάση του πυρήνα έστω την $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa\}$. Η βάση αυτή αποτελείται από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου V_1 και επομένως σύμφωνα με το θεώρημα επέκτασης, μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\lambda\}$ έτσι ώστε το σύνολο
$$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa\}$$
να είναι βάση του V_1.

3. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{f(\beta_1), f(\beta_2), \cdots, f(\beta_\lambda)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Προς τούτο θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό
$$\xi_1 \cdot f(\beta_1) + \xi_2 \cdot f(\beta_2) + \cdots + \xi_\lambda \cdot f(\beta_\lambda) = 0_{V_2}$$
Επειδή η f είναι γραμμική, η τελευταία σχέση γίνεται:
$$f(\xi_1 \cdot \beta_1 + \xi_2 \cdot \beta_2 + \cdots + \xi_\lambda \cdot \beta_\lambda) = 0_{V_2}$$
άρα το στοιχείο $\xi_1 \cdot \beta_1 + \xi_2 \cdot \beta_2 + \cdots + \xi_\lambda \cdot \beta_\lambda$ ανήκει στον πυρήνα της f.

4. Θα υπάρχουν επομένως συντελεστές $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_\kappa$ έτσι ώστε
$\xi_1 \cdot \beta_1 + \xi_2 \cdot \beta_2 + \cdots + \xi_\lambda \cdot \beta_\lambda = \mu_1 \cdot \alpha_1 + \mu_2 \cdot \alpha_2 + \cdots + \mu_\kappa \cdot \alpha_\kappa$

5. Από την τελευταία σχέση έχουμε ότι
$\xi_1 \cdot \beta_1 + \xi_2 \cdot \beta_2 + \cdots + \xi_\lambda \cdot \beta_\lambda - \mu_1 \cdot \alpha_1 - \mu_2 \cdot \alpha_2 - \cdots - \mu_\kappa \cdot \alpha_\kappa = 0_{V_1}$
Όμως το σύνολο $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα **όλοι** οι συντελεστές είναι μηδέν και ιδιαίτερα θα έχουμε ότι $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_\lambda = 0$, άρα έχουμε το ζητούμενο, δηλαδή το σύνολο $\{f(\beta_1), f(\beta_2), \cdots, f(\beta_\lambda)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

6. Αφού το σύνολο $\{f(\beta_1), f(\beta_2), \cdots, f(\beta_\lambda)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, σύμφωνα ξανά με το θεώρημα επέκτασης υπάρχουν διανύσματα
$$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\nu$$
του χώρου έτσι ώστε το σύνολο
$$\{f(\beta_1), f(\beta_2), \cdots, f(\beta_\lambda), \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\nu\}$$
να είναι βάση του V_2.

7. Με όλη τη δουλειά πιο πάνω, κατασκευάσαμε μία βάση
$$\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa\}$$
του πρώτου χώρου V_1 και μία βάση
$$\{f(\beta_1), f(\beta_2), \cdots, f(\beta_\lambda), \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\nu\}$$
του δεύτερου χώρου V_2. Αν τις θεωρήσουμε διατεταγμένες, μπορούμε να υπολογίσουμε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης. Θεωρούμε λοιπόν τις διατεταγμένες βάσεις
$$\overline{\alpha} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\kappa)$$
και
$$\overline{\beta} = (f(\beta_1), f(\beta_2), \cdots, f(\beta_\lambda), \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\nu)$$

