ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ Ι
ΜΕΡΟΣ ΙΙ

Διδάσκων Π. Σπύρου

ΑΘΗΝΑ 2008

Για μια νέα εκπαιδευτική φιλοσοφία

Για να μιλήσουμε για την εκπαίδευση των καιρών μας, πρέπει καταρχήν να δούμε με ειλικρίνεια και θάρρος τον αιώνα μας. Η κοινωνία αλλάζει ταχύτατα μπροστά στα μάτια μας, ο πλανήτης αλλάζει, το παγκόσμιο χωριό διαρκώς μετατοπίζεται. Ποτέ άλλοτε η φράση του Ηράκλειτου για την ατέρμονη ροή του κόσμου δεν ήταν τόσο επίκαιρη. Οι προβλέψεις μας αδυνατούν διαρκώς, οι εκπλήξεις μας εντείνουν την αμηχανία, η μνήμη μας δεν προλαβαίνει να σώσει τα φαινόμενα. Η Αλήθεια του κόσμου (ως άρνηση της λήθης, ως εκείνο που δεν πρέπει να ξεχαστεί!) αποκτά έναν απελπιστικά εφήμερο και συμβατικό χαρακτήρα που μας τρομοκρατεί! Κι όσο που πρόκειται να αξιολογήσουμε τι σημαίνουν όλες αυτές οι αλλαγές για την εκπαίδευση, πρέπει να θυμηθούμε την επισήμανση ενός φιλόσοφου του πολιτισμού (Mc Luhan 1990), που θέλοντας να δείξει την αδράνεια των αντιλήψεων στις εκπαιδευτικές στρατηγικές, σε σχέση με τις αλλαγές της κοινωνίας κάτω από την επίδραση της τεχνολογίας, έλεγε το εξής παράδοξο: *οι στρατηγοί της εκπαίδευσης ετοιμάζουν πάντα τον προηγούμενο πόλεμο*.

Πράγματι, οι αναπαραστάσεις που έχουμε για την κοινωνία και τη δυναμική της είναι κάθε φορά εκείνες που αποκομίσαμε σε προηγούμενες φάσεις της ζωή μας, εκεί που δώσαμε προηγούμενες μάχες. Σε ένα κόσμο ωστόσο, που τον χαρακτηρίζει ακριβώς η ταχύτατη εξέλιξη των μέσων επικοινωνίας, η αλλαγή εργαλείων και όπλων μια στείρα παραπομπή στην πείρα του παρελθόντος δεν αρκεί. Είναι χαρακτηριστικό το παράδειγμα των γάλλων στρατηγών, στο δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο, που καταπιάστηκαν να κατασκευάσουν την πολυέξοδη αμυντική γραμμή Μαζινό, κατάλληλη για τον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο του οποίου είχαν την εμπειρία. Οι γερμανοί επιτέθηκαν με τανκς από τα βουνά του Βελγίου, και τότε φάνηκε ότι τέτοιου είδους αμυντικές γραμμές είχαν τελειώσει προ πολλού.

Θα πρέπει να αναρωτηθούμε, αν στη σημερινή εποχή, που χαρακτηρίζεται από την έκρηξη των μέσων και την ριζική αλλαγή των τρόπων πρόσληψης και καταχώρησης των πληροφοριών, η σχέση μας με τα μαθηματικά και την διδασκαλία τους παραμένει η ίδια αφού αγνοεί τον άλλο βασικό συντελεστή της γνώσης που είναι η *ιστορικότητα του υποκειμένου της γνώσης*. Το *υποκείμενο που γνωρίζει* δεν είναι το ίδιο την κάθε ιστορική στιγμή, έτσι ώστε να το απομονώσουμε και να περιγράψουμε την διεργασία του "μανθάνειν" ως μηχανικού, αντικειμενικού γεγονότος. Το υποκείμενο συγκροτείται μέσα σε μεταλλασσόμενους κοινωνικούς, πολιτισμικούς και επικοινωνιακούς όρους που του καθορίζουν γλώσσες, κώδικες, γνωσιολογικές κατηγορίες, επικοινωνιακές λειτουργίες, μέσα στις οποίες ενεργεί, καθορίζει και καθορίζεται.

Σε τελευταία ανάλυση είναι χρήσιμες όλες εκείνες οι επιστήμες που μας περιέγραψαν τους όρους και τις τεχνικές επικοινωνίας που ανέδειξε ο άνθρωπος μέσα στις οποίες όχι μόνο έλυνε τα προβλήματά του αλλά επαναπροσδιόριζε την διαλεκτική σχέση του ατομικού και του συλλογικού υποκειμένου. Τα μέσα που κάθε φορά είχε στην διάθεσή του για να εξασφαλίσει την επικοινωνία του είχαν αποφασιστική επίδραση στην ίδια την συγκρότησή του ως ανθρώπου και γινόταν ο κεντρικός άξονας ανάπτυξης της ιστορίας του.

Η εκπαίδευση των Μαθηματικών μπορεί να γίνει μέσα σε ποικίλα επικοινωνιακά περιβάλλοντα, που το καθένα προϋποθέτει διαφορετική επιστημολογία. Οι επιστημολογίες αυτές δρουν αξιολογικά και γίνονται ο κύριος φορέας επικοινωνίας του παιδευτικού μηνύματος. Σε κοινωνίες που κυριαρχούν υπερβατικές αξίες, αισθητικού ή θεολογικού τύπου οι μαθηματικές ιδέες παρουσιάζονται ως η αναλλοίωτη δομή του κόσμου, υποβάλλουν το δέος της αποκάλυψης και υπονοούν ένα βαθιά επικοινωνιακό χαρακτήρα του ανθρώπου με το άφθαρτο, το υπέρτατο, το αισθητικό, το ηθικό, το αιώνιο. Οι ιδέες αυτές που συνοψίζονται με το όνομα του Πλατωνισμού κυριάρχησαν στην μαθηματική εκπαίδευση κι έφτασαν ως ένα βαθμό ως τις μέρες μας. Μια άλλη επιστημολογία που στάθηκε το ίδιο αποφασιστική για την ανάπτυξη των μαθηματικών είναι η εργαλειακή, δηλαδή εκείνη στην οποία κυριαρχούν τα αιτήματα της μέτρησης και της εφαρμογής. Αυτή εμφανίζεται στην νεοτερικότητα και ολοκληρώνεται με την άνοδο της αστικής τάξης, όπως αναδεικνύεται μέσα από τις ορθολογικές και μαρξίζουσες αντιλήψεις.

Άλλη εκδοχή είναι εκείνη που ανέκυψε κατά τον 20ο αιώνα μέσα σε πραγματιστικές κοινωνίες όπου κυριαρχούν τα νέα ηλεκτρονικά επικοινωνιακά μέσα, η εικόνα, η αγορά, η διαφήμιση. Οι συνθήκες αυτές επιφέρουν τεράστιες ανθρωπολογικές αλλαγές, τις οποίες ζούμε άλλωστε τα τελευταία χρόνια και αξίζει να σταθούμε λίγο σ'αυτές πιο επισταμένα.

