

# Η ΨΕΥΔΑΙΣΘΗΣΗ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΕΛΛΗΝΕΣ ΜΑΘΗΤΕΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΚΑΙ ΛΥΚΕΙΟΥ: ΟΤΑΝ Η ΓΝΩΣΗ ΥΠΑΡΧΕΙ, ΑΛΛΑ ΔΕΝ ΕΝΕΡΓΟΠΟΙΕΙΤΑΙ

Κωνσταντίνος Κοντογιαννόπουλος & Ξένια Βαμβακούση

Πανεπιστήμιο Αθηνών

kkontog@sch.gr / xenva@phs.uoa.gr

Μελετήσαμε το φαινόμενο της «κατάχρησης της γραμμικότητας» σε παιδιά Γ' Γυμνασίου και Β' Λυκείου. Υποθέσαμε ότι και οι δύο ηλικιακές ομάδες θα έκαναν γραμμικά λάθη σε μη γραμμικά προβλήματα, σαν αυτά που συνδέονται με τη μεταβολή της επιφάνειας επίπεδων σχημάτων όταν μεταβάλλεται το μήκος των πλευρών τους, ακόμα και όταν διαθέτουν τη σχολική γνώση που απαιτείται για την αντιμετώπισή τους (π.χ. τους κατάλληλους τύπους) και παρότι μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν όταν το πλαίσιο του ερωτήματος βοηθά την ενεργοποίησή της. Τα αποτελέσματά μας είναι σύμφωνα με την υπόθεσή μας και, επιπλέον, δείχνουν ότι δεν υπήρχαν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στις δύο ηλικιακές ομάδες.

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η γραμμικότητα, η συσχέτιση δηλαδή δυο μεγεθών μέσω μιας γραμμικής συνάρτησης  $f(x)=a \cdot x$  με  $a \neq 0$  είναι μια βασική έννοια στην μαθηματική εκπαίδευση, και από εκείνες που διδάσκονται οι μαθητές από νωρίς. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής είναι μια ευθεία γραμμή που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Οποιοιδήποτε δύο λόγοι μέσα σε αυτήν την γραμμική συνάρτηση παράγουν μια αναλογία. Δυο ουσιαστικές ιδιότητες των γραμμικών συναρτήσεων με τον τρόπο που ορίστηκαν παραπάνω, είναι οι:  $f(x+y)=f(x)+f(y)$  και  $f(k \cdot x) =k \cdot f(x)$  που θα αναφέρονται σαν προσθετική και πολλαπλασιαστική ιδιότητα, αντίστοιχα.

Οι γραμμικές-ανάλογες σχέσεις είναι επίσης από τις πλέον χρήσιμες στην καθημερινή ζωή, τα μαθηματικά, και τις άλλες επιστήμες. Στα χρόνια της βασικής εκπαίδευσης αποτελούν ένα μαθηματικό εργαλείο σημαντικό για την επίλυση προβλημάτων, όχι μόνο στο μάθημα των μαθηματικών αλλά και σε άλλα μαθήματα όπως αυτά της φυσικής και χημείας, ιδιαίτερα στα πρώτα χρόνια διδασκαλίας τους. Παρατηρείται όμως το φαινόμενο οι μαθητές να εφαρμόζουν τις γραμμικές σχέσεις και σε καταστάσεις όπου αυτές είναι ακατάλληλες (Freudenthal,1983 αναφ από De Bock κ.α., 2007). Το φαινόμενο αυτό αναφέρεται στην βιβλιογραφία σαν «ψευδαίσθηση της γραμμικότητας (*illusion of linearity*)», «παγίδα της γραμμικότητας (*linearity trap*)», «γραμμικό εμπόδιο (*linear obstacle*) », κ.λπ. (De Bock κ.α., 2007 σελ 4) Αν και οι προηγούμενοι όροι μπορεί να εμπεριέχουν λεπτές διαφοροποιήσεις, στην εργασία αυτή θα τους χρησιμοποιήσουμε σαν συνώνυμους. Με τον όρο «γραμμικά λάθη» αναφερόμαστε σε εκείνες τις περιπτώσεις, όπου κάποιο από αυτά

τα προαναφερθέντα χαρακτηριστικά και ιδιότητες της γραμμικότητας, εφαρμόζεται από τους μαθητές σε καταστάσεις όπου δεν είναι κατάλληλο. Η χρήση των γραμμικών συναρτήσεων και των ιδιοτήτων τους σε καταστάσεις πέρα από αυτές στις οποίες ισχύουν αναφέρεται και ως «*κατάχρηση της γραμμικότητας*».