8. Υπολογισμός του πίνακα $(f : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$:
$f(\beta_1) = 1 \cdot f(\beta_1) + 0 \cdot f(\beta_2) + 0 \cdot f(\beta_3) + \cdots 0 \cdot f(\beta_\lambda) + 0 \cdot \gamma_1 + 0 \cdot \gamma_2 + \cdots + 0 \cdot \gamma_\nu$
$f(\beta_2) = 0 \cdot f(\beta_1) + 1 \cdot f(\beta_2) + 0 \cdot f(\beta_3) + \cdots 0 \cdot f(\beta_\lambda) + 0 \cdot \gamma_1 + 0 \cdot \gamma_2 + \cdots + 0 \cdot \gamma_\nu$
$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$
$f(\beta_\lambda) = 0 \cdot f(\beta_1) + 0 \cdot f(\beta_2) + 0 \cdot f(\beta_3) + \cdots 1 \cdot f(\beta_\lambda) + 0 \cdot \gamma_1 + 0 \cdot \gamma_2 + \cdots + 0 \cdot \gamma_\nu$
$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$
$f(\alpha_1) = 0 \cdot f(\beta_1) + 0 \cdot f(\beta_2) + 0 \cdot f(\beta_3) + \cdots 0 \cdot f(\beta_\lambda) + 0 \cdot \gamma_1 + 0 \cdot \gamma_2 + \cdots + 0 \cdot \gamma_\nu$
$f(\alpha_2) = 0 \cdot f(\beta_1) + 0 \cdot f(\beta_2) + 0 \cdot f(\beta_3) + \cdots 0 \cdot f(\beta_\lambda) + 0 \cdot \gamma_1 + 0 \cdot \gamma_2 + \cdots + 0 \cdot \gamma_\nu$
$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$
$f(\alpha_\kappa) = 0 \cdot f(\beta_1) + 0 \cdot f(\beta_2) + 0 \cdot f(\beta_3) + \cdots 0 \cdot f(\beta_\lambda) + 0 \cdot \gamma_1 + 0 \cdot \gamma_2 + \cdots + 0 \cdot \gamma_\nu$

9. Ο πίνακας $(f : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ παίρνει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.5.1. *Για κάθε γραμμική απεικόνιση $f : V_1 \longrightarrow V_2$ μεταξύ διανυσματικών χώρων πεπερασμένης διάστασης, υπάρχουν βάσεις $\overline{\alpha}$ του πρώτου χώρου και $\overline{\beta}$ του δεύτερου χώρου έτσι ώστε ο πίνακας $(f : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$, ως προς τις βάσεις αυτές να λαμβάνει την μορφή*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Παρατηρούμε ότι:

Παρατήρηση 3.5.2. *Η παραπάνω μορφή του πίνακα είναι η απλούστερη δυνατή μορφή.*

12. Παρατηρούμε επίσης ότι:

Παρατήρηση 3.5.3. *Ο αριθμός των μονάδων που εμφανίζονται στον πίνακα είναι ίσος με τη διάσταση του υπόχωρου Imf. Η διάσταση του υπόχωρου Imf λέγεται και τάξη (rank) της γραμμικής απεικόνισης.*

Ασκήσεις

1. Να κάνετε λεπτομερώς τις αποδείξεις του μαθήματος αυτού και συγκεκριμένα την απόδειξη του θεωρήματος 3.5.1, τις αποδείξεις στο σημείο 3 της παραγράφου αυτής και την απόδειξη του θεωρήματος 5.1.7 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α».
2. Να εξετασθεί εάν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ η οποία να είναι $1-1$.
3. Να εξετασθεί εάν υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ η οποία να είναι επί.

4. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με

$$f(x, y, z) = (2x - y, x + y - 3z).$$

Να βρεθούν βάσεις $\overline{\alpha}$ του πρώτου χώρου $\mathbb{R}^3$ και $\overline{\beta}$ του δεύτερου χώρου $\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε ο πίνακας $(f : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$, ως προς τις βάσεις αυτές να λαμβάνει την απλούστερη δυνατή μορφή σύμφωνα με τα παραπάνω. Ποια είναι η διάσταση του πυρήνα $Ker f$; Ποιά είναι η διάσταση της εικόνας $Im f$;

3.6 Πίνακες και γραμμικές απεικονίσεις

Πορεία μελέτης

1. Ας ξαναθυμηθούμε το θεώρημα του προηγούμενου μαθήματος:

   Θεώρημα 3.6.1. *Έστω V_1 και V_2 δύο διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ πεπερασμένης διάστασης. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

   (α) $dim_{\mathbb{F}}V_1 = dim_{\mathbb{F}}V_2$

   (β) Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : V_1 \longrightarrow V_2$ $1-1$ και επί.

