



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Γραμμική Άλγεβρα Ι

Ενότητα: Διανυσματικοί χώροι

Ευάγγελος Ράπτης

Τμήμα Μαθηματικών

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Περιεχόμενα ενότητας

2.1	Η έννοια του διανυσματικού χώρου	4
2.2	Υπόχωροι	6
2.3	Οικογένειες υπόχωρων	8
2.4	Γραμμική Ανεξαρτησία	10
2.5	Βάση διανυσματικού χώρου	11
2.6	Διάσταση διανυσματικού χώρου	14
2.7	Θεώρημα ανταλλαγής - Θεώρημα επέκτασης	17

2.1 Η έννοια του διανυσματικού χώρου

Με το σημερινό μάθημα αρχίζουμε τη μελέτη των Διανυσματικών χώρων, μία πολύ βασική έννοια της Γραμμικής Άλγεβρας.

Πορεία μελέτης

1. Δείτε από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α» τα εξής:
 1. 1. Τον ορισμό του διανυσματικού χώρου. Είναι ο ορισμός 3.1.1.
 1. 2. Δείτε τις παρατηρήσεις 3.1.2 στη συνέχεια. Αναφέρονται στην μοναδικότητα του μηδενικού στοιχείου και του αντιθέτου.
 1. 3. Τα παραδείγματα 3.1.3 Προσέξτε ένα-ένα τα παραδείγματα διανυσματικών χώρων.
2. Δείτε λεπτομερώς το πόρισμα 2.3.3 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α». Αναφέρεται σε βασικές ιδιότητες των πινάκων που θα χρησιμοποιούμε συχνά.
3. Δείτε πληροφορίες για τους Διανυσματικούς χώρους (στα αγγλικά ο όρος είναι vector space ή linear space) στη διεύθυνση [εδώ](#). Πρόκειται για ένα εξαιρετικά κατατοπιστικό άρθρο που περιγράφει και τις διασυνδέσεις και επιρροές της Γραμμικής άλγεβρας και με άλλους κλάδους των Μαθηματικών.
4. Στη διεύθυνση [εδώ](#) θα βρείτε ένα καλό βιβλίο Γραμμικής Άλγεβρας, μαζί με ένα βιβλίο ασκήσεων και λύσεων! Πάρτε το και αρχίστε τη μελέτη.
5. Δείτε το βιντεο-μάθημα από τη διεύθυνση [εδώ](#).
6. Δείτε ένα ακόμη βιντεο-μάθημα από τη διεύθυνση [εδώ](#).

Ταυτόχρονα με τη συνεχιζόμενη μελέτη των πινάκων και των ιδιοτήτων τους, εισάγουμε σήμερα την έννοια του **υπόχωρου** ενός διανυσματικού χώρου. Ο υπόχωρος είναι ένα μη κενό υποσύνολο του χώρου και έχει την ίδια **δομή** δηλαδή είναι και αυτός ένας διανυσματικός χώρος με πράξεις τον περιορισμό των πράξεων του χώρου στο σύνολο A .

Πορεία μελέτης

1. Μελετήστε **προσεκτικά** το παράδειγμα 2.3.5 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α». Στο παράδειγμα αυτό γίνεται συζήτηση για τη σωστή χρήση των αξιωμάτων και των ορισμών.
2. Δείτε τον **ορισμό** 2.3.7 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α», της διαφοράς δύο πινάκων $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$.
3. Δείτε επίσης τον ορισμό 2.3.12 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α».
 3. 1. Του **συμμετρικού πίνακα**: **συμμετρικός είναι ένας τετραγωνικός πίνακας A με την ιδιότητα $A = A^t$.**
 3. 2. Του **αντισυμμετρικού πίνακα**: **αντισυμμετρικός είναι ένας τετραγωνικός πίνακας A με την ιδιότητα $A = -A^t$.**
4. Δίνουμε τώρα τον παρακάτω ορισμό

Ορισμός 2.1.1. Έστω V ένας Διανυσματικός χώρος επί του \mathbb{F} .¹ Το υποσύνολο A του V θα λέγεται **υπόχωρος** του V (ή διανυσματικός υπόχωρος του V) εάν ικανοποιεί τα παρακάτω:

- (α) Το μηδενικό στοιχείο 0_V του χώρου ανήκει στο A (έτσι το A είναι μή-κενό σύνολο)
- (β) Αν α και β δύο στοιχεία του A , τότε και το $\alpha + \beta$ είναι και αυτό στοιχείο του A
- (γ) Αν α είναι κάποιο στοιχείο του A και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε και το $\lambda\alpha$ ανήκει στο A

Σχόλια

- Ένας υπόχωρος A είναι ένας «μικρός διανυσματικός χώρος» μέσα στον «μεγάλο» διανυσματικό χώρο V .
- Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε εάν ένας διανυσματικός χώρος έχει υπόχωρους, πόσους έχει και ποιό είναι.
- Αν ο A είναι υπόχωρος του V , συμβολίζουμε με $A \leq V$.

Άσκηση

Να μελετήσετε με στοιχειώδεις τρόπους τους υπόχωρους του παρακάτω διανυσματικού χώρου:

$$V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \alpha x + \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Οι πράξεις στον Διανυσματικό χώρο αυτό είναι οι συνήθεις.

