Η ΕΞΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΕΥΣΗ ΤΟΥ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΕ ΜΙΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

Παναγιώτης Σπύρου & **Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος**

Τμήμα Μαθηματικών, Ε.Κ.Π.Α. & Τ.Ε.Π.Α.Ε.Σ., Πανεπιστήμιο Αιγαίου

pspirou@math.uoa.gr & amoutsiosrentzos@aegean.gr

Σε αυτή την εργασία παρουσιάζεται μια διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος στη Β΄ Γυμνασίου που βασίζεται στην φαινομενολογική ιδέα της εξαντικειμενίκευσης. Η αξιολόγηση της διδασκαλίας βασίστηκε στη σύγκριση του τμήματος που έγινε η διδασκαλία με ένα άλλο τμήμα τόσο στο σχολικό τεστ, όσο και σε ένα ερωτηματολόγιο αξιολόγησης που κατασκευάστηκε για τις ανάγκες της έρευνας. Η ποσοτική ανάλυση υποστηρίζει τον ισχυρισμό ότι η διδακτική μας παρέμβαση επέτρεψε σε μαθητές και μαθήτριες ανεξαρτήτου επίδοσης στο σχολικό τεστ να αναπτύξουν ποιοτικές συνδέσεις που σχετίζονται με την εξαντικειμενίκευση του ορθογωνίου τριγώνου.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Διάφοροι ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών έχουν εφαρμόσει φαινομενολογικές ιδέες (Freudenthal, 1983· Brown & Haywood, 2011· Radford, 2003). Για παράδειγμα, η *ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση* (Gravemeijer, 1994) αντλεί από τη διδακτική φαινομενολογία του Freudenthal προτείνοντας μια διδακτική στρατηγική κατά την οποία οι μαθητές και οι μαθήτριες, μέσω 'αληθινών' για αυτούς δραστηριοτήτων, καθοδηγούνται στην *επανεπινόηση* ('guided reinvention') μαθηματικών εννοιών. Η φαινομενολογική οπτική που υιοθετείται σε αυτή την έρευνα έχει εννοιολογικές συνδέσεις με αυτές τις προσεγγίσεις, αλλά διαφοροποιείται σαφώς στην παραδοχή ότι το ανθρώπινο σώμα έχει αίσθηση της βαρύτητα κατά τον ίδιο τρόπο σε κάθε εποχή και άρα μπορεί να σχεδιαστεί διδασκαλία βασιζόμενη στη διαχρονικά αμετάβλητη αισθητηριακή αντίληψη με στόχο την *εξαντικειμενίκευση* ('objectification'· Husserl, 1989) του ορθογωνίου τριγώνου. Κατά τον Radford (2003), η εξαντικειμενίκευση αναφέρεται στην 'από-υποκειμενικοποίηση' ('desubjectification'), δηλαδή σε· «δράσεις που καθιστούν κάτι απρόσωπο» (σελ. 40) και η κατάδειξη του αντικειμένου γίνεται μέσω σημείων. Συμφωνώντας μερικώς με αυτή την άποψη, σε αυτή την έρευνα θεωρούμε ότι επιπροσθέτως αναδεικνύεται ταυτόχρονα και μια εσωτερική αναπαράσταση ως *ιδεατότητα* ('ideality'). Τα μαθηματικά δεν έχουν υλική υπόσταση, ούτε είναι παρατηρήσιμα. Νοούνται ως ιδεατότητες οι οποίες μπορούν να επικοινωνηθούν μόνο μέσω αναπαραστάσεων (Duval, 2006).

Επομένως, προτείνεται μια διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος η οποία θα διευκολύνει τους μαθητές και τις μαθήτριες να βιώσουν την 'μεταμόρφωση' της υποκειμενικής εμπειρίας της καθετότητας στην αντικειμενική μαθηματική ιδέα του ορθογωνίου τριγώνου (πρβλ. Spyrou, Moutsios-Rentzos & Triantafyllou, 2010). Βασιστήκαμε στον ισχυρισμό των Lappas και Spyrou (2006) ότι οι Πυθαγόρειες Τριάδες μπορεί να βοηθήσουν στη σύνδεση κιναισθητικών δράσεων με μαθηματικές ιδέες σχετικές με το Θεώρημα. Επιπροσθέτως, η εξαντικειμενίκευση είναι στενά συνδεδεμένη με μια σειρά γενικεύσεων (Radford, 2003). Επομένως, χρησιμοποιούμε μια αλληλουχία *προτύπων* ('prototypes'· Harel & Tall, 1991) της κατακόρυφου, της καθετότητας και των Τριάδων, με στόχο τη σταδιακή σύνδεση της βαρύτητας και της αίσθησης της κατακορύφου, με την καθετότητα, τις Τριάδες και το Θεώρημα. Σημειώνεται ότι η διδακτική παρέμβαση είναι αποτέλεσμα της επιλογής μας να είναι *συμπληρωματική* στην υπάρχουσα διδασκαλία (σύμφωνα με το αναλυτικό πρόγραμμα) και *εφαρμόσιμη* στην υπάρχουσα εκπαιδευτική πραγματικότητα.