Πέρα από τις πολλές ιστορικές αναφορές που είναι σχετικές με τέτοια λάθη, υπάρχουν πλούσια ερευνητικά ευρήματα που τεκμηριώνουν την κατάχρηση της γραμμικότητας από άτομα διάφορων ηλικιών, σε ποικίλες μαθηματικές περιοχές (De Bock κ.α., 2007 σελ 5). Το φάσμα των ηλικιών όπου έχουν ερευνητικά καταγραφεί γραμμικά λάθη συμπεριλαμβάνει πεντάχρονα παιδιά, πριν από οποιαδήποτε διδασκαλία στον γραμμικό συλλογισμό (Ebersbach κ.α., 2010) μέχρι φοιτητές πανεπιστημίου (Esteley κ.α., 2004, 2008; Villarreal κ.α., 2004) ή και δασκάλους (Hadjidemetriou κ.α., 2010). Χαρακτηριστικό πεδίο τέτοιων λαθών αποτελεί η επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με την επίδραση της αύξησης των μηκών ενός γεωμετρικού σχήματος στο εμβαδόν του και τον όγκο του. Έχει επίσης παρατηρηθεί η έντονη τάση να δίδονται γραμμικές λύσεις σε προβλήματα που διέπονται από μη γραμμικές μεταβολές (τετραγωνικές, εκθετικές, λογαριθμικές, κ.λ.π.), ή να αποδίδονται στις μεταβολές αυτές κάποιες γραμμικές ιδιότητες (Esteley κ.α. 2004, 2008; Villarreal κ.α., 2004). Μέσα από διαφορετικά πλαίσια ερμηνειών, τα λάθη αυτά σε κάποιες περιπτώσεις αποδίδονται σε μια στερεότυπη αντανάκλαστική συμπεριφορά (Tirosh & Stavy, 1999; Evans κ.α, 2003; Hatano, 1998, αναφ από De Bock κ.α., 2007), ενώ σε άλλες σε μια πιο συνειδητή εφαρμογή του γραμμικού μοντέλου (Brousseau 1997, αναφ από Modestou & Gagatsis 2007; Vosniadou κ.α 2001). Οι εκπαιδευτικές πρακτικές και οι συνήθειες και πεποιθήσεις που αυτές παράγουν, επίσης παίζουν ρόλο στο φαινόμενο της υπέρμετρης εμπιστοσύνης στη γραμμικότητα (De Bock κ.α, 2002). Φαίνεται όμως ότι μάλλον ενισχύουν, παρά εγκαθιστούν αυτήν την τάση. Τα χαρακτηριστικά του φαινομένου έτσι όπως καταγράφονται μέσα από την έρευνα, καταδεικνύουν τις διαισθητικές ρίζες του. Πράγματι, η κατάχρηση της γραμμικότητας εντοπίζεται στην έρευνα παγκοσμίως, ανεξάρτητα από τα συγκεκριμένα προγράμματα σπουδών ή τις εκπαιδευτικές πρακτικές (Van Dooren και κ.α, 2008; Greer, 2010). Οι De Bock, Van Dooren, Verschaffel, και Janssens παρατήρησαν ότι οι σπουδαστές που κάνουν τα γραμμικά λάθη απάντησαν πολύ γρήγορα και ήταν πολύ βέβαιοι για την ορθότητα της απάντησής τους, ενώ δεν κλονίζονταν όταν έρχονταν αντιμέτωποι με την ορθή άποψη. Η τάση κατάχρησης της γραμμικότητας είναι ανθεκτική και επιβιώνει της διδασκαλίας, ακόμα και όταν αυτή είναι στοχευμένη. Σε μελέτες που είχαν σαν στόχο να αξιολογήσουν μια σειρά παραγόντων που ίσως ευθύνονται για το φαινόμενο όπως ο τρόπος διδασκαλίας, η διατύπωση των προβλημάτων, η αυθεντικότητα των καταστάσεων που περιγράφονται στα προβλήματα, φάνηκε πως οποιαδήποτε προσπάθεια αντιμετώπισης των προηγούμενων παραγόντων είχε μάλλον προσωρινά αποτελέσματα. (De Bock κ.α., 2003) Χωρίς να υπάρχει μεγάλη διαφοροποίηση με την πάροδο του χρόνου, φαίνεται πως η απόδοση των μεγαλύτερων μαθητών στα μη γραμμικά προβλήματα είναι σχετικά καλύτερη από την επίδοση των νεότερων (De Bock κ.α, 1998, 2002; Vlahovic κ.α, 2010).