   Απόδειξη:

   Από το (α) στο (β):
   Έστω ότι οι δύο χώροι V_1 και V_2 έχουν ίσες διαστάσεις

   $$dim_{\mathbb{F}}V_1 = dim_{\mathbb{F}}V_2 = \nu$$

   Έστω επίσης $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ μία βάση του χώρου V_1 και $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu\}$ μία βάση του χώρου V_2. Κάθε στοιχείο $x \in V_1$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως $x = \lambda_1 \cdot \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \alpha_2 + \cdots + \lambda_\nu \cdot \alpha_\nu$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

   $$f(x) = \lambda_1 \cdot \beta_1 + \lambda_2 \cdot \beta_2 + \cdots + \lambda_\nu \cdot \beta_\nu$$

   Η συνάρτηση αυτή είναι γραμμική $1-1$ και επί. Προσπαθήστε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς αυτούς.

   Από το (β) στο (α):
   Έστω $f : V_1 \longrightarrow V_2$ $1-1$ και επί και $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ μία βάση του πρώτου χώρου. Θεωρούμε το σύνολο $\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_\nu)\}$. Το σύνολο αυτό είναι μία βάση του χώρου V_2. Προσπαθήστε να αποδείξετε τους ισχυρισμούς αυτούς.

2. Όπως έχουμε ξαναπεί μία γραμμική απεικόνιση $f : V_1 \longrightarrow V_2$ $1-1$ και επί συνήθως τη λέμε **ισομορφισμό διανυσματικών χώρων**, τους διανυσματικούς χώρους τους λέμε ισόμορφους και συμβολίζουμε με $V_1 \cong V_2$.

3. Έστω $f, g : V_1 \longrightarrow V_2$ δύο γραμμικές απεικονίσεις. Δεχόμαστε ότι οι διανυσματικοί χώροι V_1 και V_2 επί του $\mathbb{F}$ είναι πεπεραμένης διάστασης μ και ν αντίστοιχα.
   Υποθέτουμε ότι $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mu)$ και $\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu)$ είναι δύο
   διατεταγμένες βάσεις των διανυσματικών χώρων V_1 και V_2 αντίστοιχα. Τότε

   $$(f + g : \overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (f : \overline{\alpha}, \overline{\beta}) + (g : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$$

   $$(f - g : \overline{\alpha}, \overline{\beta}) = (f : \overline{\alpha}, \overline{\beta}) - (g : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$$

   $$(\lambda \cdot f : \overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \lambda \cdot (f : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$$

4. Μελετήστε ξανά σε βάθος το θεώρημα 5.1.7 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α» και την απόδειξή του. Υπενθυμίζουμε ότι το θεώρημα αυτό λέει ότι:

Θεώρημα 3.6.2. *Έστω V, W, U τρείς διανυσματικοί χώροι επί του $\mathbb{F}$ και*

$$\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\mu), \text{ μία διατεταγμένη βάση του } V,$$

$$\overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\nu), \text{ μία διατεταγμένη βάση του } W \text{ και}$$

$$\overline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_\xi), \text{ μία διατεταγμένη βάση του } U$$

Αν $f : V \longrightarrow W$ και $g : W \longrightarrow U$ δύο γραμμικές απεικονίσεις, τότε

$$(g \circ f : \overline{\alpha}, \overline{\gamma}) = (g : \overline{\beta}, \overline{\gamma})(f : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$$

5. Μελετήστε την παράγραφο 2.5 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α» για να θυμηθείτε πως γίνεται ο πολλαπλασιασμός πινάκων.

6. **Πολλαπλασιασμός πινάκων:**

6. 1. Έστω $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \cdots & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix}$ ένας πίνακας $\mu \times \nu$ και

$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \cdots & \beta_{1\kappa} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \cdots & \beta_{2\kappa} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \cdots & \cdots & \alpha_{\nu\kappa} \end{pmatrix}$ ένας πίνακας $\nu \times \kappa$

Ορίζεται το γινόμενο AB, που είναι ένας πίνακας $\mu \times \kappa$ και το στοιχείο στη θέση (ij) είναι το

$$\sum_{\xi=1}^{\nu} \alpha_{i\xi} \cdot \beta_{\xi j}$$

6. 2. Δείτε τα παραδείγματα πολλαπλασιασμού πινάκων 2.5.5 και 2.5.6 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α».