Τα νέα Μέσα και οι επιπτώσεις

Οι σαρωτικές εξελίξεις που ζούμε τα τελευταία χρόνια στον πλανήτη είναι, χωρίς αμφιβολία, φυσικό ακόλουθο της αλματώδους εξέλιξης των Μέσων (Media) με άμεσες επιπτώσεις σε όλες τις σφαίρες της παγκόσμιας κοινωνίας. Η επίδραση στην επιστήμη, όπως εξάλλου και στα Μαθηματικά, υπήρξε αναπόφευκτη κι όχι μόνο εξωτερικά, προσθέτοντας κάποιες νέες δυνατότητες, αλλά προχωρώντας βαθύτερα στην ουσία τους ως κοινωνική, ιστορική και πνευματική δραστηριότητα.

Το 1964, ένας καναδός φιλόσοφος της κουλτούρας ο Marchal Mc Luhan έγραψε ένα παράξενο και ενδιαφέρον βιβλίο με τίτλο Media. Είχε μιλήσει για τις ανθρωπολογικές αλλαγές που επιφέρουν τα Μέσα στην ιστορία. Τα πρώτα χρόνια έμεινε απαρατήρητος. Τον πρόσεξαν μόνο δημοσιογράφοι, διαφημιστές κι ειδικοί των Μέσων. Στο βιβλίο αυτό ο Mc Luhan επιχειρεί μια πρωτότυπη ανάλυση της ιστορίας με βάση την τεχνολογία και την πληροφορία. Ισχυρίζεται ότι κάθε τεχνολογία είναι μια προβολή του ανθρώπου στον χώρο και τον χρόνο, μια προέκταση ενός τμήματός του, μιας αίσθησης ή μιας ικανότητάς του. Έτσι, το βιβλίο αποτέλεσε προέκταση του ματιού και της μνήμης, ο τροχός του ποδιού, τα όπλα των νυχιών και των δοντιών κ.ο.κ. Αλλά κάθε τέτοια προέκταση τμήματος του ανθρώπου δεν είναι κάτι ουδέτερο κι ανεξάρτητο από την ανθρώπινη ψυχή. Τα μέσα δεν είναι γέφυρες του ανθρώπου με την φύση, είναι η φύση! Είναι η προέκταση τμημάτων του εαυτού μας που επηρεάζει τις κοινωνικές δομές και τις ανθρώπινες σχέσεις. Κάθε τεχνολογία είναι ταυτόχρονα μέσο επικοινωνίας, ορισμένες δε που έχουν εντονότερο επικοινωνιακό χαρακτήρα κυριαρχούν σε κάθε ιστορική περίοδο, καθορίζουν την κοινωνική οργάνωση, τις ανθρώπινες σχέσεις και το κυρίαρχο πρότυπο σκέψης.

Δεν σκοπεύω να περιγράψω εδώ την Μακλουανική φιλοσοφία. Θέλω να αναφερθώ μόνο στις προφητικές νύξεις που κάνει στα μαθησιακά προβλήματα που θα προκύψουν, όσον αφορά τον αναλυτικό και ορθολογικό τρόπο σκέψης, από την επίδραση της τηλεόρασης και της διαφήμισης. Ο Mc Luhan έχει μια πρωτότυπη άποψη για την σύνδεση του μέσου της γραφής με την έννοια της τάξης και της λογικής. Η αλφαβητική γραφή λεει με τη γραμμική παράθεση των γραμμάτων και των σειρών υπαγορεύει κι ένα τρόπο αναλυτικής σκέψης. Η τεχνολογία της τυπογραφίας προκάλεσε την ανάδυση του Δυτικού ορθολογισμού, με άλλα λόγια ένα τρόπο σκέψης και αναπαράστασης της πραγματικότητας, ο οποίος παράγει στο νοητικό επίπεδο την ομοιομορφία, την επαναληπτικότητα και την διαδοχικότητα, χαρακτηριστικά της τυπογραφικής τεχνολογίας. *Ο τύπος προκάλεσε τη διάθεση για* *επακριβή μέτρηση και επαναληπτικότητα, την οποία συνδέουμε σήμερα με την επιστήμη και τα Μαθηματικά.*

Αναζητά τις επιδράσεις όλων των Μέσων και ιδιαίτερα των πρόσφατων της ηλεκτρικής και της ηλεκτρονικής τεχνολογίας, όπως ο τηλέγραφος, το τηλέφωνο, ο κινηματογράφος, η φωτογραφία, το ράδιο, η τηλεόραση, η διαφήμιση. Βασικές έννοιες, όπως του χώρου ή του χρόνου αλλάζουν, κάτω από την επίδραση της τεχνολογίας, ενώ το σχολείο παύει να αποτελεί το μοναδικό κέντρο άντλησης πληροφοριών για τους νέους. Ο δάσκαλος περνάει σε ένα άλλο ρόλο, που ίσως ακόμη δεν έχει προσδιοριστεί επαρκώς.

Η διαφήμιση αποτελεί κατά τον Mc Luhan *μια γιγαντιαία εκπαιδευτική επιχείρηση, που ο ετήσιος προϋπολογισμός της ξεπερνά τον εθνικό προϋπολογισμό για την παιδεία*. Η διαφήμιση, όμως, γίνεται κυρίως με στόχο την διαρκή εκπαίδευση του ανθρώπου ως καταναλωτή κι η τηλεόραση συμβάλλει στο έπακρο σε τούτο, καθόσον η τηλεοπτική εικόνα χρηματοδοτείται το μέγιστο από την διαφήμιση την οποία και υπηρετεί. Για την επίδραση της τηλεόρασης ο Mc Luhan είχε πολύ νωρίς προειδοποιήσει. *Το μωσαϊκό πλέγμα της τηλεόρασης δεν ευνοεί την προοπτική στην τέχνη ούτε την γραμμικότητα στην ζωή*. Η επίδρασή της αρχίζει από την βρεφική ηλικία με το ζάπινγκ (Χρηστάκης Α, 1994).

Τα παιδιά των πρώτων τάξεων του δημοτικού, παρατηρεί στην συνέχεια ο Mc Luhan, *αρχίζουν να διαβάζουν την τυπωμένη σελίδα από απόσταση δεκαπέντε έως δεκαοκτώ πόντων κατά μέσο όρο. Τα παιδιά μας προσπαθούν να μεταφέρουν στην τυπωμένη σελίδα τη βαθειά αισθητηριακή προσταγή της τηλεοπτικής εικόνας. Με τέλεια ψυχομιμητική ικανότητα εκτελούν τις εντολές της τηλεοπτικής εικόνας. Απορροφώνται, εμπλέκονται σε βάθος. Η γραμματική παιδεία, αντίθετα, με την προέκταση της οπτικής δύναμης στην ομοιόμορφη οργάνωση του χώρου και του χρόνου, ψυχικά και κοινωνικά, μας είχε χαρίσει τη δύναμη της αποστασιοποίησης και της μη εμπλοκής. Μάταια τώρα πασχίζουν να διαβάσουν τον τύπο σε βάθος. Φέρνουν στον τύπο όλες τις αισθήσεις κι ο τύπος τις απορρίπτει. Ο τύπος ζητά την απομονωμένη κι απογυμνωμένη οπτική κι όχι το ενιαίο σύνολο των αισθήσεων*. Η σχέση με την τηλεόραση *είναι συνολική και συναισθηματική και εμπλέκει όλες τις αισθήσεις. Διαποτισμένο με την τηλεοπτική εικόνα, το παιδί συναντά τον κόσμο αντιθετικό προς την γραμματική παιδεία*. Το γεγονός αυτό *εξασθενίζει την αποτελεσματικότητα των βασικών παιδαγωγικών τεχνικών και την αξία του εκπαιδευτικού προγράμματος*.