¹Επισημαίνουμε ότι με το σύμβολο \mathbb{F} στο μάθημα αυτό θα συμβολίζουμε ένα από τα τρία σύνολα

- Το σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών αριθμών
- Το σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών
- Το σύνολο \mathbb{Q} των ρητών αριθμών

2.2 Υπόχωροι

Πορεία μελέτης

1. Μελετήστε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.1. Έστω A και B δύο υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V . Τότε η τομή $A \cap B$ είναι υπόχωρος.

Απόδειξη Το μηδενικό στοιχείο 0_V ανήκει εξ ορισμού και στο A και στο B άρα και στην τομή τους. Αν α, β ανήκουν και στον υπόχωρο A και στον B , τότε το άθροισμα $\alpha + \beta$ θα ανήκει επίσης και στους δύο υπόχωρους, άρα και στην τομή τους. Αν x ανήκει στον υπόχωρο A και στον B και $\lambda \in \mathbb{F}$, τότε από τον ορισμό έχουμε ότι το λx ανήκει και στον A και στον B άρα και στην τομή τους. Τελικά η τομή των υπόχωρων είναι υπόχωρος.

2. Από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα Τόμος Α» να μελετήσετε τον ορισμό 2.5.1 και τα παραδείγματα 2.5.2 και 2.5.3 που αναφέρονται στο γινόμενο πινάκων.

Μία άσκηση και η λύση της

Δείξτε ότι το σύνολο των διπλά παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$f'' - 5 \cdot f' + 6 \cdot f = 0$$

είναι ένας διανυσματικός χώρος με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς.

Λύση της άσκησης. Η άσκηση αναφέρεται σε ένα σύνολο V πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής. Κάθε στοιχείο $f(x) \in V$ είναι μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία υπάρχει η δεύτερη παράγωγος και ισχύει επί πλέον $f'' - 5 \cdot f' + 6 \cdot f = 0$.

Για να είναι το σύνολο V διανυσματικός χώρος θα πρέπει να ικανοποιούνται τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου, δες 2.1.1.

1. Το σύνολο V είναι μη κενό, διότι η μηδενική συνάρτηση $\mathbf{0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\mathbf{0}(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ παραγωγίζεται δύο φορές και προφανώς ικανοποιεί τη συνθήκη $f'' - 5 \cdot f' + 6 \cdot f = 0$.
2. Αν $f_1(x), f_2(x) \in V$, τότε $f_1'' - 5 \cdot f_1' + 6 \cdot f_1 = 0$ και $f_2'' - 5 \cdot f_2' + 6 \cdot f_2 = 0$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $(f_1 + f_2)'' - 5 \cdot (f_1 + f_2)' + 6 \cdot (f_1 + f_2) = 0$.
3. Συνεχίζουμε με τον τρόπο αυτό αποδεικνύοντας ότι ικανοποιούνται όλα τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου για το σύνολο V .

Ασκήσεις για σκέψη

1. Έστω $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ο διανυσματικός χώρος των 2×2 πινάκων με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς. Να βρείτε όλους τους υπόχωρους που περιέχουν τους παρακάτω 4 πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Έστω \mathbb{R} ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών αριθμών επί του \mathbb{R} . Να βρεθούν οι υπόχωροί του.
3. Έστω $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ο διανυσματικός χώρος των ζευγών πραγματικών αριθμών επί του \mathbb{R} . Να περιγραφούν οι υπόχωροί του.
4. Έστω \mathbb{C} ο διανυσματικός χώρος των μιγαδικών αριθμών επί του \mathbb{R} . Να περιγραφούν οι υπόχωροί του.
5. Έστω \mathbb{C} ο διανυσματικός χώρος των μιγαδικών αριθμών επί του \mathbb{C} . Να βρεθούν οι υπόχωροί του.