Στην παρούσα έρευνα μελετήσαμε το φαινόμενο της «κατάχρησης της γραμμικότητας» σε παιδιά Γ΄ Γυμνασίου και Β΄ Λυκείου. Υποθέσαμε ότι και οι δύο ηλικιακές ομάδες θα κάνουν γραμμικά λάθη σε μη γραμμικά προβλήματα, ακόμα και όταν διαθέτουν τη σχολική γνώση που απαιτείται για την αντιμετώπισή τους (π.χ. τους κατάλληλους τύπους) και παρά το γεγονός ότι μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν όταν το πλαίσιο του ερωτήματος τους βοηθά να την ενεργοποιήσουν. Αναμέναμε ότι τα μεγαλύτερα παιδιά θα είχαν καλύτερες επιδόσεις από τα μικρότερα.

## ΜΕΘΟΔΟΣ

### Συμμετέχοντες

Οι συμμετέχοντες ήταν 69 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και 70 μαθητές της Γ΄ Λυκείου, από σχολεία του νομού Αργολίδος.

### Υλικά

Σχεδιάσαμε ένα ερωτηματολόγιο με δύο μέρη. Στο 1<sup>ο</sup> μέρος περιλαμβάνονταν γραμμικά και μη γραμμικά έργα, τα οποία είχαν την μορφή προβλήματος. Οι μαθητές έπρεπε να επιλέξουν την απάντηση που θεωρούν σωστή και να αιτιολογήσουν την επιλογή τους. Το 2<sup>ο</sup> μέρος περιελάμβανε έργα που εξέταζαν τη γνώση των τύπων που χρειάζονταν στο πρώτο μέρος, καθώς και έργα που εξέταζαν κατά πόσο τα παιδιά μπορούν να αποφανθούν λεκτικά για τις μεταβολές εκείνες που διέπουν τα προβλήματα του 1ου μέρους. Όλα τα έργα ήταν κλειστού τύπου με ερωτήσεις σωστού λάθους ή πολλαπλής επιλογής.

Από τα έργα του 1ου μέρους τα Q1α (γραμμικό), Q1β (μη γραμμικό) αφορούσαν τη μεταβολή στην περίμετρο και το εμβαδόν αντίστοιχα, ενός τετραγώνου, όταν τριπλασιάζεται το μήκος της πλευράς του. Τα έργα αυτά δόθηκαν με τη μορφή προβλημάτων, όπου ο στόχος δίνονταν έμμεσα.

Ένας κηπουρός φροντίζει δυο τετράγωνους κήπους. Η πλευρά του δεύτερου κήπου είναι τριπλάσια σε μήκος από την πλευρά του πρώτου.