Σε αυτή την εργασία παρουσιάζεται *μια διδασκαλία του Πυθαγορείου Θεωρήματος η οποία βασίστηκε στη φαινομενολογική ιδέα της εξαντικειμενίκευσης του ορθογωνίου τριγώνου και διερευνάται η αποτελεσματικότητά της*.

ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΑ ΕΞΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΕΥΣΗΣ

Σε αυτή την έρευνα, ανάμεσα στις διάφορες οπτικές για τη φύση των μαθηματικών αντικειμένων (Hart, 1996), υιοθετούμε την έννοια της *εξαντικειμενίκευσης* (Husserl, 1989). Οι Lappas και Spyrou (2006) διακρίνουν δύο επίπεδα εξαντικειμενίκευσης. Στο *1^{o} επίπεδο*, τα αποτελέσματα που πηγάζουν από την υποκειμενική εμπειρία εξαντικειμενικεύονται μέσω της αριθμητικής τους αναπαράστασης. Για παράδειγμα, η γνώση ότι τρία κομμάτια νήματος σχηματίζουν ορθογώνιο τρίγωνο εξαντικειμενικεύεται μέσω της σχέσης των αριθμών που δείχνουν το μήκος των τριών κομματιών. Συνεπώς, η *αριθμητική* έκφραση '$α^2 = b^2 + c^2$' (όπου a, b και c είναι τα μήκη των πλευρών ενός *συγκεκριμένου* ορθογωνίου τριγώνου) είναι μια αντικειμενική, αλλά επαγωγική περιγραφή, η οποία καταδεικνύει το 1^{ο} επίπεδο εξαντικειμενίκευσης του ορθογωνίου τριγώνου. Στο *2^{o} επίπεδο*, τα αρχετυπικά αποτελέσματα ενσωματώνονται σε μαθηματική θεωρία μέσω της αξιωματικής απόδειξης. Σε αυτό το επίπεδο, η *αλγεβρική* πλέον έκφραση '$α^2 = b^2 + c^2$' προκύπτει από παραγωγικούς συλλογισμούς εντός ενός αξιωματικού συστήματος και γίνεται αποδεκτό ως αληθές σε αυτό το αξιωματικό σύστημα (δηλαδή γίνεται θεώρημα). Μέσω των δύο επιπέδων εξαντικειμενίκευσης, το ορθογώνιο τρίγωνο σταδιακά απελευθερώνεται από τις αισθητηριακές, βιωματικές 'ρίζες' και γίνεται μια μη αυθαίρετη, ανθρωπολογικού χαρακτήρα διαχρονική αλήθεια.

Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΣΤΗ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Η διδακτική παρέμβαση είναι συμπληρωματική στην προβλεπόμενη διδασκαλία του Θεωρήματος στην Β΄ Γυμνασίου. Το Θεώρημα παρουσιάζεται μέσω μιας τρίωρης διδασκαλίας η οποία βασίζεται στην έννοια του εμβαδού (Βλάμος, Δρούτσας, Πρέσβης & Ρεκούμης, 2007). Οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να υπολογίσουν το εμβαδό δύο ίσων τετραγώνων που αποτελούνται από διαφορετικούς συνδυασμούς τετραγώνων και ορθογωνίων τριγώνων. Δεδομένου ότι δύο ίσα σχήματα έχουν το ίδιο εμβαδό, προκύπτει η βασική εξίσωση του Θεωρήματος. Έπειτα, διατυπώνονται το Θεώρημα και το αντίστροφό του.

Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗ

Διδακτικό πλαίσιο

Στο σχεδιασμό της διδακτικής παρέμβασης υιοθετούμε την άποψη του Husserl (1989) ότι η διδακτική παρέμβαση πρέπει να *συνδέεται με τον κόσμο που οι άνθρωποι βιώνουν*, εν αντιθέσει με την λογικο-παραγωγική διδασκαλία των γεωμετρικών εννοιών η οποία υποχρεώνει τους μαθητές και τις μαθήτριες «να αντιμετωπίσουν *έτοιμες* έννοιες και προτάσεις» (σελ. 169) χωρίς τη χρήση *προ-επιστημονικών υλικών* (‘prescientific materials’) αφαιρώντας έτσι από τη γεωμετρία το ‘αληθινό της νόημα’.