2.3 Οικογένειες υπόχωρων

Πορεία μελέτης

1. Δείτε την απόδειξη της πρότασης 3.2.10 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α». Είναι εντελώς ίδια με την απόδειξη του θεωρήματος 2.2.1 παραπάνω. Η μόνη διαφορά είναι ότι δεν έχουμε κατ' ανάγκη δύο υπόχωρους αλλά ένα μη κενό σύνολο υπόχωρων, ενδεχομένως και άπειρο. Μελετήστε καλά την απόδειξη.
2. Έστω $A_i, i \in I$ μία οικογένεια υπόχωρων. Τι μπορεί να σημαίνει αυτή η έκφραση; Και γιατί είμαστε αναγκασμένοι να τη χρησιμοποιούμε; Και τι αποτελέσματα μπορούμε να πάρουμε; Ας επαναλάβουμε ήδη γνωστά αποτελέσματα που τα διαβάσαμε λίγο πριν:
 2. 1. Αν A και B δύο υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V , τότε και η τομή τους είναι υπόχωρος του V .
Απόδειξη: Το μηδενικό στοιχείο 0_V του χώρου ανήκει και στον υπόχωρο A και στον υπόχωρο B (από τον ορισμό), άρα ανήκει και στην τομή τους. Έτσι η πρώτη απαίτηση για να είναι η τομή $A \cap B$ υπόχωρος ικανοποιείται.
 Έστω τώρα $x, y \in A \cap B$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $x + y \in A \cap B$. Έχουμε από υπόθεση ότι $x, y \in A$ και $x, y \in B$. Επειδή τώρα A και B είναι υπόχωρος θα έχουμε ξεχωριστά ότι $x + y \in A$ και $x + y \in B$, άρα $x + y \in A \cap B$.
 Έστω $\lambda \in \mathbb{F}$ και $x \in A \cap B$. Άρα ξεχωριστά θα έχουμε ότι $x \in A$ και $x \in B$. Επειδή τώρα A και B υπόχωροι και λ είναι συντελεστής, θα έχουμε $\lambda x \in A$ και $\lambda x \in B$. Τελικά $\lambda x \in A \cap B$. Ικανοποιούνται έτσι και οι τρεις απαιτήσεις και έτσι η τομή δύο υπόχωρων είναι υπόχωρος.
 2. 2. Η τομή πεπερασμένου πλήθους υπόχωρων του V είναι υπόχωρος επίσης, δηλαδή αν A_1, A_2, \dots, A_n είναι υπόχωροι του V , τότε και η τομή $\bigcap_{i=1}^n A_i$ είναι υπόχωρος.
 Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Δοκιμάστε να την κάνετε.
 2. 3. Αν τώρα πάρουμε για παράδειγμα όλους τους υπόχωρους του \mathbb{R}^2 και θελήσουμε να τους βάλουμε σε μία σειρά θα δούμε ότι αυτό είναι αδύνατο. Αυτό σχετίζεται με ένα σπουδαίο θεώρημα που λέει ότι **δέν υπάρχει** συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$, η οποία να είναι 1-1 και επί. Με άλλα λόγια δεν είναι δυνατόν να βάλουμε τους πραγματικούς αριθμούς σε μια σειρά και να τους θεωρήσουμε ως στοιχεία ακολουθίας! Υπάρχει μία ιστορία με το ξενοδοχείο των αριθμών που θα πούμε σε επόμενα μαθήματα. Στο μάθημα αυτό δεν θα αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό, αλλά αυτό μας επιβάλλει να γράφουμε ως εξής: Έστω $A_i, i \in I$, η οικογένεια των υπόχωρων του V που έχουν μία ιδιότητα. Δεν μπορούμε, αλλά ούτε χρειαζόμαστε να βάλουμε σε μία σειρά τους υπόχωρους.

Θεώρημα 2.3.1. Έστω A ένα υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V . Τότε η τομή όλων των υπόχωρων του V , που περιέχουν το A είναι υπόχωρος.

Απόδειξη Είναι όμοια με την παραπάνω. Η διαφορά βρίσκεται στο γεγονός ότι δεν δικαιούμαστε να θεωρήσουμε τους υπόχωρους που περιέχουν το A , ως στοιχεία ακολουθίας.

Θέμα για σκέψη: Να βρεθεί η τομή όλων των υπόχωρων του V . Να βρεθεί η τομή όλων των υπόχωρων του \mathbb{R}^2 που ο καθένας περιέχει το $(2,3)$.

3. Δείτε προσεκτικά τον ορισμό 3.3.1 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α» του **γραμμικού συνδυασμού στοιχείων του υποσυνόλου K ενός διανυσματικού χώρου V** . Παρατηρήστε ότι:

3. 1. Το σύνολο K είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του διανυσματικού χώρου, πεπερασμένο ή άπειρο. Αρκεί να είναι μη-κενό.
3. 2. Ο γραμμικός συνδυασμός εμπλέκει **πάντα** πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων.
4. Μελετήστε επίσης προσεκτικά την απόδειξη του θεωρήματος 3.3.2 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α». Αναφέρει και αποδεικνύει ότι το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών ενός μη-κενού συνόλου K είναι ένας υπόχωρος.
5. Ο παραπάνω υπόχωρος λέγεται **υπόχωρος του V που παράγεται από το K ή γραμμική θήκη του K** και συμβολίζεται με $\langle K \rangle$. Δες και τον ορισμό 3.3.3 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α».
6. Αν το K είναι πεπερασμένο σύνολο, τότε ο υπόχωρος $\langle K \rangle$ θα λέγεται πεπερασμένα παραγόμενος.
7. Μελετήστε τα παραδείγματα 3.3.5 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α».
8. Από το παράδειγμα 3.3.6 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α» διαπιστώστε ότι υπάρχουν διανυσματικοί χώροι, οι οποίοι **δεν** είναι πεπερασμένα παραγόμενοι. Βρείτε εσείς ακόμη ένα δικό σας παράδειγμα ενός μη-πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου
9. Έστω K ένα μη-κενό υποσύνολο του διανυσματικού χώρου V . Η τομή **όλων** των υπόχωρων του V καθένας εκ των οποίων περιέχει το K είναι ένας υπόχωρος K^* του V .
10. Μελετήστε την απόδειξη της πρότασης 3.3.7 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α». Η πρόταση αυτή με λόγια λέει: Το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του μη-κενού συνόλου K , $\langle K \rangle \subseteq V$ είναι ίσο με την τομή όλων των υπόχωρων του V , καθένας εκ των οποίων περιέχει το K .
11. Το μόνο που μένει είναι η περίπτωση $K = \emptyset$. Στην περίπτωση αυτή αναγκαστικά έχουμε ότι $\langle \emptyset \rangle = \{0_V\}$. Γιατί;

Ακόμη μία Άσκηση

1. Δίνεται ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}_2[x]$ των τριωνύμων με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή $\mathbb{R}_2[x] = \{\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Να εξετάσετε εάν το σύνολο $\{1+x, 1+2x, 1+x^2, 1+2x^2\}$ παράγει τον διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}_2[x]$.²

²Είναι η άσκηση 1 της παραγράφου 3.3 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος Α».