Σε άλλο σημείο επιχειρεί ακόμη πιο επιγραμματικές διαπιστώσεις λέγοντας ότι *οι νέοι έχουν εμποτιστεί από μια παρόρμηση για εμπλοκή σε βάθος, η οποία κάνει όλους τους μακρινούς στόχους της καθημερινής κουλτούρας να φαίνονται όχι μόνο ψεύτικοι αλλά και αναιμικοί*.

Ο Mc Luhan είχε υπόψη του την κατάσταση στην Β. Αμερική κατά την δεκαετία του εξήντα. Οι παρατηρήσεις του, τεκμηριωμένες ή όχι, δεν περιλαμβάνουν τις εξελίξεις που έλαβαν χώρα με την εξάπλωση της φωτοτυπίας, της δορυφορικής τηλεόρασης, των Η/Υ, των διαλογικών προγραμμάτων, της ασύρματης τηλεφωνίας, του internet. Ωστόσο, η σημασία των προβληματισμών είναι προφανής για ένα δάσκαλο της δεκαετίας του 2008 και ιδιαίτερα για τον καθηγητή των Μαθηματικών, μαθήματος κατ'εξοχήν αναλυτικού που απαιτεί μια αποστασιοποιημένη γραμμική παράθεση συλλογισμών. Σήμερα, στο Πανεπιστήμιο του Τορόντο υπάρχει ένα δρομολογημένο πρόγραμμα που διερευνά τις επιπτώσεις των μέσων στην ζωή μας (Healy, σελ. 314).

Τα τελευταία χρόνια γίνεται μια συζήτηση για την διαφορετική ανταπόκριση των μαθητών στα προγράμματα των μαθηματικών και το φαινόμενο επιχειρείται να εξηγηθεί κατά ποικίλους τρόπους. Είναι αλήθεια ότι οι αξίες της κοινωνίας κι οι επικοινωνιακοί κανόνες, κάτω από την επίδραση των νέων μέσων, διαρκώς αλλάζουν. Η όποια γνωσιοθεωρία, η οποία έχει ως σκοπό την ανάλυση των μεθόδων και της σημασίας της μάθησης, δεν μπορεί να αγνοήσει τις νέες συνθήκες, που αφορούν στην ροή και στην πρόσληψη των πληροφοριών. Η περαιτέρω έρευνα ενός τέτοιου ζητήματος πρέπει να δανειστεί ιδέες και εργαλεία από την κοινωνική ψυχολογία και την επιστήμη της επικοινωνίας. Η διδασκαλία είναι κυρίως μια δραστηριότητα επικοινωνιακή και *η επικοινωνία με τους νέους προϋποθέτει γνώση και βαθιά κατανόηση των ανησυχιών, ασχολιών, ενδιαφερόντων τους αλλά και γενικά των επικοινωνιακών φαινομένων της εποχής μας* (Χρηστάκη Β, 61-67, 1994).

Όλοι γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει επιτυχημένο πρόγραμμα και μέθοδος διδασκαλίας που δεν θα εξασφαλίσει την συναίνεση και το ενδιαφέρον των μαθητών. Σε μια παλαιότερη εποχή, η προνομιούχα θέση που είχε το σχολείο για την κοινωνική ενσωμάτωση (Δ.Γ. Τσαούση, 1993) του μαθητή εξασφάλιζε το αναγκαίο επικοινωνιακό συμβόλαιο που βοηθούσε στην προσήλωση στον λόγο του δασκάλου. Στις νέες κοινωνικές και επικοινωνιακές συνθήκες αυτές οι "καλές προϋποθέσεις" της εποχής εκείνης έχουν εκπέσει. Το παιδί της βιομηχανικής κοινωνίας έβλεπε την γνώση ως εργαλείο χειραφέτησης από τις προκαταλήψεις των παλαιοτέρων εποχών, ήθελε να μάθει τους νόμους της φύσης, των άστρων, να λύσει το ίδιο τις απορίες του για τις μηχανές. Στην μεταβιομηχανική εποχή μας που κατά το σλόγκαν του U. Eco *Η βιομηχανία της επικοινωνίας αποτελεί την πλέον βαριά βιομηχανία*, το επικοινωνιακό περιβάλλον αλλάζει. Τα παιδιά της τηλεοπτικής εποχής έχουν άλλες ευαισθησίες κι άλλους κανόνες πρόσληψης της γνώσης. Η εικόνα αποκτά πρωταρχική σημασία στην μεταφορά πληροφοριών και παραγκωνίζει σε μεγάλο βαθμό τις ιδέες και τον λόγο (Perniola, 1992). Τα παιδιά μαθαίνουν πολλά για τον υπολογιστή τους, καταλαβαίνουν τι σημαίνει "μόλυνση περιβάλλοντος", τα ενδιαφέρουν στοιχεία που αφορούν στην κατανάλωση, τις μόδες και τα στυλ. Ο σημερινός κόσμος δεν είναι τόσο αυτονόητος για τον ορθολογισμό του! Οι πόλεμοι, οι ενεργειακές ελλείψεις κι όλα τα άλλα προβλήματα που αναδεικνύουν τα όρια της ανθρωπότητας και το ενδεχόμενο μιας μας φέρνουν σε επαφή με μια νεολαία που έχει άλλες προτεραιότητες οι οποίες πρέπει να κατανοηθούν και να παρακολουθηθούν αν θέλουμε να εξασφαλίσουμε την ανταπόκριση σε ένα πρόγραμμα διδασκαλίας.

Στην ίδια κατεύθυνση με τον Mc Luhan, η αμερικανίδα παιδαγωγός J.M. Healy έγραψε ένα συνταρακτικό βιβλίο το 1990 που πηγαίνει πολύ πιο πέρα με στοιχεία που δεν αποτελούν πια φιλοσοφίες ή προφητείες αλλά δυστυχώς διαπιστώσεις. Το βιβλίο αυτό έχει τον ενδεικτικό τίτλο *Μυαλά που κινδυνεύουν, Γιατί τα παιδιά μας δεν σκέφτονται*. Αξίζει εδώ να αναφέρουμε σύντομα μερικά από τα συμπεράσματα.