Επιπλέον, αν και η αναπαραγωγή της *ιστορικής εξέλιξης* μιας έννοιας είναι ενδεχομένως αδύνατη (Radford, 1997), μια αρχαία ιδέα με το κατάλληλο διδακτικό έργο προσαρμογής μπορεί να βρει εφαρμογή σε μια διδασκαλία συμβατή με τα σύγχρονα αναλυτικά προγράμματα (Arcavi & Isoda, 2007· Jankvist, 2009).

Κατά τον Duval (2006), το μαθηματικό αντικείμενο καταδεικνύεται από τη *σχέση* μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεών του και δεν ταυτίζεται με αυτές. Η γνώση προκύπτει από την ικανότητα των μαθητών και των μαθητριών να μεταφράζουν μεταξύ των διαφορετικών σημειωτικών συστημάτων που συνδέονται με την κάθε αναπαράσταση. Επιπλέον, ο Radford (2003) επισημαίνει ότι η εξαντικειμενίκευση είναι στενά συνδεδεμένη με μια σειρά γενικεύσεων. Βάσει αυτών και του διδακτικού πλαισίου των Harel και Tall (1991) που επισημαίνει την σημασία της αλληλουχίας κατάλληλων προτύπων για την επίτευξη κατάλληλων γενικεύσεων, είναι σημαντικό να συμπεριλάβουμε στον σχεδιασμό της διδασκαλίας κατάλληλα πρότυπα τα οποία συνδέονται με *διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα* (πρβλ. ‘τρεις κόσμοι των μαθηματικών’· Tall, 2004): *πραξιακά* (‘enactive’), *γεωμετρικά* και *αριθμητικά*.

Επιπροσθέτως, στο σχεδιασμό της διδασκαλίας είναι σημαντικό να ενσωματωθεί: α) Ο *αναστοχασμός* των μαθητών και μαθητριών τόσο *πάνω στη σκέψη* τους, όσο και *πάνω στη δράση* τους (‘αναστοχαστική δράση’· Τζεκάκη, 2011), β) Η δυνατότητα για *συζήτηση και τεκμηρίωση των απόψεων* από τους μαθητές και τις μαθήτριες, αφού η εξαντικειμενίκευση συμβαίνει μέσω του λόγου (προφορικού ή γραπτού), γ) Η δυνατότητα των μαθητών και μαθητριών για *έλεγχο* των σκέψεων και δράσεών τους.

Συνοπτικά, η διδακτική παρέμβαση δομείται βάσει *τριών αξόνων*: 1) Την επιλογή και αλληλουχία κατάλληλων προτύπων που συνδέονται με διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα, με τις λειτουργίες του κόσμου της πραγματικότητας, καθώς και με τα ιστορικά και νευροφυσιολογικά δεδομένα, 2) Την δημιουργία περιβάλλοντος στην τάξη που επιτρέπει στους μαθητές και τις μαθήτριες να αναστοχάζονται πάνω στις σκέψεις και στις δράσεις τους, να τις ελέγχουν και να τις επικοινωνούν, 3) Την συμβατότητα με το υπάρχον αναλυτικό πρόγραμμα και την εφαρμοσιμότητα στην υπάρχουσα εκπαιδευτική πραγματικότητα.

Πρότυπα

Για την επιλογή προτύπων, βασιστήκαμε σε δεδομένα από την νευροφυσιολογία και την ιστορία. Η βαρύτητα έχει επηρεάσει την εξέλιξη των αισθητηριακών και νευρικών συστημάτων τα οποία βοηθούν στην αναγνώριση ή την μοντελοποίηση της κατακόρυφου με σκοπό τη διατήρηση της όρθια στάσης που είναι κρίσιμη για την επιβίωση του ανθρώπου (Merfeld, Zupan & Peterka, 1999· Noback, Strominger, Demarest & Ruggiero, 2005). Δεδομένου ότι ο ορίζοντας και η κατακόρυφος ορίζουν μια 'φυσική' καθετότητα, ισχυριζόμαστε ότι ένα πραξιακό πρότυπο που την υλοποιεί θα βοηθήσει στην εξαντικειμενίκευση του ορθογωνίου τριγώνου.

Επιπροσθέτως, το Θεώρημα εμφανίζεται σε διάφορους πολιτισμούς και σε διάφορα στάδια ανάπτυξής του· για παράδειγμα, οι *Πυθαγόρειες Τριάδες* (Maor, 2007). Δεδομένου ότι η διδασκαλία του Θεωρήματος στο σχολείο βασίζεται στην έννοια του εμβαδού, ισχυριζόμαστε ότι οι Τριάδες είναι κατάλληλο αριθμητικό πρότυπο για τους σκοπούς της διδακτικής μας παρέμβασης. Επιπλέον, οι *σχηματικοί αριθμοί* μπορούν να αποτελέσουν αριθμητικό και γεωμετρικό πρότυπο των τετράγωνων αριθμών. Ισχυριζόμαστε ότι οι σχηματικοί τετράγωνοι αριθμοί μπορούν να βοηθήσουν στη *σύνδεση* των Τριάδων και της αριθμητικής έκφρασης του Θεωρήματος (που εντάσσονται στο αριθμητικό αναπαραστασιακό πλαίσιο) με το γεωμετρικό σχήμα ορθογώνιο τρίγωνο (που εντάσσεται στο γεωμετρικό αναπαραστασιακό πλαίσιο). Συνεπώς, κατά τον Duval (2006), οι σχηματικοί τετράγωνοι αριθμοί μπορούν να βοηθήσουν στην κατάδειξη του μαθηματικού αντικειμένου 'ορθογώνιο τρίγωνο' (στο $1^{ο}$ επίπεδο εξαντικειμενίκευσης, αφού αναφερόμαστε σε συγκεκριμένες αριθμητικές σχέσεις).