α) Για να περιφράξει τον πρώτο κήπο, ο κηπουρός χρειάστηκε 60 ξύλινους πασσάλους. Πόσους πασσάλους θα χρειαστεί ώστε να περιφράξει με τον ίδιο τρόπο τον δεύτερο κήπο;

**A.** 240                      **B.** 360                      **Γ.** 180                      **Δ.** Άλλο:.....

β) Αν ο κηπουρός χρειάστηκε περίπου 400 γραμμάρια σπόρου για να φυτέψει γκαζόν στον πρώτο κήπο, πόσα περίπου γραμμάρια σπόρου θα χρειαστεί στον κήπο με την τριπλάσια πλευρά;

**A.** περίπου 1000γρ **B.** περίπου 3600γρ **Γ.** περίπου 1200 γρ **Δ.** Άλλο:.....

**Εξηγήστε γιατί:**.....

Το έργο Q2 αναφερόταν σε μια μεταβολή εκθετικής μορφής :

Μια ένωση καταναλωτών παρατήρησε ότι η τιμή ενός προϊόντος που παρέμενε σταθερή για πολλά χρόνια, αυξάνεται τώρα κάθε έτος κατά 20% σε σχέση με το προηγούμενο. Αν συνεχίσει με τον ίδιο ρυθμό, τότε η τιμή θα έχει διπλασιαστεί σε σχέση με την αρχική

- A: σε λιγότερα από 5 χρόνια  
 B: ακριβώς σε 5 χρόνια  
 Γ: σε περισσότερα από 5 χρόνια

**Εξηγήστε γιατί:**.....

Το έργο Q3 εξέταζε τη συνέπεια που έχει για το εμβαδόν ενός κύκλου ο διπλασιασμός της ακτίνας του.

Μια πιτσαρία προσφέρει δυο μεγέθη πίτσας κυκλικού σχήματος, ώστε το μεγάλο μέγεθος να έχει διπλάσια ακτίνα του μικρού. Ο Πέτρος αγόρασε 2 μικρές πίτσες. Η Μαρία αγόρασε μία μεγάλη. Αν και η τιμή του μεγάλου είναι διπλάσια της τιμής του μικρού τότε:

- α) Η αγορά του Πέτρου είναι πιο συμφέρουσα.  
 β) Η αγορά της Μαρίας είναι πιο συμφέρουσα.  
 γ) Η αγορά του Πέτρου και της Μαρίας συμφέρουν εξ ίσου

**Εξηγήστε γιατί:**.....

Στα έργα Q5α, Q5β εξεταζόταν η μεταβολή του εμβαδού και του ύψους ενός ισοπλεύρου τριγώνου κατά τον διπλασιασμό της πλευράς του.

Σε πολλές περιπτώσεις όπως στα Q2, Q3, από τους μαθητές δεν ζητήθηκε μια υπολογιστική απάντηση, αλλά μια κρίση σχετική με το αποτέλεσμα μιας μεταβολής.

Από το έργο του 2ου μέρους των ερωτηματολογίων, τα Q7α, Q7β, εξέταζαν τους τύπους της περιμέτρου και του εμβαδού του τετραγώνου, τα Q8α και Q8β τους τύπους για το μήκος του κύκλου και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου, ενώ τα Q9α, Q9β, Q10α, Q10β αφορούσαν λεκτικές περιγραφές για τις μεταβολές των προηγούμενων περιμέτρων και εμβαδών, όπως:

Αν η πλευρά ενός τετραγώνου μειωθεί στο μισό, τότε

- |   |   |   |
|---|---|---|
| α) η περίμετρός του θα μειωθεί στο μισό | Σ | Λ |
| β) το εμβαδόν του θα μειωθεί στο μισό   | Σ | Λ |

**Εξηγήστε γιατί:**.....

### Αποτελέσματα

Στον Πίνακα 1 φαίνεται ότι και οι δύο ηλικιακές ομάδες αντιμετώπισαν με επιτυχία τα γραμμικά έργα του 1<sup>ου</sup> μέρους του ερωτηματολογίου (στο σύνολο των απαντήσεων που δόθηκαν στα γραμμικά έργα ήταν σωστές 82% του Γυμνασίου και 77% του Λυκείου), σε αντίθεση με τα μη γραμμικά έργα (στο σύνολο των απαντήσεων που δόθηκαν στα μη γραμμικά έργα ήταν σωστές 23% του Γυμνασίου και 24% του Λυκείου).