7. Αν πάρουμε την ταυτοτική γραμμική απεικόνιση

$$I : V \longrightarrow V \;\; \mu\epsilon \;\; f(v) = v, \forall v \in V$$

τότε ο πίνακας αυτής $(I : \overline{\alpha}, \overline{\alpha})$ είναι προφανώς ο

$$I_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

8. Έστω $f : V_1 \longrightarrow V_2$ μία γραμμική απεικόνιση μεταξύ δύο χώρων πεπερασμένης διάστασης. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

   (α) Η f είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

   (β) Αν $\overline{\alpha}$ είναι μία διατεταγμένη βάση του V_1 και $\overline{\beta}$ μία διατεταγμένη βάση του V_2, τότε ο οπίνακας $(f : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ είναι αντιστρέψιμος.

Δείτε μία λεπτομερή απόδειξη του παραπάνω από το βιβλίο « Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Ι, τόμος Α».

3.7 Τάξη πίνακα

Πορεία μελέτης

1. Δείτε το βίντεο εδώ.
2. Έστω A ένας πίνακας. Το σύνολο των γραμμών του παράγουν έναν υπόχωρο. Ο υπόχωρος αυτός έχει μία διάσταση. Τη διάσταση του υπόχωρου αυτού τη λέμε **τάξη γραμμών του πίνακα** A.
3. Έστω A ένας πίνακας. Το σύνολο των στηλών του παράγουν ένα υπόχωρο. Ο υπόχωρος αυτός έχει μία διάσταση. Τη διάσταση του υπόχωρου αυτού τη λέμε **τάξη στηλών του πίνακα** A.
4. Αυτό που θα αποδείξουμε σε μεταγενέστερα μαθήματα είναι ότι η τάξη γραμμών ενός πίνακα ισούται πάντα με την τάξη στηλών του. Μέχρι να το αποδείξουμε θα υπολογίζουμε αυτούς τους αριθμούς ξεχωριστά.
5. Μελετήστε αυτά που γράφονται στη διεύθυνση εδώ.

Ασκήσεις

1. Δίνεται ο πίνακας
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
Να βρείτε μία γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε αν $\overline{e} = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ μία διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$, να έχουμε ότι $A = (f : \overline{e}, \overline{e})$.
2. Να βρείτε τον πυρήνα και την εικόνα της γραμμικής απεικόνισης f.
3. Δίνεται ο πίνακας:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & \lambda \end{pmatrix}$$
Να βρεθεί η τάξη γραμμών και η τάξη στηλών του A γιά κάθε πραγματικό αριθμό λ.
4. Δίνεται[5] ότι τα A και B είναι διανυσματικοί χώροι και $f : A \longrightarrow B$ είναι γραμμική απεικόνιση.
   4. 1. Να εξετασθεί εάν ο πυρήνας είναι πάντα διανυσματικός χώρος.
   4. 2. Υποθέτουμε ότι η f είναι $1-1$. Εξετάστε εάν υπάρχει $x \in A, x \neq \mathbf{0}$ με την ιδιότητα $f(x) = \mathbf{0}$.
   4. 3. Υποθέτουμε ότι τα κ στοιχεία $x_1, x_2, \cdots, x_\kappa$ του A είναι γραμμικά ανεξάρτητα, ενώ τα $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_\kappa)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Εξετάστε εάν η f είναι $1-1$.
   4. 4. Υποθέτουμε ότι $A = < x_1, x_2, \cdots, x_\kappa >$ και ότι τα $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_\kappa)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εξετάστε εάν η f είναι $1-1$.
5. Δίνεται η γραμμική απεικόνιση $\theta : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με
$$\begin{aligned} \theta(1,0,0) &= (1,2,3) \\ \theta(0,1,0) &= (4,5,6) \\ \theta(0,0,1) &= (7,8,9) \end{aligned}$$

[5] Οι παρακάτω ασκήσεις είναι περίπου όμοιες με παλαιά θέματα εξετάσεων.