Δομή διδακτικής παρέμβασης

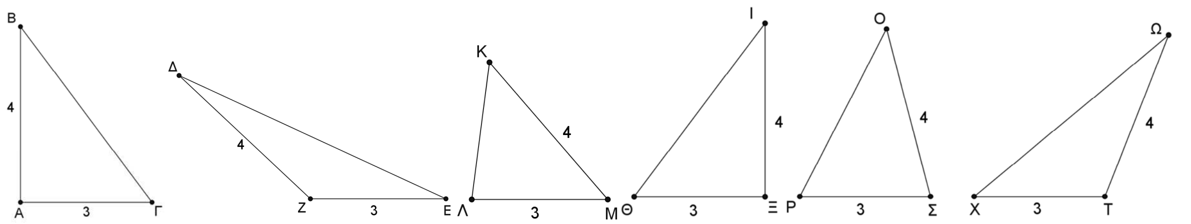
Η διδακτική παρέμβαση αυτής της έρευνας χωρίζεται σε *πέντε ενότητες*. Στην πρώτη ενότητα, η διδασκαλία γίνεται μέσω επίδειξης προς όλη την τάξη, ενώ στις επόμενες οι μαθητές και οι μαθήτριες λειτουργούν ομαδοσυνεργατικά ανά δυάδες στο θρανίο.

Στην *πρώτη ενότητα*, στον τρισδιάστατο χώρο και μέσω χειραπτικού υλικού στοχεύουμε, μέσω της Βασικής Πυθαγόρειας Τριάδας (3,4,5), στην σύνδεση της φυσικής καθετότητας με την καθετότητα και το ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές μήκος 3, 4 και 5. Χρησιμοποιούμε ένα δοχείο με χρωματισμένο υγρό, νήμα της στάθμης και τρεις ράβδους κατάλληλα χρωματισμένους που υλοποιούν την Βασική Τριάδα (Σχήμα 1). Αρχικά, συνδέεται οπτικά η 'φυσική' καθετότητα μεταξύ του νήματος της στάθμης με την επιφάνεια χρωματισμένου υγρού που ηρεμεί με το τριγωνικό πλαίσιο που σχηματίζουν οι τρεις ράβδοι. Στη συνέχεια, οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται με αυτές τις ράβδους να σχηματίσουν ένα τριγωνικό πλαίσιο στο πάτωμα που έχει την ίδια γωνία με την 'γωνία που σχηματίζεται μεταξύ της επιφάνειας του υγρού και του νήματος', καθώς και να την προσδιορίσουν στο πλαίσιο που σχημάτισαν. Γίνεται οπτικός έλεγχος των ισχυρισμών μεταφέροντας το τριγωνικού σχήματος πλαίσιο από το πάτωμα στον τοίχο. Κατόπιν, μεταβάλλουμε τη γωνία μεταξύ των ράβδων '3' και '4' (σε άμεση οπτική αντιδιαστολή με την 'φυσική καθετότητα της επιφάνειας του υγρού και του νήματος) με ερωτήσεις που απαιτούν τη σύνδεση του μήκους της ράβδου ‘5’ με το χαρακτηρισμό της γωνίας: ορθής (ίση με 5), οξείας (μικρότερης από 5) ή αμβλείας (μεγαλύτερης από 5).

Σχήμα 1: Στιγμιότυπα από την πρώτη ενότητα της διδακτικής παρέμβασης.

Στην *δεύτερη ενότητα*, μέσω ενός φύλλου εργασίας (Σχήμα 2), στοχεύουμε στις ίδιες ποιοτικές συνδέσεις μεταξύ της πλευράς μήκους 5 και της απέναντι γωνίας με την πρώτη ενότητα, αλλά αυτή τη φορά στον δισδιάστατο αναπαραστασιακό πλαίσιο του μαθηματικού συμβολισμού στο χαρτί. Επιπλέον, σε τρίγωνο πλευρών μήκους 3, 4 και 5, ζητείται η καταγραφή του ποιοτικού κανόνα που συνδέει το μήκος της πλευράς μήκους 5 με την γωνία μεταξύ των πλευρών μήκους 3 και 4.