		ΓΥΜΝΑΣΙΟ		ΛΥΚΕΙΟ	
		συχνότητα	ποσοστό	συχνότητα	ποσοστό
Γραμμικά έργα $Q_{1\alpha}, Q_{5\beta}$	λανθασμένες	20	14	24	17
	σωστές	113	82	107	77
	χωρίς απάντηση	5	4	9	6
Μη γραμμικά έργα $Q_{1\beta}, Q_2, Q_3, Q_{5\alpha}$	λανθασμένες	203	73	200	72
	σωστές	63	23	68	24
	χωρίς απάντηση	10	4	12	4

**Πίνακας 1: Επιδόσεις των δυο ομάδων στο σύνολο των γραμμικών και μη γραμμικών έργων του πρώτου μέρους του ερωτηματολογίου.**

Σχεδόν το σύνολο των λανθασμένων απαντήσεων στους μη γραμμικούς στόχους, οφείλονται σε εσφαλμένη υπόθεση γραμμικότητας. Συγκεκριμένα, από τις 491 λανθασμένες απαντήσεις που δόθηκαν στα προβλήματα που δεν ήταν γραμμικά, οι 466 (ποσοστό 95 %) στηρίζονταν σε κάποιον εσφαλμένο γραμμικό συλλογισμό. Στα επόμενα, όταν αναφερόμαστε σε λανθασμένες απαντήσεις, θα εννοούμε τις λανθασμένες γραμμικές.

Από τον Πίνακα 1 φαίνεται ότι η επίδοση των παιδιών της Β΄ Λυκείου στα μη γραμμικά έργα δε διαφέρει πολύ από αυτήν των παιδιών της Γ΄ Γυμνασίου. Υπολογίσαμε επίσης τη συνολική μέση επίδοση της κάθε ομάδας, βαθμολογώντας κάθε σωστή επιλογή με 2, κάθε λανθασμένη επιλογή με 1, ενώ τα ερωτήματα που δεν υπήρχε επιλογή με 0. Το κριτήριο Mann-Whitney U δεν έδειξε σημαντική διαφορά μεταξύ της μέσης επίδοσης στο Γυμνάσιο (μέση επίδοση: 1,391, τυπική απόκλιση: 0,242) και το Λύκειο (μέση επίδοση: 1,366, τυπική απόκλιση: 0,249),  $z = -1,414$ ,  $p = 0,159$ . Είναι χαρακτηριστική η πανομοιότυπη εικόνα των δυο ομάδων σε συγκεκριμένα έργα. Για παράδειγμα στο σχετικό ερώτημα με τη σπορά του τετράγωνου κήπου ( $Q_{1\beta}$ ) απάντησαν σωστά 9 από τους 69 μαθητές του Γυμνασίου και 8 από τους 70 του Λυκείου.

Οι πίνακες 2,3 αναφέρονται στις απαντήσεις στο 2<sup>ο</sup> μέρος του ερωτηματολογίου. Παρατηρούμε εδώ πολύ καλές επιδόσεις στα ερωτήματα που αφορούν τους τύπους, και λιγότερο καλές στα ερωτήματα που εξετάζουν κατά πόσο οι μαθητές μπορούν να αποφανθούν σε λεκτικό πλαίσιο για τις μεταβολές των προηγούμενων.