5. 1. Να βρεθεί ο τύπος της γραμμικής απεικόνισης, δηλαδή να βρεθεί το $\theta(x, y, z)$.

5. 2. Να βρεθεί μία βάση του πυρήνα $Ker\theta$.

5. 3. Να βρεθεί μία βάση της εικόνας $Im\theta$.

5. 4. Να βρεθεί ο πίνακας $(\theta : \overline{e}, \overline{e})$ της γραμμικής απεικόνισης θ ως προς την διατεταγμένη βάση $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.

5. 5. Βρείτε βάσεις $\overline{\alpha}$ και $\overline{\beta}$ του $\mathbb{R}^3$ έτσι ώστε ο πίνακας $((\theta : \overline{\alpha}, \overline{\beta})$ να γίνεται «απλός».

3.8 Τάξη πίνακα - μέρος ΙΙ

Πορεία μελέτης

1. Να κάνετε μία γρήγορη ανάγνωση του προηγούμενου μαθήματος.

2. Δείτε προσεκτικά το Λήμμα 5.3.1 από το βιβλίο « Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα , τόμος Α» και την απόδειξή του. Το Λήμμα αυτό λέει ότι η **τάξη στηλών** ενός πίνακα A δεν αλλάζει εάν πολλαπλασιάσουμε τον πίνακα A επί έναν αντιστρέψιμο είτε από δεξιά είτε από αριστερά . Η απόδειξη στηρίζεται στην αντιστοιχία πινάκων-γραμμικών απεικονίσεων. Σημειώνουμε ότι σε ένα αντιστρέψιμο πίνακα αντιστοιχεί ένας ισομορφισμός. Το τελευταίο να το μελετήσετε καλά.

3. Δείτε τις λεπτομέρειες της απόδειξης της πρότασης 5.3.2 και του θεωρήματος 5.3.4. Γίνεται χρήση και ενός θεωρήματος που αποδείξαμε. Ιδιαίτερα οποιονδήποτε πίνακα μπορούμε να τον πολλαπλασιάσουμε αριστερά με ένα αντιστρέψιμο και δεξιά επίσης με αντιστρέψιμο για να καταλήξουμε σε πίνακα της μορφής:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Για τον παραπάνω πίνακα όμως ειναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η τάξη γραμμών του είναι ίση με την τάξη στηλών του.

4. Με βάση αυτά τα επιχειρήματα καταλήγουμε στο:

   Θεώρημα 3.8.1. *Έστω A ένας πίνακας. Τότε η τάξη στηλών του είναι ίση με την τάξη γραμμών του. Ο ακέραιος αυτός θα λέγεται* **τάξη** *του πίνακα A και θα συμβολίζεται με $r(A)$.*

5. Μελετήστε ξανά τα αναγραφόμενα εδώ.

6. Δείτε τρόπους υπολογισμού της τάξης ενός πίνακα από το βιβλίο « Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα, τόμος Α» παράγραφος 5.3 και επίσης στη διεύθυνση εδώ.

Πορεία μελέτης

Στο σημερινό μάθημα έχουμε και το παρακάτω:

Θεώρημα 3.8.2. *Έστω V και W δύο διανυσματικοί χώροι με την επιπλέον υπόθεση ότι ο V είναι πεπερασμένης διάστασης. Έστω επίσης $f : V \longrightarrow W$ μία γραμμική απεικόνιση. Τότε*

$$dimV = dimKerf + dimImf$$

1. **Σχέδιο απόδειξης**

   1. 1. Δείτε το βίντεο εδώ πριν την απόδειξη.
   1. 2. Αν ο πυρήνας είναι ο $\{\mathbf{0}\}$ τότε το αποτέλεσμα είναι άμεσο διότι η απεικόνιση $f : V \longrightarrow Imf$ είναι ισομορφισμός. Αυτό που κάναμε είναι ότι περιορίσαμε το πεδίο τιμών.
   1. 3. Αν ο πυρήνας είναι διαφορετικός από το $\{\mathbf{0}\}$, τότε επιλέγουμε μία βάση του έστω η $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$.