Επικρίνει καταρχάς την τηλεόραση, αλλά και τον σύγχρονο τρόπο ζωής, όπως διατροφή, θόρυβος, χημικές ουσίες, συμπεριφορές κ.ά. Καταγράφει τις πολύ επιθετικές μεθόδους που χρησιμοποιούν οι διαφημιστές για να προωθήσουν τα μηνύματά τους αλλά και τους σύγχρονους σκηνοθέτες που έχουν να αντιμετωπίσουν τον ανταγωνισμό του ζάπινγκ στις διηγήσεις που αναλαμβάνουν να επεξεργαστούν. Τα πάντα γίνονται έντονα, ερεθιστικά, προκαλούν αιφνιδιασμό, φόβο, ενεργοποιούν τα βασικά ένστικτα και εκβιάζουν έτσι την προσοχή του τηλεθεατή. Διεγείρουν την επιθυμία όπως στην περίπτωση των διαφημίσεων και παρεμβάλλουν τα προϊόντα που θα την πληρώσουν. Οι ταινίες εξάλλου προσφέρουν ένα πλαίσιο όπου ο τηλεθεατής μέσω πληρεξουσίου εκπληρώνει λογικές, παράλογες ή και βίαιες επιθυμίες (Χρηστάκης Α, 1994). Η επίδραση της βίας της τηλεόρασης στους ανθρώπους και ιδιαίτερα στα παιδιά είναι πολύμορφη και δεν περιορίζεται στις ηθικολογικές όψεις που της αποδίδουν κάποιοι, ως προς την άμεση απομίμησή της. Η βία έρχεται να πληρώσει κάποια ανάγκη σε ανταπόκριση π.χ. πείσματος, εκδίκησης σε ένα σύντομο χρόνο προσδιορισμένο από τις ανάγκες της οικονομίας της τηλεοπτικής διήγησης. Έτσι δημιουργείται μια ειδική βίωση της ροής του χρόνου με αποτέλεσμα αυτό που πολύ νωρίς (1973) είχαν παρατηρήσει οι ερευνητές σχετικά με την TV, ότι *τα παιδιά που παρακολουθούσαν επιθετικά προγράμματα παρουσίαζαν μείωση της ανοχής στις αναβολές και της υπακοής σε κανόνες*, αντίθετα από τα παιδιά που παρακολουθούσαν κοινωνικά προγράμματα (Friedrich-Stein 1973). Ωστόσο, η υπομονή αποτελεί μια βασική ικανότητα απαραίτητη για την άσκηση στην έμμεση, αφηρημένη και αναλυτική σκέψη. Τα παιδιά καταλήγουν να είναι υπερκινητικά, να μην είναι σε θέση να παρακολουθήσουν τον συλλογισμό των άλλων, να έχουν αδυναμίες στην συζήτηση. Αυτά έχουν ως αποτέλεσμα να χάνουν τις γλωσσική ικανότητα, την ικανότητα να ακούν αναλυτικά αλλά και αυτή την ανταπόκριση στα μαθηματικά προγράμματα[1].

Η J. M. Healy προχωρεί ακόμη παραπέρα σε μια προσπάθεια να εξηγήσει τα φαινόμενα που αντιμετωπίζουν οι εκπαιδευτικοί σήμερα. Κάνοντας χρήση της θεωρίας του νομπελίστα νευρολόγου Dr Gerald Edelman ισχυρίζεται μια διαρκή εξέλιξη του εγκεφάλου κατά την διάρκεια της ζωής ενός ατόμου και *εφαρμόζει τους νόμους της φυσικής επιλογής στους νευρώνες του ανθρωπίνου εγκεφάλου. Σε αυτό το σύστημα που διαρκώς μεταβάλλεται, ομάδες νευρώνων είναι εμπλεγμένες σε ένα συνεχή ανταγωνισμό μεταξύ τους για να "αιχμαλωτίσουν" άλλα κύτταρα για την ομάδα τους. Οι ομάδες που παρουσιάζουν τη μεγαλύτερη δράση αναπτύσσουν δυνατότερες συνάψεις, που προστίθενται στα δίκτυα τους, και επιβιώνουν. "Επιλέχθηκαν", επειδή είναι πιθανόν να χρησιμοποιηθούν σε μελλοντική συμπεριφορά*[2]. Ο ανταγωνισμός αυτός επιτελείται εκτός των άλλων και με την απόρριψη ενός μεγάλου αριθμού κυττάρων καθημερινά[3]. Αυτό δηλαδή που υπερασπίζει σε όλο το βιβλίο είναι οι αλλαγές που επιφέρει στον εγκέφαλο ο νέος τρόπος ζωής. Πιστεύει ότι *ο εγκέφαλος των σημερινών παιδιών έχει δομηθεί πάνω σε γλωσσικά πρότυπα που ανταγωνίζονται τις αξίες και τους σκοπούς της τυπικής εκπαίδευσης*. Οι κλασικές μέθοδοι διδασκαλίας δεν επιτυγχάνουν *επειδή ο νεαρός εγκέφαλος δεν έχει διαμορφωθεί γλωσσικά ως το βασικό εργαλείο για την αναλυτική σκέψη*. Τα παιδιά εθισμένα πια να ανταποκρίνονται πλέον σε ερεθιστικά μηνύματα χάνουν βαθμιαία την δυνατότητα συγκέντρωσης στο κλασικό μετωπικό μάθημα.[4]

Οι διαπιστώσεις της J. Healy δεν είναι οι μοναδικές. Ένας νέος κλάδος της γνωστικής ψυχολογίας που μελετά τους συγκινησιακούς παράγοντες που αφορούν στην μάθηση κρίθηκε απαραίτητος και έρχεται να μας επισημάνει τα εκρηκτικά μαθησιακά προβλήματα που έχουν προκύψει (Ντάβου, 1995). Αλλά οπωσδήποτε εκείνο που είναι αυτονόητο είναι ότι *το περιβάλλον που παρέχουμε στα παιδιά, τα ερεθίσματα με τα οποία τα ενθαρρύνουμε να αλληλεπιδρούν και οι τρόποι με τους οποίους επιδεικνύουμε τις χρήσεις του ανθρώπινου μυαλού - αυτά είναι τα μέσα για την διαμόρφωση του εγκεφάλου τους και του πολιτισμικού μας μέλλοντος*[5].

Ακόμη και εκείνοι για τους οποίους οι ισχυρισμοί της J. Healy ως προς την αλλαγή των εγκεφάλων θα φαίνονταν υπερβολικοί, δεν μπορούν να αγνοήσουν την αλλαγή ως προς τους τρόπους πρόσληψης του μεγαλύτερου μέρους των πληροφοριών, την εισβολή της εικόνας και του *καταναλωτικού ακτιβισμού* στην ζωή. Εν ολίγοις, θυμίζει την επιθετική διαφήμιση προϊόντων, τον εντατικό και προκλητικό ρυθμό της σύγχρονης τηλεοπτικής διήγησης, την μεγάλη ανάπτυξη της αγοράς με

---

[1] Στο ίδιο.
[2] Στο ίδιο, σελ 74.
[3] J. Heale, σελ. 53, επίσης η θεωρία του Edelman στο εκπληκτικό βιβλίο του.
[4] J. Healy, σελ 16.
[5] J. Healy, σελ 76.