	ΓΥΜΝΑΣΙΟ	ΛΥΚΕΙΟ
περίμετρος τετραγώνου	79,7	90
εμβαδόν τετραγώνου	71	87.1

μήκος κύκλου	71	60
εμβαδόν κύκλου	82,6	82,9

**Πίνακας 2: Ποσοστά %των σωστών απαντήσεων των δυο ομάδων στα έργα του 2ου μέρους που αφορούσαν τη γνώση τύπων**

	ΓΥΜΝΑΣΙΟ	ΛΥΚΕΙΟ
μεταβολή περιμέτρου τετραγώνου	73,9	78,6
μεταβολή εμβαδού τετραγώνου	56,5	57,1
μεταβολή μήκους κύκλου	60,9	72,9
μεταβολή εμβαδού κύκλου	55,1	57,1

**Πίνακας 3: Ποσοστά %των σωστών απαντήσεων των δυο ομάδων στα έργα του 2ου μέρους που αφορούσαν λεκτικές περιγραφές για τις συνέπειες γραμμικών μεταβολών.**

Θέλοντας τώρα να ελέγξουμε κατά πόσο οι λανθασμένες γραμμικές απαντήσεις οφείλονταν σε ελλείψεις της απαιτούμενης τυπικής σχολικής γνώσης, αντιπαραβάλαμε τις απαντήσεις στα μη γραμμικά έργα του πρώτου μέρους (προβλήματα), με αυτές που δόθηκαν στα έργα εκείνα του δεύτερου μέρους, που αφορούσαν τους αντίστοιχους τύπους και τις αντίστοιχες λεκτικές περιγραφές. Το πρόβλημα  $Q_{1\beta}$  το αντιμετώπισε σωστά μόνο το 12,7% των μαθητών που ήξεραν τον τύπο του εμβαδού του τετραγώνου ( $Q_{7\beta}$ ), και το 16,4% αυτών που απάντησαν σωστά πως κατά τον υποδιπλασιασμό της πλευράς του τετραγώνου το εμβαδόν του δεν υποδιπλασιάζεται ( $Q_{9\beta}$ ). Ποσοστό 87% του συνόλου των μαθητών των δυο ομάδων Γυμνασίου και Λυκείου, σκεπτόμενοι γραμμικά, θεώρησαν λανθασμένα πως κατά τον τριπλασιασμό της πλευράς τριπλασιάζεται και το εμβαδόν, ή απάντησαν με ασαφή τρόπο πως «τριπλασιάζεται το τετράγωνο». Με διπλή αντιπαραβολή των προηγούμενων στοιχείων προκύπτει πως το 44,6% αυτών που έκαναν λανθασμένη γραμμική υπόθεση στο  $Q_{1\beta}$  είχαν απαντήσει σωστά και στα δυο αντίστοιχα ερωτήματα σχετικά με τον αντίστοιχο τύπο του εμβαδού  $Q_{7\beta}$  και τη λεκτική περιγραφή της μεταβολής  $Q_{9\beta}$ . Επίσης, στο ερώτημα  $Q_3$  όπου ζητήθηκε με έμμεσο τρόπο να συγκριθεί το εμβαδόν μιας κυκλικής πίτσας με αυτό που αντιστοιχεί σε δυο πίτσες με την μισή ακτίνα της αρχικής, κατάφερε να απαντήσει σωστά μόνο το 11,3% αυτών που γνώριζαν τον τύπο του εμβαδού του κύκλου ( $Q_{8\beta}$ ) και το 20,3% αυτών που μπόρεσαν να κρίνουν σωστά πως κατά τον δεκαπλασιασμό της ακτίνας ενός κύκλου το εμβαδόν του δεν δεκαπλασιάζεται ( $Q_{10a}$ ). Η πλειοψηφία των μαθητών των δυο ομάδων (86,6% του συνόλου των μαθητών των δυο ομάδων Γυμνασίου και Λυκείου) θεώρησε λανθασμένα πως η ποσότητα της μεγάλης πίτσας ισοδυναμεί με αυτή των δυο μικρών.



## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ- ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Τα αποτελέσματά μας, συμφωνώντας με τα ευρήματα των προηγούμενων ερευνών (π.χ. De Bock κ.α ,1998, 2002 ; Vlachovic κ.α. 2010), δείχνουν υψηλό ποσοστό επιτυχίας στα γραμμικά έργα, αλλά και την έντονη τάση των μαθητών να παρασύρονται σε λανθασμένες γραμμικές λύσεις, σε καταστάσεις που αυτές δεν ισχύουν. Το φαινόμενο αυτό δεν φαίνεται πως οφείλεται στην ανεπάρκεια της σχολικής μαθηματικής τους γνώσης. Στις περισσότερες από εκείνες τις περιπτώσεις όπου εσφαλμένα δόθηκαν γραμμικές λύσεις, υπήρχε η γνώση των απαιτούμενων μαθηματικών τύπων για την σωστή μη γραμμική λύση. Οι μαθητές ήταν σε θέση να ανακαλέσουν τους τύπους αυτούς, ακόμα και να περιγράψουν λεκτικά τις συνέπειες των συγκεκριμένων μεταβολών, όταν αυτό ήταν ρητώς ζητούμενο. Παρ' όλα αυτά, όταν επρόκειτο να λύσουν ένα πρόβλημα χωρίς την υπόδειξη να χρησιμοποιήσουν τους τύπους, έπεφταν στην «παγίδα» της γραμμικότητας. Φαίνεται πως αυτή η βάση γνώσεων που οικοδομείται μέσα στο σχολείο, αποδεικνύεται αδρανής όταν ζητείται στο πλαίσιο της επίλυσης προβλήματος. Η συμπεριφορά των μαθητών κατά την επίλυση προβλημάτων, είναι συνάρτηση επιφανειακών παραγόντων και χαρακτηρίζεται από αδυναμία αναγνώρισης των χαρακτηριστικών της κατάστασης του προβλήματος, και ενεργοποίηση της αντίστοιχης γνώσης. Στην αντανakλαστική αυτή συμπεριφορά συμβάλει και η εξοικείωσή τους με γραμμικές τεχνικές τόσο στα Μαθηματικά όσο και στο πλαίσιο άλλων μαθημάτων. Αυτό το είδος εμπειρίας που καλείται από τον Hatano «στερεότυπη εμπειρία» (Hatano, 1988), τους βοηθά μεν στο να είναι επιτυχείς κατά την επίλυση γραμμικών προβλημάτων, δεν τους καθιστά όμως ικανούς στο να διακρίνουν τις γραμμικές από τις μη γραμμικές καταστάσεις.

Με την σύγκριση των αποτελεσμάτων των δυο ομάδων του Γυμνασίου και του Λυκείου, και τη συναφή εικόνα που παρουσιάζουν γίνεται φανερό πως με την πάροδο των σχολικών χρόνων, το πρόβλημα δεν βελτιώνεται. Οι πεποιθήσεις για παράδειγμα πως κατά τον πολλαπλασιασμό της πλευράς του τετραγώνου ή της ακτίνα του κύκλου με έναν αριθμό πολλαπλασιάζεται και το αντίστοιχο εμβαδόν με τον ίδιο αριθμό, έχουν σχηματιστεί από πολύ νωρίς μέσα από σύνθετες διαδικασίες, και είναι τόσο βαθιά ριζωμένες, ώστε η διδασκαλία της ομοιότητας επιπέδων σχημάτων που ξεκινά από την Γ' Γυμνασίου και ολοκληρώνεται στην Β' Λυκείου, να μην μπορεί να τις εξοβελίσει. Παρά την διεξοδικότερη προσέγγιση των εννοιών αυτών στο Λύκειο και την εμπειρία που αποκτούν οι μαθητές του με πολλές άλλες μη γραμμικές μεταβολές (τριγωνομετρικές, εκθετικές κ.λ.π), το πρόβλημα λανθασμένης εφαρμογής γραμμικών λύσεων όχι μόνο δεν φαίνεται να βελτιώνεται, αλλά σε πολλές περιπτώσεις οι επιδόσεις της ομάδας του Λυκείου είναι χειρότερες (πίνακας 1). Ίσως κάποιες εξηγήσεις για αυτό προκύπτουν πρώτον από το γεγονός της υποβάθμισης του μαθήματος της Γεωμετρίας στο σημερινό Λύκειο και δεύτερον, από την εστίαση της διδασκαλίας των μαθηματικών μόνο σε εκείνες τις έννοιες και τεχνικές, που σχετίζονται περισσότερο με την επιτυχία στις τελικές εξετάσεις. Από διάφορους ερευνητές έχουν διατυπωθεί προτάσεις για τη βελτίωση της εκπαιδευτικής πρακτικής με κατευθυντήριες γραμμές την ενίσχυση της ικανότητας των μαθητών να