1. 4. Η βάση $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu\}$ του πυρήνα επεκτείνεται σε μία βάση $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu\}$ όλου του χώρου.

1. 5. Θεωρούμε τον υπόχωρο B του V, που παράγεται από τα διανύσματα $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_\mu\}$.

1. 6. Ο περιορισμός της αρχικής γραμμικής απεικόνισης f στον υπόχωρο B, δηλαδή η $f_B : B \longrightarrow Imf$ είναι ένας ισομορφισμός διανυσματικών χώρων και έτσι $dimB = dimImf$.

1. 7. Η διάσταση του B είναι όμως $dimV - dimKerf$ και το θεώρημα αποδείχθηκε.

2. Δείτε προσεκτικά την απόδειξη του θεωρήματος από το βιβλίο « Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα τόμος Α ». Είναι η απόδειξη του θεωρήματος 4.3.2 Στην απόδειξη αυτή θα επανέλθουμε.

3. Δείτε ξανά τη σελίδα εδώ και συγκεκριμένα την παράγραφο Kernel, image and the rank-nullity theorem.

Άσκηση

1. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

Να βρεθεί η τάξη του A.

3.9 Γραμμικά συστήματα

Θεωρήστε το παρακάτω γραμμικό σύστημα:

$$\begin{array}{l} \alpha_{11}\cdot x_1+\alpha_{12}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{1\nu}\cdot x_\nu=\beta_1 \\ \alpha_{21}\cdot x_1+\alpha_{22}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{2\nu}\cdot x_\nu=\beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1}\cdot x_1+\alpha_{\mu 2}\cdot x_2+\cdots+\alpha_{\mu\nu}\cdot x_\nu=\beta_\mu \end{array} \qquad (\Sigma)$$

1. Ο πίνακας A του συστήματος (Σ) είναι:

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \cdots & \alpha_{3\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \alpha_{\mu 3} & \cdots & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

2. Μπορούμε να γράψουμε το σύστημα (Σ) υπό μορφή πινάκων ως εξής:

$$A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_\nu \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_\mu \end{pmatrix}$$

και έτσι αντί να έχουμε να λύσουμε το γραμμικό σύστημα έχουμε την εξίσωση αυτή με πίνακες.

3. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση

$$\theta:\mathbb{F}^{\nu\times 1}\longrightarrow\mathbb{F}^{\mu\times 1}$$

η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\theta\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_\nu \end{pmatrix}=A\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ x_\nu \end{pmatrix}$$

4. Η παραπάνω απεικόνιση θ είναι γραμμική (αποδείξτε γιατί).

5. Η απεικόνιση θ έχει ως πυρήνα έναν υπόχωρο του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$, τον $Ker\theta$, και ως εικόνα ένα υπόχωρο του $\mathbb{F}^{\mu\times 1}$.

6. Άμεσα αποδεικνύεται το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 3.9.1. *Το σύνολο λύσεων του συστήματος είναι μη κενό εάν και μόνο εάν*

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_\mu \end{pmatrix}\in Im\theta$$

Απόδειξη: Άμεση από τα προηγούμενα.

7. Θεωρούμε τώρα το παρακάτω ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{array}{l} \alpha_{11} \cdot x_1 + \alpha_{12} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{1\nu} \cdot x_\nu = 0 \\ \alpha_{21} \cdot x_1 + \alpha_{22} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{2\nu} \cdot x_\nu = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{\mu 1} \cdot x_1 + \alpha_{\mu 2} \cdot x_2 + \cdots + \alpha_{\mu\nu} \cdot x_\nu = 0 \end{array} \qquad (\mathbf{O}\Sigma)$$

Όπως έχουμε ξαναπεί το σύστημα αυτό λέγεται *αντίστοιχο ομογενές* του αρχικού συστήματος.