Στα έξι παρακάτω τρίγωνα οι δύο πλευρές είναι 3 και 4. Να σημειώσεις το είδος της γωνίας (ορθή, οξεία, αμβλεία) που βρίσκεται ανάμεσά τους, να μετρήσεις την τρίτη πλευρά και να συμπληρώσεις τον πίνακα.



Τρίγωνο	ΑΒΓ	ΔΖΕ	ΛΜΚ	ΙΘΞ	ΟΡΣ	ΧΩΤ
Μήκος τρίτης πλευράς						
Είδος περιεχόμενης γωνίας						

Με βάση τον παραπάνω πίνακα στα τρίγωνα με πλευρές 3 και 4 μήπως παρατηρείς κάποια σχέση μεταξύ της γωνίας ανάμεσα στις πλευρές 3,4 και της τρίτης πλευράς;

Σχήμα 2: Παράδειγμα από το φύλλο εργασίας της δεύτερης ενότητας της παρέμβασης.

Στην *τρίτη ενότητα*, στοχεύουμε στην εύρεση Πυθαγορείων Τριάδων. Οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να προτείνουν Τριάδες, να διατυπώσουν υποθέσεις και κανόνες παραγωγής τέτοιων Τριάδων. Επιπροσθέτως, προτρέπονται στον έλεγχο αυτών των υποθέσεων στον κατάλληλο χώρο που προβλέπεται στο φύλλο εργασίας.

Στην *τέταρτη ενότητα*, εισάγονται οι *σχηματικοί τετράγωνοι αριθμοί* με στόχο να συνδεθεί ο αριθμός που αντιπροσωπεύει το μήκος της πλευρά ενός τριγώνου με τον αντίστοιχο σχηματικό τετράγωνο αριθμό. Βάσει αυτών, στο φύλλο εργασίας οι μαθητές και οι μαθήτριες εξοικειώνονται με τους σχηματικούς αριθμούς και προτρέπονται στην διατύπωση μιας σχέσης μεταξύ του πλήθους των ψηφίδων και του αντίστοιχου σχηματικού αριθμού. Επιπλέον, παρέχεται χειραπτικό υλικό εκατό ψηφίδων για τους μαθητές και τις μαθήτριες που θέλουν να το χρησιμοποιήσουν.

Με τη βοήθεια των προηγουμένων να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα.

ΤΡΙΑΔΕΣ ΜΗΚΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΑΡΙΘΜΟΙ			ΨΗΦΙΔΕΣ ΣΧΗΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ			
ΚΑΘΕΤΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ		ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ	ΚΑΘΕΤΕΣ ΠΛΕΥΡΕΣ		ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΑ	
3	4	5	9	16	25	

Σχήμα 3: Παράδειγμα από το φύλλο εργασίας της πέμπτης ενότητας της παρέμβασης.

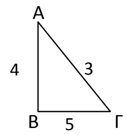
Στην *πέμπτη ενότητα*, στοχεύουμε στην διατύπωση του κανόνα ‘$5^2 = 3^2 + 4^2$’ ή της επαγωγικής αριθμητικής έκφρασης ‘$\alpha^2 = b^2 + c^2$’. Οι μαθητές και οι μαθήτριες καλούνται να συμπληρώσουν έναν πίνακα που συνδέει τις Τριάδες με το πλήθος των ψηφίων των αντίστοιχων σχηματικών τετράγωνων αριθμών (Σχήμα 3). Βάσει αυτού του πίνακα, τους ζητείται να διατυπώσουν έναν κανόνα που συνδέει τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. Επιπλέον, στο φύλλο εργασίας, δίνεται μια δραστηριότητα κατά την οποία σε ένα τρίγωνο με πλευρές μήκους 3, 4, 5 καλούνται να χρησιμοποιήσουν τις ψηφίδες για να σχηματίσουν τους σχηματικούς τετράγωνους αριθμούς που αντιστοιχούν στις δύο καθετές πλευρές. Στη συνέχεια, *ελέγχουν εάν οι ίδιες ψηφίδες* μπορούν να σχηματίσουν τον σχηματικό τετράγωνο αριθμό που αντιστοιχεί στο μήκος της υποτείνουσας.