διακρίνουν τις γραμμικές από τις μη γραμμικές καταστάσεις και την βελτίωση της στάσης και των μαθητών, κατά την επίλυση προβλημάτων. (De Bock κ.α, 2007). Μερικές προτάσεις ως προς την πρώτη κατεύθυνση είναι η συζήτηση στην τάξη και αντιπαραβολή γραμμικών και μη γραμμικών καταστάσεων, η συμπερίληψη στα σχολικά βιβλία εναλλακτικών μορφών έργων όπως ταξινόμησης και επινόησης προβλημάτων και η έμφαση της διδασκαλίας στην έννοια της διάστασης μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις. Η αντιμετώπιση μιας σειράς λανθασμένων στάσεων και πεποιθήσεων σχετικά με την επίλυση λεκτικών προβλημάτων που έχουν διαμορφωθεί στα σχολικά χρόνια θα μπορούσε να συμβάλει στην ωριμότερη συμπεριφορά τους κατά την επίλυση προβλήματος. Ίσως όμως, το σημαντικότερο όπλο για τον περιορισμό της διολίσθησης της σκέψης σε γραμμικά μονοπάτια, είναι η ανάπτυξη της συνήθειας για αμφισβήτηση και μεταγνωστικό έλεγχο. Πρέπει σε κάθε περίπτωση που οι μαθητές καταπιάνονται με μαθηματικά προβλήματα, να έχουν κατά νου πως η πρώτη σκέψη δεν είναι πάντα η σωστή και απαιτείται επανέλεγχός της, ειδικά σε περιοχές για τις οποίες είναι ενήμεροι πως υπάρχει μεγάλη πιθανότητα λάθους.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D Verschaffel, L. & Janssens, D. (2007). *'The Illusion of Linearity From Analysis to Improvement'* (Mathematics Education Library). New York: Springer..
- De Bock, D., Verschaffel, L., & Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 65–83.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2002) Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*, 50(3), 311–334.
- Ebersbach M, Van Dooren Goudriaan M, Verschaffel (2010) Discriminating Non-linearity from Linearity: Its Cognitive Foundations in Five-Year-Olds *Mathematical Thinking and Learning*, 12: 1–16,
- Esteley, C., Villarreal, M., & Alagia, H. (2004). Extending linear models to non-linear contexts: An in-depth study about two university students' mathematical productions. In M. J. Hones & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 343–350). Bergen, Norway.
- Greer B (2010). Overview of the Papers: Why is Linear Thinking so Dominant? *Mathematical Thinking and Learning*, 12: 1–7.
- Hatano, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding. *New Directions for Child Development*, 41, 55–70.



- Hadjidemetriou C, Williams J (2010). The Linearity Prototype for Graphs: Cognitive and Sociocultural Perspectives *Mathematical Thinking and Learning*, 12: 1–18.
- Modestou, M., & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity." *Educational Psychology*, 27 (1), 75–92.
- Modestou M Gagatsis A. (2010) Cognitive and Metacognitive Aspects of Proportional Reasoning *Mathematical Thinking and Learning*, 12: 1–18
- Vlahovic-Stetic, Bernardic, Rajter (2010) Illusion of Linearity in Geometry: Effect in Multiple-Choice Problems. *Mathematical Thinking and Learning*, 12: 1–14
- Van Dooren, De Bock, Janssens, Verschaffel (2008) The Linear Imperative: An Inventory and Conceptual Analysis of Students' Overuse of Linearity *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 39
- Villarreal, M., Esteley, C., & Alagia, H. (2004). University students' extension of linear models to non-linear situations. In M. J. Høines & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 364). Bergen, Norway