8. Το σύνολο λύσεων του παραπάνω ομογενούς γραμμικού συστήματος είναι ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης θ και άρα είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{F}^{\nu\times 1}$.

9. Αν $(\mathbf{O}\Lambda)$ το σύνολο λύσεων του αντίστοιχου ομογενούς συστήματος όπως παραπάνω, τότε σύμφωνα με το κύριο θεώρημα του προηγούμενου μαθήματος είναι ένας υπόχωρος και θά έχουμε

$$dim(\mathbf{O}\Lambda) = dim\mathbb{F}^{\nu\times 1} - dimIm\theta = \nu - rank(A)$$

10. Άμεσα προκύπτει το παρακάτω πόρισμα:

Πόρισμα 3.9.2. *Αν αριθμός αγνώστων* $= rank(A)$*, τότε το ομογενές γραμμικό σύστημα έχει ακριβώς μία λύση, την* $(0,0,0,\cdots,0)$

3.10 Γραμμικά συστήματα - μέρος ΙΙ

Πορεία μελέτης

Θα μελετήσουμε παρακάτω ξανά ένα γραμμικό σύστημα όπως αυτό στην παράγραφο 3.9.

1. Σύνολο λύσεων του γραμμικού συστήματος (Σ) είναι το σύνολο

$$\Lambda = \{(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_\nu) \in \mathbb{F}^\nu \mid \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2 + \cdots + \alpha_{i\nu}\xi_\nu = \beta_i, i \in \{1, 2, \cdots, \mu\}\}$$

2. Με έλεγχο των απαιτήσεων έχουμε ότι αν το (Σ) είναι **ομογενές**, δηλαδή εάν

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_\mu = 0$$

το σύνολο λύσεων είναι υπόχωρος. Στο ίδιο συμπέρασμα οδηγούμαστε εάν σκεφθούμε ότι στην πραγματικότητα το Λ είναι ο πυρήνας της γραμμικής απεικόνισης θ του προηγούμενου μαθήματος.

3. Έστω ότι το γραμμικό σύστημα δεν είναι ομογενές. Τότε το σύνολο λύσεων Λ δεν περιέχει το $(0, 0, 0, \ldots.., 0)$, άρα το Λ δεν είναι υπόχωρος, διότι κάθε υπόχωρος από τον ορισμό περιέχει το μηδενικό $(0, 0, 0, \ldots.., 0)$ στοιχείο του χώρου.

4. Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \cdots & \alpha_{3\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu1} & \alpha_{\mu2} & \alpha_{\mu3} & \cdots & \cdots & \alpha_{\mu\nu} \end{pmatrix}$$

λέγεται **πίνακας του συστήματος**.

5. Ο πίνακας

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \cdots & \alpha_{1\nu} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \cdots & \alpha_{2\nu} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \cdots & \cdots & \alpha_{3\nu} & \beta_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{\mu1} & \alpha_{\mu2} & \alpha_{\mu3} & \cdots & \cdots & \alpha_{\mu\nu} & \beta_\mu \end{pmatrix}$$

λέγεται **επαυξημένος πίνακας του συστήματος** ή απλά **επαυξημένος πίνακας**.

6. Μπορούμε το σύστημα (Σ) της παραγράφου 3.9 να το γράψουμε ισοδύναμα ως εξής:

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{\mu1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{\mu2} \end{pmatrix} + \cdots + x_\nu \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{1\nu} \\ \alpha_{2\nu} \\ \alpha_{3\nu} \\ \cdots \\ \cdots \\ \alpha_{\mu1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_\mu \end{pmatrix}$$

7. Το πρώτο μέλος της παραπάνω σχέσης είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα του συστήματος A.

8. Η σχέση αυτή επίσης μας λέει ότι αν το σύστημα (Σ) έχει λύση, τότε ένας γραμμικός συνδυασμός των στηλών του πίνακα A είναι ίσος με τον πίνακα-στήλη των σταθερών όρων ή ότι ο πίνακας $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ \beta_\mu \end{pmatrix}$ βρίσκεται στον υπόχωρο που παράγουν οι στήλες του πίνακα A.