2.4 Γραμμική Ανεξαρτησία

Πορεία μελέτης

1. Δείτε χρήσιμες πληροφορίες για τη θεωρία συνόλων [εδώ](#).
2. Δείτε προσεκτικά τους ορισμούς 3.4.2 και 3.4.3 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος A». Πρόκειται για τους ορισμούς των γραμμικά ανεξάρτητων και γραμμικά εξαρτημένων διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου.
3. Δείτε επίσης πολύ προσεκτικά τον ορισμό 3.4.9 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος A». Είναι ο ορισμός της **βάσης** ενός διανυσματικού χώρου. Η έννοια της βάσης ενός διανυσματικού χώρου είναι από τις πιο σημαντικές στη Γραμμική άλγεβρα.³
4. Ας δούμε λίγο πιο αναλυτικά τα παραπάνω. Ξεκινάμε με ένα ορισμό:

Ορισμός 2.4.1. Τα στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ του διανυσματικού χώρου V επί του \mathbb{F} θα λέγονται **γραμμικά εξαρτημένα** αν υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$, όχι όλοι μηδέν έτσι ώστε:

$$\lambda_1 \cdot \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \alpha_2 + \dots + \lambda_k \cdot \alpha_k = \mathbf{0}$$

5. Δες τους ορισμούς 3.4.2 και 3.4.3 ξανά από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος A» για την γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων.
6. Δες **όλα** τα παραδείγματα 3.4.4 από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος A».
7. Δείτε τον ορισμό της βάσης ενός διανυσματικού χώρου από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική άλγεβρα Τόμος A».
8. Δείτε πληροφορίες για τις βάσεις ενός διανυσματικού χώρου και από τη διεύθυνση [εδώ](#).
9. Δείτε και ακούστε από βίντεο τη διάλεξη του καθηγητή G.Strang [εδώ](#).

Άσκηση

Δίνεται ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}_2[x]$ των τριωνύμων με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή $\mathbb{R}_2[x] = \{\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. Να εξετάσετε εάν το σύνολο $\{1 + x, 1 + 2x, 1 + x^2, 1 + 2x^2\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{R}_2[x]$. Να βρεθούν επίσης δύο βάσεις του χώρου αυτού.

³Στη φυσική αντί για βάση μιλάμε για **σύστημα αναφοράς**.

2.5 Βάση διανυσματικού χώρου

Συνεχίζουμε με τη μελέτη των βάσεων ενός διανυσματικού χώρου.

Πορεία μελέτης

1. Δείτε ξανά τον ορισμό της βάσης ενός διανυσματικού χώρου από το βιβλίο «Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα Τόμος Α», ορισμός 3.4.9.
2. Δείτε επίσης και τον ορισμό της βάσης από [εδώ](#).
3. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο διανυσματικός χώρος V παράγεται από ένα στοιχείο το α , $\alpha \neq 0$ και ας αναρωτηθούμε αν είναι δυνατόν ο V να έχει δύο στοιχεία β και γ γραμμικά ανεξάρτητα.

Αν είχε, τότε θα είχαμε ότι

$$\beta = \lambda_1 \cdot \alpha$$

και

$$\gamma = \lambda_2 \cdot \alpha$$

Αν $\lambda_1 = 0$, τότε και $\beta = 0$. Αλλά αυτό είναι άτοπο, διότι το μηδενικό στοιχείο δεν μπορεί να συμπεριλαμβάνεται σε σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων στοιχείων, διότι αν $\beta = 0$ τότε θα είχαμε το γραμμικό συνδυασμό $1 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma = 0$, άτοπο. Άρα $\lambda_1 \neq 0$. Ομοίως $\lambda_2 \neq 0$.

Θεωρούμε τώρα τον γραμμικό συνδυασμό $\lambda_2 \cdot \beta + (-\lambda_1) \cdot \gamma$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda_2 \cdot \beta + (-\lambda_1) \cdot \gamma = 0$$

χωρίς οι συντελεστές να είναι μηδέν, άρα το σύνολο $\{\beta, \gamma\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Συμπέρασμα : Πάντα σε ένα διανυσματικό χώρο V , που παράγεται από ένα στοιχείο, ένα σύνολο δύο στοιχείων του είναι γραμμικά εξαρτημένο.

4. Σωστά το μαντέψατε!! Το επόμενο βήμα είναι:

Πάντα σε ένα διανυσματικό χώρο V , που παράγεται από δύο στοιχεία, ένα σύνολο τριών στοιχείων του είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Αποδεικνύουμε σήμερα ένα «ενδιάμεσο» θεώρημα, το οποίο περιέχει την βασική ιδέα της απόδειξης του θεμελιώδους θεωρήματος:

Σε ένα διανυσματικό χώρο V , ο οποίος παράγεται από μ το πλήθος στοιχεία δεν υπάρχουν $\mu + 1$ γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία.

5. Αποδεικνύουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.5.1. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος, ο οποίος παράγεται από δύο στοιχεία του. Τότε κάθε υποσύνολο A του V με τρία στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Απόδειξη: Έστω α και β δύο στοιχεία⁴ του V , που τον παράγουν, δηλαδή $V = \langle \alpha, \beta \rangle$. Έστω $A = \{\gamma, \delta, \epsilon\}$ ένα σύνολο τριών στοιχείων του V .

5. 1. Επειδή ο χώρος παράγεται από τα α και β έχουμε ότι υπάρχουν συντελεστές κ και λ με $\gamma = \kappa \cdot \alpha + \lambda \cdot \beta$

⁴Συνήθως ένα στοιχείο κάθε διανυσματικού χώρου το λέμε και **διάνυσμα**.

5. 2. Αν $\kappa = \lambda = 0$, τότε το διάνυσμα γ του χώρου V , είναι το μηδενικό διάνυσμα. Έτσι το σύνολο A περιλαμβάνει και το μηδενικό διάνυσμα γ και έτσι έχουμε το γραμμικό συνδυασμό $1 \cdot \gamma + 0 \cdot \delta + 0 \cdot \epsilon = 0$. Ο γραμμικός αυτός συνδυασμός δεν έχει όλους τους συντελεστές μηδέν, όμως το αποτέλεσμα είναι μηδέν. Άρα στην περίπτωση αυτή το σύνολο A δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, είναι γραμμικά εξαρτημένο.
5. 3. Στην περίπτωση που κάποιο από τα κ, λ είναι διαφορετικό από το 0 , επιλέγουμε π.χ να είναι $\kappa \neq 0$. Τότε έχουμε $\alpha = \frac{1}{\kappa} \cdot \gamma - \frac{\lambda}{\kappa} \cdot \beta$. Τώρα κάθε γραμμικός συνδυασμός των α και β είναι (με αντικατάσταση του α) γραμμικός συνδυασμός των γ και β .
5. 4. Είμαστε τώρα στη εξής θέση: Ο διανυσματικός χώρος V παράγεται από τα διανύσματα β και γ .
5. 5. Θεωρούμε τώρα το δ . Επειδή $\delta \in V$ και $\langle \beta, \gamma \rangle = V$ από το παραπάνω, έχουμε ότι υπάρχουν συντελεστές ξ_1, ξ_2 με

$$\xi_1 \cdot \beta + \xi_2 \cdot \gamma = \delta$$

5. 6. Αν $\xi_1 = \xi_2 = 0$, τότε και $\delta = 0$, οπότε στο σύνολο A έχουμε ένα στοιχείο το $\delta = 0$, άρα το A δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο σύμφωνα με το επιχείρημα στο σημείο 5. 2. Έτσι υποθέτουμε ότι κάποιο από τα ξ_1, ξ_2 είναι διαφορετικό του μηδενός. Έστω $\xi_1 \neq 0$. Τότε μπορούμε να λύσουμε ως προς β την παραπάνω σχέση, δηλαδή μπορούμε να γράψουμε το β ως γραμμικό συνδυασμό των γ και δ .
5. 7. Ως τώρα αποδείξαμε ότι **κάθε** γραμμικός συνδυασμός των α και β , άρα κάθε στοιχείο του V , γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των γ και δ .
5. 8. Συνεχίζουμε με το ϵ . Αφού το ϵ είναι στοιχείο του V , θα υπάρχουν λ_1, λ_2 συντελεστές με $\lambda_1 \cdot \gamma + \lambda_2 \cdot \delta = \epsilon$. Καταλήγουμε στον γραμμικό συνδυασμό

$$\lambda_1 \cdot \gamma + \lambda_2 \cdot \delta + (-1)\epsilon = 0.$$

Καταλήγουμε έτσι σε ένα γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του συνόλου $A = \{\gamma, \delta, \epsilon\}$, ο οποίος είναι μηδέν, χωρίς να είναι όλοι οι συντελεστές μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι το A είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Ασκήσεις για λύση

- Έστω V ένας διανυσματικός χώρος που παράγεται από δύο στοιχεία α και β . Δείξτε ότι οποιεσδήποτε βάσεις του V έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.
- Δείξτε ότι το σύνολο λύσεων Λ του γραμμικού συστήματος

$$\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 0 \\ 2x + 4y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

είναι ένας υπόχωρος του \mathbb{R}^3 . Βρείτε επίσης μία βάση αυτού.

- Να βρεθεί η μορφή όλων των γραμμικών συστημάτων 3 εξισώσεων με αγνώστους x, y, z , των οποίων το σύνολο λύσεων είναι το Λ , που βρήκατε στην προηγούμενη άσκηση. Να βρεθεί ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας ενός από τα συστήματα που βρήκατε.
- Δίνεται ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}_2[x]$ των τριωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Βρείτε μία βάση αυτού. Εξετάστε εάν τα τριώνυμα $f_1(x) = 2x + 5, f_2(x) = 2x^2 + 5, f_3(x) = x^2 + x, f_4(x) = x^2 - 1$ είναι γραμμικά εξαρτημένα. Μετά να εξετάσετε αν 4 οποιαδήποτε τριώνυμα είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα.