προϊόντα που αφορούν στην νεολαία, τους ειδικούς καταναλωτικούς κωδίκων που προωθούνται σε παιδιά και εφήβους, την πολιτιστική ισοπέδωση που προσφέρουν πολυεθνικά μουσικά κανάλια τύπου MTV, την ρηχή διεθνή επικοινωνία που διαμορφώνεται μέσω μιας μέτριας γνώσης της αγγλικής. Παρατηρούμε ότι η ανθρώπινη επικοινωνία επιτελείται όλο και πιο λίγο μέσω ιδεών, γλώσσας και συλλογιστικών ενεργημάτων κι όλο και πιο πολύ με εικόνες και *συμπεριφορές* (όπως κάπνισμα, ποτό, μηχανές, αθλητικοί αγώνες, κλάμπινγκ, ταξίδια κ.ά). Η εμπορευματοποίηση των ανθρώπινων δραστηριοτήτων στην ολότητά τους προσδίδει σε όλο και περισσότερες αξίες της κουλτούρας καταναλωτική διάσταση μετατρέποντάς τες σε στείρο ακτιβισμό που δεν εσωτερικεύεται, έτσι ώστε οι αξίες αυτές να χάνουν τον μορφωτικό τους χαρακτήρα. Τα σύγχρονα μέσα *καθορίζουν λιγότερο το τι πρέπει να σκέφτεται κανείς και περισσότερο τα θέματα με τα οποία θα ασχολείται*(Χρηστάκης, σελ 34). Για το ζήτημα αυτό η J. Healy σχολιάζει *τα παιδιά συνεχώς διεγείρονται από τον έξω κόσμο ώστε να έχουν λίγο χρόνο να καθίσουν, να συλλογιστούν, και να μιλήσουν με τον εαυτό τους*[6]. "σπρώχνονται" από την μια δραστηριότητα στην άλλη και μπορεί να παίρνουν πολλή αισθητηριακή πληροφόρηση, αλλά δεν έχουν αρκετό χρόνο για να σχηματίσουν συνειρμικά δίκτυα ώστε να καταλάβουν και να οργανώσουν την εμπειρία με τρόπο που να έχει νόημα[7]. Εξάλλου κατά την άποψη του φιλόσοφου της εκπαίδευσης Papert, ο καταναλωτικός τρόπος ζωής και κριτικός τρόπος σκέψης αποτελούν οι δυο πόλους μιας ατέλειωτης σύγκρουσης μέσα στο μοντέλο της δυτικής ανάπτυξης.

Μια προσέγγιση, λοιπόν, που να αναδεικνύει την σημασία της συναισθηματικής ατμόσφαιρας που περιβάλλει την νεολαία, μέσα στην οποία ερχόμαστε μέσα από μια διαρκή διαπραγμάτευση να διδάξουμε τα μαθηματικά, φαίνεται αναγκαία. Η μετατόπιση των αξιών είναι δεδομένη. Η γνώση αποκτά πλέον πραγματολογικό χαρακτήρα, γίνεται εργαλείο για κάτι. Προτεραιότητα της εκπαίδευσης δεν είναι πια η γνώση ή η αλήθεια του κόσμου καθ'εαυτή, αλλά η σωστή διαχείριση των επικοινωνιακών δυνατοτήτων της εποχής, του νου, των μέσων, της διϋποκειμενικότητας, του σωστού διαλόγου, της διαπραγμάτευσης, των γλωσσών, των διεθνών καταναλωτικών ρευμάτων, των κωδίκων, των επαγγελματικών εργαλείων, των στρατηγικών δράσης.

Για να καταλάβουμε το τεράστιο χάσμα που μας χωρίζει και να συγκρίνουμε τις διαφορές με την πριν σαράντα χρόνια εποχή ας σταθούμε σε ένα γεγονός που δρομολόγησε το μεγάλο εκπαιδευτικό πρόγραμμα της δεκαετίας του 60 (Τουμάση) όταν η εκπαίδευση, σε όλο τον βιομηχανικό κόσμο απόκτησε προτεραιότητα. Τα εκπαιδευτικά προγράμματα φάνηκαν ανανεωμένα, πληθωρικά προτείνοντας το ορθολογικό παράδειγμα, που άρχιζε με τον Καρτέσιο, τον Γαλιλαίο κι έφτανε μέχρι τον Αϊνστάϊν. Το θαύμα της γνώσης του κόσμου και της τεχνολογίας! Η τεχνολογία υποσχόταν ταξίδια στο φεγγάρι, ξεπέρασμα της ένδειας παγκοσμίως, φτηνή ηλεκτρική ενέργεια ενώ στην πράξη έκρυβε το ανελέητο κυνήγι των εξοπλισμών, τον ανταγωνισμό για την πρόσβαση στις πρώτες ύλες, τον έλεγχο των αγορών και την παγκόσμια επιρροή. Επιπλέον, το ψευδοορθολογικό του όραμα κάλυπτε συστηματικά τα τεράστια οικολογικά αδιέξοδα που από τότε προκαλούσε. Στα πλαίσια της εκπαίδευσης, το πρόγραμμα αυτό, καλλιεργούσε το πρότυπο του *ταλεντισμού* (Davis–Hersh), της εξειδίκευσης και της αυθεντίας, αδιαφορώντας για τον ευρύτερο επικοινωνιακό και πολιτιστικό χαρακτήρα της παιδείας.

Τα μαθησιακά ζητήματα που προκύπτουν, όπως δείξαμε παραπάνω, δεν μπορούμε να τα δούμε αποκομμένα από την εξίσου σημαντική πτυχή των

[6] J. Healy, σελ 51.
[7] Το ίδιο Σελ. 70.

συγκινησιακών παραγόντων, που επιδρούν στην μάθηση κι ιδιαίτερα των νέων. Είναι αλήθεια, ότι όλα μας τα προγράμματα αναφέρονται στην εκπαίδευση νέων σχολικής και λυκειακής ηλικίας, μιας φάσης ιδιαίτερα ευαίσθητης σε συναισθηματικές αλλαγές, οι οποίες έχουν μεγάλη επίδραση στις γνωστικές διαδικασίες. Σήμερα έχει γίνει πια κατανοητό ότι οι πληροφορίες που δέχονται κι αφομοιώνουν οι άνθρωποι έχουν μεγάλη σχέση όχι μόνο με τις προηγούμενες γνωστικές δομές τους, όπως πολύ σωστά μας περιέγραψε ο κονστρουκτιβισμός, αλλά κι με τις *συγκινησιακές* καταστάσεις στις οποίες βρίσκονται, τις *αναπαραστάσεις* που διαθέτουν για το περιβάλλον και τις έννοιες, τις *ταυτίσεις* που κάνουν μέσα στο συμβολικό σύμπαν αυτών των αναπαραστάσεων. Η Μ. Ντάβου αναφέρει πάνω σε αυτό:

Ο άνθρωπος δεν είναι μια γνωστική μηχανή που λειτουργεί αυτόματα, ακολουθώντας πάντα τις προβλεπόμενες, μετρήσιμες οδούς. Έως το τέλος της δεκαετίας του 80, οι γνωστικοί ψυχολόγοι μελετούσαν την σκέψη επηρεασμένοι αρκετά από τις επιστήμες των υπολογιστών και της τεχνητής νοημοσύνης. Αναπόφευκτα, τα θεωρητικά μοντέλα που προέκυψαν, αν και επεδείκνυαν σπουδαία θεωρητική ακρίβεια, δεν αντιμετώπιζαν προβλήματα στην πρακτική τους εφαρμογή.