Διατυπώνουμε τώρα ένα από τα πιο σημαντικά θεωρήματα σχετικά με τα γραμμικά συστήματα:

Θεώρημα 3.10.1. *Το γραμμικό σύστημα (Σ) έχει λύση (τουλάχιστον μία) εάν και μόνο εάν η τάξη $rank(A)$ του πίνακα A του συστήματος είναι ίση με την τάξη $rank(\Gamma)$ του επαυξημένου πίνακα.*

Ασκήσεις

1. Να γίνει λεπτομερώς η απόδειξη του θεωρήματος 3.10.1.

2. Να βρεθεί το σύνολο λύσεων του συστήματος

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z + \omega &= 0 \\ x + y - z - \omega &= 0 \end{aligned}$$

Να κατασκευάσετε την απεικόνιση θ όπως παραπάνω και να βρείτε τον υπόχωρο $Im\theta$.

3.11 Ασκήσεις - στοιχεία αυτοαξιολόγησης

1. Δίνεται ο διανυσματικός χώρος $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + 7z = 0\}$

   1. 1. Να βρεθεί μία βάση B του V και η διάστασή του.

   1. 2. Να βρείτε ένα στοιχείο $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε το σύνολο $B \cup \{(\alpha, \beta, \gamma)\}$ να είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

2. Αν A ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^8$ και B μία βάση του A, δείξτε ότι υπάρχει υποσύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων Γ του $\mathbb{R}^8$, έτσι ώστε το $\Gamma \cup B$ να είναι βάση του $\mathbb{R}^8$.

3. Μία γραμμική απεικόνιση $\theta : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ έχει τις ιδιότητες $\theta \neq I$, δηλαδή δεν είναι η ταυτοτική και $\theta^2 = \theta$, δηλαδή $\theta \circ \theta = \theta$.

   3. 1. Δείξτε ότι $Ker\theta \neq \{\mathbf{0}\}$.

   3. 2. Δείξτε ότι $Ker\theta \cap Im\theta = \{\mathbf{0}\}$.

   3. 3. Δείξτε ότι για κάθε στοιχείο $\omega \in \mathbb{R}^5$ υπάρχουν μοναδικά $\alpha_\omega \in Ker\theta$ και $\beta_\omega \in Im\theta$ έτσι ώστε $\omega = \alpha_\omega + \beta_\omega$.

3.12 Γραμμικά συστήματα - Συνέχεια

Πορεία μελέτης

1. Από την παράγραφο 2.8 (από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα, Τόμος Α») μελετήστε τον ορισμό 2.8.1, την πρόταση 2.8.2 και τα παραδείγματα 2.8.3, 2.8.4, 2.8.5 και 2.8.6.

2. Μελετήστε τα 15 παραδείγματα και τις 37 ασκήσεις της παραγράφου 1 του κεφαλαίου I (από το κεφάλαιο Solvin linear systems. Gauss method) που βρίσκεται στην Ηλεκτρονική τάξη του μαθήματος. Οι ασκήσεις είναι λυμένες, αλλά καλό είναι να τις λύσετε μόνοι σας και μετά να επιβεβαιώσετε την ορθότητα της λύσης.

3. Ρίξτε μία ματιά στη σελίδα εδώ.

4. Δείτε το βίντεο με τον διάσημο καθηγητή Gilbert Strang από το MIT που μιλάει για τα γραμμικά συστήματα. Είναι στη διεύθυνση εδώ, εδώ και εδώ.

5. Στο on-line πρόγραμμα επίλυσης γραμμικών συστημάτων, που βρίσκεται εδώ, βάλτε το σύστημα

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ 4x + 5y + 6z &= 0 \\ 7x + 8y + 9z &= 0 \end{aligned}$$

   και αναζητήστε τις λύσεις του. Μετά να ερμηνεύσετε και να επιβεβαιώσετε το αποτέλεσμα.

6. Να κάνετε το ίδιο και με το υπολογιστικό πακέτο εδώ.