5. 5. 1. Να βρεθεί το σύνολο λύσεων του παρακάτω γραμμικού⁵ συστήματος :

$$x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -1$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3$$

5. 2. Δίνονται⁶ τα στοιχεία $(2, 1, 0, 3)$ και $(2, 1, 0, 4)$ του διανυσματικού χώρου $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. Να βρεθούν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^4$, έτσι ώστε το σύνολο των στοιχείων $(2, 1, 0, 3), (2, 1, 0, 4), \alpha, \beta$ να είναι βάση του \mathbb{R}^4 .

Άσκηση 2.5.2. Να βρεθεί η μορφή των υπόχωρων του Διανυσματικού χώρου $(\Delta^2, +, \cdot)$.

Σημειώνεται ότι ο Διανυσματικός χώρος $(\Delta^2, +, \cdot)$ περιέχει όλα τα διανύσματα του επιπέδου με κοινή αρχή κάποιο σημείο.

⁵Το θέμα αυτό είχε τεθεί σε εξετάσεις.

⁶Το θέμα αυτό είχε τεθεί σε εξετάσεις.

2.6 Διάσταση διανυσματικού χώρου

Πορεία μελέτης

Παρατήρηση 2.6.1. Αν $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ ένα υποσύνολο του διανυσματικού χώρου V , το οποίο περιέχει το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$, τότε το A είναι γραμμικά εξαρτημένο, δηλαδή δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Αυτό αποδεικνύεται ως εξής:

Χωρίς λάθος μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\alpha_1 = \mathbf{0}$. Τότε όμως μπορούμε να γράψουμε τον γραμμικό συνδυασμό

$$1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 + \dots + 0 \cdot \alpha_k$$

Ο τελευταίος γραμμικός συνδυασμός είναι μηδέν, χωρίς να είναι μηδέν όλοι οι συντελεστές. Σύμφωνα με τον ορισμό το σύνολο A είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Θεώρημα 2.6.2. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του \mathbb{F} , ο οποίος παράγεται από n στοιχεία του. Τότε κάθε υποσύνολο A του V με $n + 1$ στοιχεία του χώρου V είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Απόδειξη: Έστω $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ένα σύνολο διανυσμάτων⁷ τα οποία παράγουν τον χώρο, δηλαδή **κάθε** στοιχείο του χώρου, γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A . Έστω τώρα $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}\}$, $n + 1$ διανύσματα του χώρου. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο B είναι γραμμικά εξαρτημένο. Το στοιχείο β_1 ανήκει στο χώρο και αφού ο χώρος παράγεται από το σύνολο A , θα υπάρχουν συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ με

$$\lambda_1 \cdot \alpha_1 + \dots + \lambda_n \cdot \alpha_n = \beta_1$$

Αν όλοι οι συντελεστές είναι μηδέν, τότε και $\beta_1 = \mathbf{0}$, άρα το σύνολο B είναι γραμμικά εξαρτημένο, αφού περιέχει το $\mathbf{0}$.

Έστω τώρα ότι δεν είναι όλοι οι συντελεστές μηδέν. Χωρίς λάθος θεωρούμε ότι $\lambda_1 \neq 0$ αλλάζοντας αν χρειάζεται τη σειρά των $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Τότε όμως μπορούμε να λύσουμε την τελευταία σχέση ως προς α_1 και να έχουμε

$$\alpha_1 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \beta_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \alpha_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \cdot \alpha_n$$

Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι το διάνυσμα α_1 είναι γραμμικός συνδυασμός των $\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Λοιπόν έχουμε:

1. Κάθε στοιχείο του V είναι γραμμικός συνδυασμός των $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
2. Το α_1 είναι γραμμικός συνδυασμός των $\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
3. Άρα **κάθε** στοιχείο του V είναι γραμμικός συνδυασμός των $\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, δηλαδή ο χώρος V παράγεται από τα $\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ή όπως γράφουμε $V = \langle \beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$.

Με την ίδια λογική, όπως παραπάνω το διάνυσμα β_2 θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\beta_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ άρα

$$\beta_2 = \xi_1 \cdot \beta_1 + \xi_2 \cdot \alpha_2 + \xi_3 \cdot \alpha_3 + \dots + \xi_n \cdot \alpha_n \quad (\star)$$

⁷έχουμε πεί ότι τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου τα λέμε και **διανύσματα**.

Υπάρχουν οι παρακάτω περιπτώσεις:

1. $\xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \dots = \xi_n = 0$. Τότε $\beta_2 = \xi_1 \cdot \beta_1$. Το τελευταίο σημαίνει ότι το σύνολο $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}\}$, είναι γραμμικά εξαρτημένο, διότι υπάρχει ο γραμμικός συνδυασμός

$$\xi_1 \cdot \beta_1 + (-1) \cdot \beta_2 + 0 \cdot \beta_3 + \dots + 0 \cdot \beta_{n+1} = 0$$

2. Αν κάποιο από τα $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_{n+1}$ είναι διαφορετικό από το μηδέν, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\xi_2 \neq 0$, αλλάζοντας τη σειρά αν χρειάζεται των $\alpha_2, \dots, \alpha_n$. Το τελευταίο σημαίνει ότι το α_2 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\beta_1, \beta_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$.