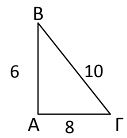
ΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

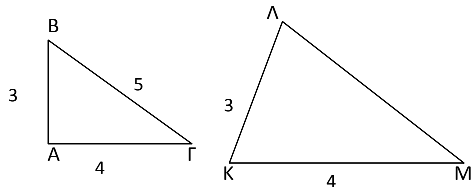
Το Ερωτηματολόγιο Αξιολόγησης αποτελείται από 11 ερωτήματα τύπου Likert, ο στόχος των οποίων είναι να διερευνήσει την γνώση των μαθητών και των μαθητριών για τον χαρακτηρισμό: α) ενός τριγώνου (ορθογωνίου, οξυγωνίου, αμβλυγώνιου· βλ. Σχήμα 4, Ερώτηση 2), β) μιας γωνίας (ορθής, οξείας και αμβλείας· βλ. Σχήμα 4, Ερώτηση 4), γ) μιας πλευράς μη ορθογωνίου τριγώνου σε σχέση με ορθογώνιο τρίγωνο με δύο πλευρές ίσες με τις δύο εναπομείνασες πλευρές του μη ορθογωνίου τριγώνου (βλ. Σχήμα 4, Ερώτηση 8). Επιπλέον, τα ερωτήματα διαφοροποιούνται αν οι αριθμοί που αντιπροσωπεύουν το μήκος των πλευρών των τριγώνων: δ) είναι η Βασική Πυθαγόρεια Τριάδα ή όχι (βλ. Σχήμα 4, αντίστοιχα Ερώτηση 2 και Ερώτηση 4), και ε) Αν συνάδουν με το δοθέν σχήμα, δηλαδή αν υπάρχει *οπτική και αριθμητική συμφωνία ή διαφωνία* (βλ. Σχήμα 4, αντίστοιχα Ερώτηση 4 και Ερώτηση 2).

ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Στην έρευνα συμμετείχαν δύο τμήματα της Β΄ Γυμνασίου. Το κάθε τμήμα αποτελούνταν από 10 αγόρια και 16 κορίτσια (N = 52). Στο *τμήμα παρέμβασης*, έγινε η διάρκειας μιας διδακτικής ώρας διδακτική παρέμβαση από έναν από τους δύο ερευνητές, ενώ στο *τμήμα ελέγχου*, δεν έγινε διδακτική παρέμβαση. Τα δύο τμήματα επιλέχθηκαν να διδάσκονται από τον ίδιο μαθηματικό, έτσι ώστε να υπάρχει όμοια διδασκαλία και αξιολόγηση. Για να υπάρχει ίσος αριθμός διδακτικών ωρών στα δύο τμήματα, στο τμήμα ελέγχου έγινε μια επιπλέον ώρα διδασκαλίας στο Θεώρημα από τον διδάσκοντα. Αφού συμπληρώθηκαν οι ώρες διδασκαλίας στα δύο τμήματα, τους δόθηκε ένα σχεδιασμένο από τον διδάσκοντα τεστ αξιολόγησης των γνώσεων τους στο Θεώρημα (‘Σχολικό Τεστ’). Το Σχολικό Τεστ αποτελεί μέρος του σχεδιασμού του διδάσκοντα για τη διδασκαλία του Θεωρήματος και είναι ανεξάρτητο στο περιεχόμενο και στους στόχους του από την διδακτική μας παρέμβαση. Μερικές μέρες αργότερα, τους δόθηκε το Ερωτηματολόγιο Αξιολόγησης.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2					
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι: 					
	Α. οξυγώνιο	**Β.** ορθογώνιο	**Γ.** αμβλυγώνιο	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** Ισοσκελές

ΕΡΩΤΗΣΗ 4					
Στο διπλανό τρίγωνο ΑΒΓ: 					
	Α. Η γωνία � είναι ορθή	**Β.** Η γωνία � είναι αμβλεία	**Γ.** Η γωνία � είναι οξεία	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** Η γωνία � είναι ίση με τη γωνία �

ΕΡΩΤΗΣΗ 8					
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. Στο τρίγωνο ΚΛΜ η γωνία � είναι οξεία. Μπορείτε να βρείτε το μήκος της ΛΜ; 					
	Α. Η πλευρά ΛΜ είναι ίση με 5	**Β.** Η πλευρά ΛΜ είναι μεγαλύτερη από 5	**Γ.** Η πλευρά ΛΜ είναι μικρότερη από 3	**Δ.** Δεν μπορώ να απαντήσω	**Ε.** Η πλευρά ΛΜ είναι μικρότερη από 5

Σχήμα 4: Παραδείγματα ερωτημάτων από το Ερωτηματολόγιο Αξιολόγησης.

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Η διδακτική παρέμβαση

Οι μαθητές και οι μαθήτριες συμμετείχαν ενεργά στη διδακτική παρέμβαση. Για παράδειγμα, στην πρώτη ενότητα, μια μαθήτρια δυσκολεύτηκε να σχηματίσει το τριγωνικό πλαίσιο στο πάτωμα, αλλά με καθοδήγηση από τον ερευνητή και την παρέμβαση μιας συμμαθήτριας το πλαίσιο σχηματίστηκε (Σχήμα 5).

Σχήμα 5: Στιγμιότυπα από το σχηματισμό του τριγωνικού πλαισίου στο πάτωμα.