Η μαθησιακή ωρίμανση ενός νέου επιτελείται παράλληλα και σε συσχετισμό με την φυσική του ωρίμανση και αποτελεί μια πορεία προς την ενηλικίωση και την ενσωμάτωσή του στην κοινωνία. Τέτοιοι παράγοντες ωρίμανσης και αφομοίωσης των νέων στην κοινωνία αποτελούν "οι οργανισμοί, τα σχολεία, η κατανάλωση, οι παρέες" (Αστρινάκης, 1988). Πώς λειτουργούν αυτοί όμως οι παράγοντες στην σύγχρονη κοινωνία, όπου η διαφήμιση και τα μέσα ενημέρωσης προωθούν τόσο δυναμικά και μεθοδευμένα τα επιλεγμένα καταναλωτικά πρότυπα;

Προς εμπύρωση της σημασίας της επίδρασης των συγκινησιακών παραγόντων θα αναφέρω ένα απόσπασμα από την Απολογία του μεγάλου μαθηματικού G. H. Hardy:

Δεν θυμάμαι να ένοιωσα, όταν ήμουν παιδί, πάθος για τα Μαθηματικά, και η αντίληψη που είχα για την καριέρα του μαθηματικού ήταν κάθε άλλο παρά ευγενής. Έβλεπα τα Μαθηματικά μόνο από την σκοπιά των εξετάσεων και των υποτροφιών: Ήθελα να νικήσω τα άλλα παιδιά, και αυτός ήταν ο καλύτερος δυνατός τρόπος να το επιτύχω. Ήμουν κάπου δεκαπέντε ετών όταν (με μάλλον παράξενο τρόπο) οι φιλοδοξίες μου πήραν μια αποφασιστική τροπή. Υπάρχει ένα βιβλίο του Alan St Aubyn, με τίτλο " Ένας Εταίρος του Trinity", από μια σειρά μυθιστορημάτων που περιγράφουν πώς υποτίθεται ότι είναι η ζωή σ'ένα κολέγιο του Cabridge. Υπάρχουν στο βιβλίο δυο ήρωες: ο κεντρικός ήρωας που ονομάζεται Flowers, που είναι σχεδόν εντελώς καλός, και ο δευτερεύων, πιο αδύναμος τύπος, που ονομάζεται Brown. Ο Flowers και ο Brown αντιμετωπίζουν πολλούς κινδύνους στη φοιτητική ζωή, αλλά ο χειρότερος ήταν μια χαρτοπαικτική λέσχη που την διευθύνουν δυο μαγευτικές αλλά υπερβολικά διαβολικές νεαρές κυρίες. Ο Flowers επιζεί όλων αυτών των δυσκολιών, έρχεται δεύτερος στο Τμήμα των Κλασσικών Σπουδών, οπότε αναγορεύεται αυτομάτως Εταίρος. Ο Brown καταρρέει, ρημάζει τους γονείς του, το ρίχνει στο πιοτό και σώζεται από παραλήρημα κατά την διάρκεια μιας καταιγίδας χάριν και μόνο στις προσευχές. Μόλις και μετά βίας παίρνει ακόμη και το απλό πτυχίο και τελικά γίνεται ιεραπόστολος. Η φιλία τους δεν κλονίζεται από τα συνεχή αυτά περιστατικά, και ο Flowers θυμάται τον Brown με στοργικό οίκτο, καθώς πίνει κρασί και τρώει ξηρούς καρπούς για πρώτη φορά στο Εντευκτήριο των Επισήμων….αλλά ακόμη και το απλουστευτικό μου μυαλό, αρνείτο να παραδεχθεί τον Flowers ως ευφυή. Αν εκείνος μπορούσε να καταφέρει όλα αυτά, γιατί να μην μπορώ κι εγώ; Ιδιαίτερα η τελευταία σκηνή στο Εντευκτήριο, με σαγήνευε εντελώς και από τότε, έως ότου τα κατάφερα, τα μαθηματικά ήσαν για μένα πάνω απ'όλα ο τρόπος απόκτησης του τίτλου του Εταίρου στο Trinity.

Ο Hardy μας παρουσιάζει με μεγαλοφυή απλότητα αυτό που σήμερα οι κοινωνικοί ψυχολόγοι βλέπουν ως την διαδικασία ενσωμάτωσης. Υπάρχει η αναπαράσταση μιας κοινωνικής αξίας, η εμπλοκή και τέλος η απαραίτητη ταύτιση που λέει "γιατί να μην μπορώ κι εγώ;" (Χρηστάκης, 1994).

Μετατόπιση από το αίτημα της γνώσης στο αίτημα της λύσης προβλήματος

Στις προηγούμενες παραγράφους προσπαθήσαμε να καταθέσουμε τις κοινότοπες παρατηρήσεις μας που ωστόσο συχνά αγνοούμε όταν μιλάμε για ζητήματα εκπαίδευσης. Δείξαμε πώς τα νέα Μέσα επιβάλλουν νέους κώδικες επικοινωνίας και κανόνες πρόσληψης της πληροφορίας. Επίσης, πρέπει να λάβουμε υπ'όψη ότι οι νέες αντιλήψεις για τα ανθρώπινα δικαιώματα μέσα στις δημοκρατικές κοινωνίες και ιδιαίτερα τα δικαιώματα των νέων, τα νέα οπτικοακουστικά μέσα και ο τρόπος χειρισμού τους επιβάλουν εντελώς νέους κώδικες, οι οποίοι *υπαγορεύουν συμμετοχή* και *πρωτοβουλίες* από τους διδασκόμενους που σε παλαιότερες εποχές θα ήταν αδιανόητες (Mac Luhan 1990, Σπύρου, 1995).