Τελικά η πορεία είναι ως εξής: είτε σε κάποιο ενδιάμεσο στάδιο έχουμε ότι το B είναι γραμμικά εξαρτημένο είτε «διώχνουμε» ένα-ένα τα $\alpha_i, i = 1, 2, \dots$ και βάζουμε στη θέση τους $\beta_i, i = 1, 2, 3, \dots$. Στο τέλος, δηλαδή όταν διώχνουμε το α_n και βάλουμε στη θέση του το β_n , τα $\alpha_i, i = 1, 2, \dots$ τελειώνουν και έχουμε ότι τα $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ παράγουν το χώρο V . Όμως υπάρχει και το β_{n+1} . Αυτό θα γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$\beta_{n+1} = \mu_1 \cdot \beta_1 + \mu_2 \cdot \beta_2 + \dots + \mu_n \cdot \beta_n$$

ή

$$\mu_1 \cdot \beta_1 + \mu_2 \cdot \beta_2 + \dots + \mu_n \cdot \beta_n + (-1)\beta_{n+1} = \mathbf{0}$$

και τελικά σε κάθε περίπτωση το σύνολο B είναι γραμμικά εξαρτημένο.

1. Θυμηθείτε τον ορισμό για τη γραμμική εξάρτηση και ανεξαρτησία διανυσμάτων από την παράγραφο [2.4.1](#).
2. Αποδεικνύουμε την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 2.6.3. (α) Έστω A και B δύο υποσύνολα ενός διανυσματικού χώρου V επί του \mathbb{F} και $A \subseteq B$. Εάν το A είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε και το B είναι γραμμικά εξαρτημένο.

(β) Έστω A και B δύο υποσύνολα ενός διανυσματικού χώρου επί του \mathbb{F} και $A \subseteq B$. Εάν το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε και το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Απόδειξη:

- (α) Ας υποθέσουμε ότι το A είναι γραμμικά εξαρτημένο σύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου V επί του \mathbb{F} . Θα υπάρχουν τότε στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in V$ και συντελεστές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$, όχι όλοι μηδέν με

$$\lambda_1 \cdot \alpha_1 + \lambda_2 \cdot \alpha_2 + \dots + \lambda_n \cdot \alpha_n = \mathbf{0}$$

Όμως τα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in V$ δεν είναι μόνο στοιχεία του A αλλά και του B . Σύμφωνα με τον ορισμό θα είναι και το B γραμμικά εξαρτημένο σύνολο.

- (β) Το σύνολο A έχει δύο δυνατότητες. Είτε να είναι γραμμικά ανεξάρτητο είτε να είναι γραμμικά εξαρτημένο. Η ισχύς της μίας δυνατότητας αποκλείει την άλλη. Αν το A είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε και το σύνολο B , που περιέχει το A , θα είναι γραμμικά εξαρτημένο, άτοπο από την υπόθεση. Έτσι η μοναδική δυνατότητα που απομένει είναι να είναι το A γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

3. Αποδεικνύουμε επίσης την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 2.6.4. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του \mathbb{F} . Έστω επίσης

(α) A ένα υποσύνολο του V το οποίο παράγει τον χώρο, δηλαδή $V = \langle A \rangle$. Ως υπενθύμιση σημειώνουμε ότι αυτό σημαίνει, **το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών του συνόλου A είναι όλος ο χώρος V** . Επί πλέον έστω ότι το A έχει n το πλήθος στοιχεία.

(β) B ένα υποσύνολο του διανυσματικού χώρου V , γραμμικά ανεξάρτητο με μ το πλήθος στοιχεία.

Συμπέρασμα: $\mu \leq n$

Απόδειξη: Έστω ότι δεν ισχύει $\mu \leq n$. Τότε θα ισχύει η σχέση $\mu > n$. Το τελευταίο σημαίνει ότι στο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο B υπάρχουν τουλάχιστον $n + 1$ στοιχεία. Διαλέγουμε, λοιπόν ένα σύνολο $n + 1$ στοιχείων του B . Σύμφωνα με την πρόταση 2.6.3 το σύνολο αυτό θα είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άτοπο από το θεώρημα 2.6.2.

4. Αποδεικνύουμε και το επόμενο θεώρημα:

Θεώρημα 2.6.5. Έστω B_1 και B_2 δύο βάσεις ενός διανυσματικού χώρου V επί του \mathbb{F} . Έστω επίσης ότι τα σύνολα B_1 και B_2 είναι πεπερασμένα.

Συμπέρασμα: Το πλήθος των στοιχείων της βάσης B_1 είναι ίσο με το πλήθος των στοιχείων της βάσης B_2 .

Απόδειξη: Έστω ότι το B_1 έχει μ στοιχεία και το B_2 έχει n στοιχεία. Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο του V είναι βάση εάν:

(α) Παράγει τον χώρο V .

(β) Είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Τώρα το B_1 παράγει τον χώρο και το B_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Άρα $n \leq \mu$ σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση. Αντιστρέφοντας τους ρόλους των B_1 και B_2 βρίσκουμε $\mu \leq n$ και τελικά έχουμε $\mu = n$.