Επιπλέον, φαίνεται ότι ακολουθήθηκαν τα αναμενόμενα γνωστικά μονοπάτια. Για παράδειγμα, στην εύρεση Τριάδων (τρίτη ενότητα) προτάθηκαν οι (6,7,8) και

(6,8,10). Στο παρακάτω απόσπασμα, σημειώνεται η προσπάθεια να επικοινωνηθεί το επιχείρημα για την επιλογή της Τριάδας και για την θέση της ορθής γωνίας, με στόχο την ενίσχυση των ποιοτικών συνδέσεων μεταξύ μήκους πλευρών και είδους γωνίας.

Μαθήτρια 1: 10, 8 και 6.

Ερευνητής: 10 μάλιστα. Πώς το σκέφτηκες;

Μαθήτρια 1: Διπλασιάζουμε.

Ερευνητής: Κι εσύ [απευθυνόμενος σε άλλη μαθήτρια], τι ήθελες να πεις;

Μαθήτρια 2: Ε … 6, 7, 8.

Ερευνητής: Πως το σκέφτηκες αυτό;

Μαθήτρια 2: Επειδή είναι 3, 4, 5 με τη σειρά και το 6, 7, 8 θα είναι το ίδιο.

Ερευνητής: Εσύ που μου είπες να διπλασιάσουμε … απέναντι από ποια πλευρά θα είναι η ορθή; Μου είπες 6, 8, 10…

Μαθήτρια 1: Απέναντι από τη 10.

Ερευνητής: Εσύ αφού είπες 6, 7, 8 που νομίζεις ότι θα είναι η ορθή;

Μαθήτρια 2: Θα είναι …6 και 7 [εννοεί ανάμεσα στις πλευρές μήκους 6 και 7]

Επιπροσθέτως, οι μαθητές και οι μαθήτριες, με την βοήθεια της δραστηριότητας με τις ψηφίδες της πέμπτης ενότητας και την καθοδήγησή μας, κατάφεραν να διατυπώσουν τον κανόνα ‘$5^2 = 3^2 + 4^2$’:

Ερευνητής: Μπορείτε να σκεφτείτε κάποια σχέση που να συνδέει τις κάθετες πλευρές με την υποτείνουσα τώρα [αφού έχουν ολοκληρώσει την δραστηριότητα με τις ψηφίδες]; … Πόσες ψηφίδες ήταν η πλευρά 3;

Μαθητές και μαθήτριες: 9.

Ερευνητής: Η πλευρά 4;

Μαθητές και μαθήτριες: 16.

Μαθήτρια: 25!

Ερευνητής: Ποια πλευρά;

Μαθητές και μαθήτριες: Η 5.

Ερευνητής: Κι εγώ σας είπα πάρτε τις ψηφίδες όλες από τις δύο κάθετες πλευρές και κοιτάξτε να δείτε αν φτάνουν για να φτιάξουν την υποτείνουσα [το σχηματικό αριθμό που αντιστοιχεί στη υποτείνουσα]…και φτάσανε… Γιατί φτάσανε λέτε; [παύση] Τις βάλαμε μαζί τις ψηφίδες…[παύση]… Βλέπετε τώρα κάποια σχέση μεταξύ τους; [δύο μαθήτριες σηκώνουν το χέρι τους]

Μαθήτρια: Ότι αν τις προσθέσουμε τις δύο πλευρές βγαίνει ο αριθμός των ψηφίδων της τρίτης. [ακολουθεί διάλογος για τη ‘μετάφραση’ της περιόδου με μαθηματικό συμβολισμό, ο οποίος καταλήγει στην έκφραση‘$5^2 = 3^2 + 4^2$’].

Σχολικό τεστ και Ερωτηματολόγιο Αξιολόγησης

Δεν βρέθηκε στατιστικώς σημαντική διαφοροποίηση των δύο τμημάτων με τον έλεγχο Mann-Whitney στην επίδοση στο Σχολικό Τεστ (U=227, p>0,05, r=0,18) ή στο Ερωτηματολόγιο Αξιολόγησης (U=260, p>0,05, r=0,15). Όμως, βρέθηκε στατιστικώς σημαντική θετική συσχέτιση των δύο επιδόσεων μόνο στο τμήμα ελέγχου (p<0,05, r_s=0,40). Επιπροσθέτως, στη σύγκριση των δύο τμημάτων με τον ακριβή έλεγχο Fisher για τα ερωτήματα του Ερωτηματολογίου Αξιολόγησης βρέθηκε στατιστικώς σημαντική διαφοροποίηση υπέρ του τμήματος παρέμβασης στο Ερώτημα 2 (p<0,05, *phi*=0,35) και στο Ερώτημα 4 (p<0,05, *phi*=0,35) (βλ. Σχήμα 4).