Είναι πια αποδεκτό ότι *τα προβλήματα της κάθε εποχής ανακύπτουν στα διάφορα επίπεδα της επικοινωνίας (της), και δεν είναι δυνατόν να διατυπωθούν με ακρίβεια, με ορθότητα, ή με αποτελεσματικότητα χωρίς να λάβουμε υπόψη μας τον τρόπο με τον οποίο αυτά ανακύπτουν και μέσα σε ποιο πλαίσιο διατυπώνονται* (Mac Keon, 1957). Σε ένα περιβάλλον υπερπληροφόρησης, γινόμαστε μάρτυρες ραγδαίων αλλαγών αξιών και αιτημάτων. Ωστόσο, τα παλαιότερα αξιολογικά συστήματα του Πλατωνισμού και της εργαλειακής (τεχνοκρατικής) αντίληψης των μαθηματικών, που λειτουργούσαν ως κύριοι επικοινωνιακοί φορείς και μέσω των οποίων προωθείτο και επικυρωνόταν η γνώση, έπαψαν να αποδίδουν. Σε αυτές τις αντιλήψεις αντιπαραθέτουν (P. Ernest, 1991), την διδακτική πρόταση των ανοικτών προβλημάτων, την οποία θα ονομάσω *επικοινωνιακή* αντίληψη και η οποία περιλαμβάνει τις προηγούμενες αντιλήψεις αλλά και πολλά νέα στοιχεία. Κατ'αυτήν το *κέντρο πλέον της διαδικασίας μάθησης* δεν είναι πια το αντικείμενο της γνώσης, όπως φαινόταν παλαιότερα, αλλά *η επικοινωνία που εγκαθίσταται ανάμεσα στα υποκείμενα* που συμμετέχουν στην διαδικασία της μάθησης. Ο δάσκαλος, για να διδάξει κάτι, δεν μπορεί να γνωρίζει με σαφήνεια ποιες δομές προϋπάρχουν μέσα στο νου του μαθητή και σε ποιες παρεξηγήσεις ενδεχομένως θα μπορούσαν να οδηγήσουν, είναι αναγκασμένος να αναζητήσει τις διαφορετικές προσεγγίσεις μέσω των οποίων προσλαμβάνεται μια έννοια. Στην σύγχρονη Διδακτική συναντάμε συχνά τον παιδαγωγικό στόχο που θέλει να κατασκευάσει μαθητές *λύτες προβλημάτων*. Στην συνέχεια θα δούμε πώς η πραγματιστική φιλοσοφία επιφυλάσσει, από πολύ νωρίς, μια προνομιούχα θέση για το *πρόβλημα*, με μια εκδοχή που παρακάμπτει τα μεταφυσικά ερωτήματα.

Έτσι, κατά την επιστημολογία του Dewey (αρχές του 20ου αιώνα), το πρόβλημα είναι κάτι περισσότερο από συγκυριακή άσκηση δεξιοτήτων. Είναι τρόπος, οδός συγκρότησης της "αληθούς" εικόνας του κόσμου. Η έννοια της αλήθειας, όπως η έννοια της θεμελιωμένης βεβαιότητας, συνδέεται αναπόσπαστα με την θεωρία της έρευνας. Έτσι, “η διαπίστωση την οποία εγγυάται η έρευνα, σχετίζεται προς την απροσδιόριστη κατάσταση, όπως ακριβώς η λύση σχετίζεται με το πρόβλημα. Το πρόβλημα καθορίζει τις συνθήκες της απάντησης, αλλά η απάντηση δίνει λύση στο πρόβλημα. Η δημιουργία των συνθηκών αντιμετώπισής του αποτελεί το κύριο χαρακτηριστικό της αλήθειας. Η αντιμετώπιση των δυσκολιών ενός προβλήματος αποκλείει την τύχη και την εικασία, ενώ η έρευνα, η ερμηνεία και η ανάλυση του προβλήματος παρεμβαίνουν, για να δώσουν την απάντηση, την θεμελιωμένη βεβαιότητα.

Γενικώς, είναι δυνατόν να λεχθεί ότι η αλήθεια κατά τον Dewey, ευρίσκεται στην σχέση μεταξύ του πρώτου και του δεύτερου σταδίου έρευνας (της προβληματικής καταστάσεως) και του τελευταίου (της κρίσεως, της λύσεως, του μετασχηματισμού). Η "αλήθεια" συσχετίζει τις δυο αυτές επιμέρους καταστάσεις: το πρόβλημα και την απάντηση. Με άλλα λόγια, η σχέση ευρίσκεται ανάμεσα στην αρχική κατάσταση των συνθηκών, των οποίων η ποιότητα χαρακτηρίζεται ως προβληματική, και στην τελική που χαρακτηρίζεται ως προσδιοριστική, πλήρης, κλειστή και λυμένη. Το δεύτερο στάδιο συνθηκών αποτελεί την θεμελιωμένη βεβαιότητα ή την αληθινή πίστη, που συνιστά γνώση (Μπαρζελιώτη).

Μέσα σ'αυτή την πραγματιστική οπτική η διαδικασία συγκρότησης της γνώσης μετατοπίζεται έτσι στο πεδίο της *διαπραγμάτευσης των υποκειμένων* και το θεώρημα του J. Habermas, που συγκρότησε την *Θεωρία του Επικοινωνιακού Πράττειν*, γίνεται ιδιαίτερα αντιπροσωπευτικό και σύμφωνα με το αυτό **το παράδειγμα** *της γνώσης των αντικειμένων πρέπει να αντικατασταθεί από το* **παράδειγμα** *της συνεννόησης μεταξύ υποκειμένων ικανών να επικοινωνούν μέσω της γλώσσας και να πράττουν* (Habermas, 1995, σελ 365), υπαινίσσεται το επίκεντρο των διεργασιών για μια εκπαιδευτική φιλοσοφία μέσα στο σύγχρονο επικοινωνιακό περιβάλλον. Οι διδασκαλίες αλλάζουν φορτίζονται επικοινωνιακά και μεταφέρουν ένα μεγάλο μέρος της λειτουργίας τους στις συμπεριφορές, στην συνεργασία, στην διαμεσολάβηση εργαλείων και διαφορετικών κωδίκων, στην ερμηνεία των διαφορετικών αναπαραστάσεων, στη διαπραγμάτευση, στη διαθεματικότητα, στην συναισθηματική συμμετοχή, στη βαθειά και ουσιαστική εμπλοκή των υποκειμένων στο πρόβλημα κατά ένα συλλογικό διϋποκειμενικό τρόπο που στοχεύει στο ξεπέρασμα του **μονολογικού υποκειμένου,** του οποίου το εκπαιδευτικό πρότυπο λειτούργησε καθόλη την νεοτερικότητα. Οι γενικεύσεις του νου έρχονται να γίνουν συνοηματοδοτήσεις, συνοψίσεις όλων των δυνατών εκδοχών που μια κοινότητα καταθέτει και συγκροτεί το έγκυρο μέσα στην ίδια την διαδικασία, ενεργοποιώντας τόσο νοητικούς και όσο και συγκινησιακούς παράγοντες.