Ορισμός 2.6.6. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του \mathbb{F} . Εάν μία βάση του είναι πεπερασμένη και έχει n στοιχεία, τότε και κάθε άλλη βάση του είναι πεπερασμένη και έχει n στοιχεία.

Τον αριθμό των στοιχείων μιας οποιασδήποτε βάσης τον λέμε **διάσταση του χώρου** και τον συμβολίζουμε με $\dim_{\mathbb{F}} V$.

Ασκήσεις

Άσκηση 2.6.7. Να βρεθεί η διάσταση του χώρου των πινάκων $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Βρείτε επίσης και μία βάση του.

Άσκηση 2.6.8. Να βρεθεί η διάσταση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ των μιγαδικών επί των πραγματικών.

Άσκηση 2.6.9. Να βρεθεί η διάσταση του διανυσματικού χώρου $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ των μιγαδικών επί των μιγαδικών.

Άσκηση 2.6.10. Εξετάστε εάν 4 οποιαδήποτε γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του χώρου των πινάκων $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ αποτελούν βάση αυτού.

Άσκηση 2.6.11. Εξετάστε εάν 4 οποιαδήποτε στοιχεία του χώρου των πινάκων $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, τα οποία τον παράγουν αποτελούν βάση αυτού.

2.7 Θεώρημα ανταλλαγής - Θεώρημα επέκτασης

Πορεία μελέτης

Θεώρημα 2.7.1 (Θεώρημα ανταλλαγής). Έστω $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ και $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu\}$, δύο υποσύνολα του διανυσματικού χώρου V επί του \mathbb{F} με τις ιδιότητες:

1. Το σύνολο A παράγει το χώρο.
2. Το σύνολο B είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Τότε έχουμε τα εξής:

1. $n \geq \mu$.
2. Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να αφαιρέσουμε από το σύνολο A τα διανύσματα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu$ και να τα αντικαταστήσουμε με τα

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu, \alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_n$$

με αποτέλεσμα ο χώρος V , να εξακολουθεί να παράγεται από αυτά, δηλαδή

$$\langle \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu, \alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_n \rangle = V$$

Απόδειξη: Το πρώτο μέρος του θεωρήματος το έχουμε αποδείξει στην πρόταση 2.6.4. Το δεύτερο μέρος προκύπτει από την απόδειξη του θεωρήματος 2.6.2.

Δείτε εδώ και το σχετικό βίντεο. Το βίντεο μπορείτε να το δείτε με σχόλια στο YouTube σε δύο μέρη: [Πρώτο μέρος εδώ](#) και [δεύτερο μέρος εδώ](#)

Θεώρημα 2.7.2 (Θεώρημα επέκτασης). Έστω V ένας διανυσματικός χώρος επί του \mathbb{F} , πεπερασμένης διάστασης n και $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu\}$ ένα σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων του V . Τότε το B επεκτείνεται σε μία βάση του V , δηλαδή υπάρχουν διανύσματα $\alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_n$ έτσι ώστε το σύνολο

$$\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu, \alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_n\}$$

να είναι μία βάση του χώρου.

Απόδειξη: Αφού ο χώρος έχει πεπερασμένη διάσταση, θα υπάρχει ένα σύνολο $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$, το οποίο είναι βάση. Ως βάση του χώρου, παράγει τον V . Από την άλλη μεριά το σύνολο $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu\}$ είναι ένα σύνολο γραμμικά ανεξαρτήτων διανυσμάτων του V . Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα 2.7.1, μπορούμε να προσαρτήσουμε στο σύνολο $B = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu\}$ κάποια διανύσματα του A έτσι ώστε το σύνολο

$$\Gamma = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu, \alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots, \alpha_n\}$$

να παράγει το χώρο. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο αυτό είναι και γραμμικά ανεξάρτητο, άρα τελικά είναι βάση.

Έστω ότι το Γ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, δηλαδή είναι γραμμικά εξαρτημένο. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν συντελεστές $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{F}$, όχι όλοι μηδέν έτσι ώστε

$$\xi_1 \cdot \beta_1 + \xi_2 \cdot \beta_2 + \dots + \xi_\mu \cdot \beta_\mu + \xi_{\mu+1} \cdot \alpha_{\mu+1} + \xi_{\mu+2} \cdot \alpha_{\mu+2} + \dots + \xi_n \cdot \alpha_n = \mathbf{0}$$

Αφού δεν είναι όλοι οι συντελεστές μηδέν, μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\xi_1 \neq 0$. Τότε η παραπάνω εξίσωση λύνεται ως προς β_1 . Ακολουθώντας τις ιδέες της πρότασης [2.6.3](#) διαπιστώνουμε ότι ο χώρος (αφού αφαιρέσουμε το β_1), παράγεται από $n - 1$ διανύσματα. Όμως έχουμε ότι η διάσταση του χώρου είναι n , άρα στο χώρο υπάρχουν n γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα, άτοπο από το θεώρημα της ανταλλαγής [2.7.1](#). Τελικά το σύνολο Γ είναι και γραμμικά ανεξάρτητο (το ότι παράγει το χώρο το έχουμε ήδη βρεί) και άρα είναι βάση.