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΙΚΑ ΣΧΟΛΙΑ

Συμπερασματικά, ισχυριζόμαστε ότι η περιεκτική διδακτική μας παρέμβαση μπορεί να χαρακτηριστεί ως αποτελεσματική, αφού φαίνεται να βοηθάει στην ανάπτυξη ποιοτικών συνδέσεων μεταξύ των αριθμών που συνδέονται με τα μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου και του χαρακτηρισμού ενός τριγώνου ως ορθογώνιο. Αν και δεν φαίνεται να επηρεάστηκε η επίδοση στο Σχολικό Τεστ, καταγράφηκε διαφοροποίηση στον τρόπο που τα δύο τμήματα ανταποκρίθηκαν στο Ερωτηματολόγιο Αξιολόγησης. Στο τμήμα ελέγχου υπάρχει στατιστικώς σημαντική συσχέτιση της επίδοσης στο Σχολικό Τεστ με την επίδοση στο Ερωτηματολόγιο Αξιολόγησης, η οποία όμως δεν καταγράφεται στο τμήμα παρέμβασης. Η διδακτική μας παρέμβαση φαίνεται να επέτρεψε σε μαθητές ανεξαρτήτου επίδοσης σε τυπικού περιεχομένου τεστ να αναπτύξουν τις ποιοτικές συνδέσεις στις οποίες στοχεύαμε. Ο ισχυρισμός αυτός ενισχύεται με την στατιστικώς σημαντική υπεροχή του τμήματος παρέμβασης σε δύο ερωτήματα του Ερωτηματολογίου Αξιολόγησης.

Τέλος, το Ερώτημα 2 (Σχήμα 4) αφορά στον χαρακτηρισμό γωνίας που βρίσκεται απέναντι από πλευρά μήκους 5 σε τρίγωνο πλευρών μήκους 3, 4 και 5 που όμως δεν έχει σχεδιαστεί ‘σωστά’, δηλαδή υπάρχει σύγκρουση οπτικού και αριθμητικού ερεθίσματος. Φαίνεται ότι για το τμήμα παρέμβασης ο αριθμός αποτελεί ισχυρότερο επιχείρημα αλήθειας από την εικόνα, το οποίο αποτελεί ένδειξη ότι το τμήμα παρέμβασης είναι πιο κοντά από το τμήμα ελέγχου στο 1$^{\text{ο}}$ επίπεδο εξαντικειμενίκευσης του ορθογωνίου τριγώνου.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learning to listen: from historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics, 66,* 111-129.

Brown, T., & Haywood, D. (2011). Geometry, subjectivity and the seduction of language: the regulation of spatial perception. *Educational Studies in Mathematics, 77*(2-3), 351-367.

Derrida, J. (1989). *Edmund Husserl’s Origin of Geometry: An Introduction*. Lincoln: Bison/University of Nebraska Press.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103-131.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing Realistic Mathematics Education*. Utrecht: CD-b Press.

Harel, G., & Tall, D. (1991). The General, the Abstract, and the Generic in Advanced Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 11*(1), 38-42.

Hart, W. D. (1996). *The Philosophy of Mathematics*. New York: OUP.

Husserl, E. (1989). The Origin of Geometry. In *Edmund Husserl's Origin of Geometry: An Introduction*. Lincoln: Bison/University of Nebraska Press.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 71*(3), 235-261.

Lappas, D., & Spyrou, P. (2006). A reading of Euclid's elements as embodied mathematics and its educational implications. *The Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 5*(1), 1-16.

Maor, E. (2007). *The Pythagorean Theorem: a 4000 year history*. Princeton & Oxford: Princeton University Press.

Merfeld, D. M., Zupan, L., & Peterka, R. J. (1999). Humans use internal models to estimate gravity and linear acceleration. *Nature, 398*, 615-618.

Noback, C. R., Strominger, N. L., Demarest, R. J., & Ruggiero, D. A. (2005). *The Human Nervous System.* Totowa, NJ: Humana Press.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology, and the teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26-33.

Radford, L. (2003). Gestures, Speech and the Sprouting of Signs: A Semiotic-Cultural Approach to Students' Types of Generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37-70.

Spyrou, P., Moutsios-Rentzos, A., & Triantafyllou, D. (2009). *Teaching for the objectification of the Pythagorean Theorem.* In L. Paditz & A. Rogerson (Eds.), Proceedings of the 10th International Conference of the MEC21 Project (pp. 530-534). Dresden: MEC21.

Tall, D. O. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. In P. Gates (Ed.), Proceedings of the 28th Conference of the IGPME (Vol. 4, pp. 281-288). Bergen: PME.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ. & Ρεκούμης, Κ. (2007). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

Τζεκάκη, Μ. (2011). *Μαθηματική Εκπαίδευση για την Προσχολική και Πρώτη Σχολική Ηλικία*. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.