1. Α. Αστρινάκης, Νέα φαινόμενα και μορφές περιθωριοποίησης της Νεολαίας στις σύγχρονες κοινωνίες, Επιθεώρηση κοινωνικών ερευνών,68Α, 1988 σελ 56-96.
2. P. Davis - R. Hersh, Μαθηματική Εμπειρία, Τροχαλία, 1990
3. Gerald M. Edelman (Nobel Ιατρικής), Αιθέρας Θεϊκός Λαμπερή Φωτιά, 1996, ΚΑΤΟΠΤΡΟ.
4. P. Ernest, The impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics, Mathematics Teaching, the state of the act, New York, The falmer Press, 1991, σελ 249-255.
5. L. Friedrich-A.H. Stein, 'Επιθετικά και κοινωνικά προγράμματα και η συμπεριφορά των παιδιών της προσχολικής ηλικίας', Εξελικτική ψυχολογία, τόμος Γ, επιμ. Βοσνιάδου, Gutenberg.
7. J. Habermas, Ο Φιλοσοφικός Λόγος της Νεοτερικότητας, Εκδ. Αλεξάνδρεια, 1995.
8. G.H. Hardy, η Απολογία ενός Μαθηματικού, Πανε/μιακές εκδ. Κρήτης 1993.
9. J. M. Healy, Μυαλά που κινδυνεύουν, Λύχνος 1996
10. Mac Keon, Communication, Truth, Society, Ethics, 1957.
11. M. Mc Luhan, Media, οι προεκτάσεις του ανθρώπου, μετάφραση εκδόσεις ΚΑΛΒΟΣ, 1990.
12. Λ. Μπαρζελιώτη, Γνωσιοθεωρία.
12. Μ. Ντάβου, Γνωστικοί και συναισθηματικοί παράγοντες επικοινωνίας, 1995
13. M. Perniola, η κοινωνία των ομοιωμάτων, ΑΛΕΞΑΝΔΡΕΙΑ Αθήνα, 1992.
14. Π. Σπύρου, Ζητήματα Κοινωνικής Ψυχολογίας στην Διδακτική των Μαθηματικών, Ευκλείδης Γ', Τόμος 12, Τεύχος 44, σ. 35-46, 1995.
15. Μπάμπη Τουμάση 'Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών', Gutenberg.
16. Δ.Γ. Τσαούση, Η κοινωνία του ανθρώπου, Gutenberg, 1993.
17. Ν. Χρηστάκης Α, Ψυχοκοινωνιολογία των μέσων μαζικής ενημέρωσης, 1994.
18. Ν. Χρηστάκη Β, Ακρόαση ροκ: Από την μουσική ένταξη στην κοινωνική ταυτότητα, Νεανική Κουλτούρα 61-67, 1994.

ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΨΥΧΟΛΟΓΙΑ

1 Εισαγωγή

Ο Descartes πίστευε ότι εγκεφαλική και πνευματική λειτουργία μπορούν να θεωρηθούν χωριστά, αν κι οι δυο αυτές ενέργειες εμπλέκονται και παρόλο που δεν μπορούσε να ξέρει πως. Από τότε η θεωρία γνώσης επαναφέρει διαρκώς αυτό το θέμα και αποπειράται απαντήσεις. Σήμερα, με την εξέλιξη της ψυχολογίας και της νευροφιλοσοφίας γνωρίζουμε περισσότερα για αυτή την εμπλοκή αλλά ωστόσο ερωτηματικά παραμένουν. Οι θεωρίες που προσπαθούν να ανάγουν τις πνευματικές λειτουργίες σε εκείνες τις εγκεφαλικές ονομάζονται *αναγωγικές*[1]. Οι θεωρίες που αναπτύχθηκαν στην ψυχολογία δέχθηκαν την επίδραση των ρευμάτων που επικρατούσαν στην φιλοσοφία. Αν και όλο τον ρεύμα του Λογικού Θετικισμού ήθελε να επιβάλει την άποψη ότι η φιλοσοφία δεν έχει καμία σχέση με την ψυχολογία, ωστόσο δυο γεγονότα αποτελούν ενδείξεις για το αντίθετο. Η επίδραση που είχε ο νεοθετικισμός στο ρεύμα της ψυχολογίας που καλείται *συμπεριφορισμός* με κύριο και καθαρό εκπρόσωπο τον Skinner, όπως επίσης κι η εκ νέου επαφή γνωσιολογίας και ψυχολογίας που προκάλεσε ο Quine με το άρθρο του (1969) Φυσικοποιημένη Επιστημολογία[2]. Ο P. Machamer[3] χωρίζει την σύγχρονη ψυχολογία σε τρία ρεύματα: στον *συμπεριφορισμό*, την *γνωσιοκρατία* (cognitivism) ή *κατασκευαστισμός* (constructivism) και τον ρεαλισμό.

2 Συμπεριφορισμός

Η συμπεριφοριστική προσέγγιση εμφανίστηκε στην αρχή του 20ου αιώνα με τον J. Watson (1919) στις Η.Π.Α. Η επιστημολογική επίδραση του νεοθετικισμού ήταν έντονη σε αυτό το ρεύμα με γνωστότερους υποστηρικτές τον C. Hull και ιδιαίτερα τον B. F. Skinner. Αναζήτησαν το πώς ένας οργανισμός μαθαίνει συμπεριφορές. Ένα ερέθισμα επηρεάζει τον οργανισμό, ο οποίος αντιδρά με κάποια συμπεριφορά. Οι παρακολούθηση της ενίσχυσης ή ελάτωσης της συμπεριφοράς προκαλεί ανάλογες αντιδράσεις και εκμαθήσεις. Σε αυτή την λογική, ο νους του μαθητή ή του τυχαίου ανθρώπου αντιμετωπίζεται ως ένα *μαύρο κουτί* για το οποίο δεν μπορώ να κάνω υποθέσεις παρά μόνο να παρακολουθήσω τις αντιδράσεις του, που θα εκδηλωθούν ως αντιδράσεις σε ερεθίσματα. Έτσι, θεωρείται άστοχο να χρησιμοποιηθούν νοητικοί όροι για να εξηγηθεί η συμπεριφορά. Η μέθοδος αυτή μελετά με την ίδια αποστασιωποίηση μια ομάδα περιστέρια όσο και μια ομάδα μαθητές.

Ο Νόαμ Τσόμσκυ άσκησε πρώτος μια κριτική στον συμπεριφορισμό με το επιχείρημα ότι ένας άνθρωπος έχει μια γλώσσα με την οποία μπορεί να παράγει στο μέλλον αμέτρητο αριθμό από προτάσεις που δεν έχουν ποτέ εκφωνηθεί. Αυτό δεν συνδέεται με μια πρότερη ενίσχυση.

Μετά την δεκαετία του 70 και την μελέτη της τεχνητής νοημοσύνης έχουμε την βαθμιαία υποχώρηση της σημασίας του συμπεριφορισμού. Ωστόσο, επέδρασε αποφασισιστικά στην επιστήμη της ψυχολογίας επιβάλλοντας τα των κριτήρια ποσοτικών ερευνών και την αντίληψη ότι οι θεωρίες στην ψυχολογία πρέπει να κατασκευάζονται από τα δεδομένα και όχι τις φιλοσοφικές ενδοσκοπήσεις των επιστημόνων. Η πειραματική πιστοποίηση προέχει[4].

---

[1] E. Hunt, What is a Theory of Thought pp. 3-49, & R. J. Stenberg, A Dialectical Basis for Understanding the Study of Cognition pp. 51-78, in Stenberg R. J. The Nature of Cognition.

[2] W. V. O. Quine, Epistemology Naturilized, In Epistemology, The Big Questions, Ed. L. M. Alcoff, Blakwell 1998, pp. 253-265.

[3] P. Machamer, Φιλοσοφία της Ψυχολογίας, 483 – 508, στο M. H Salmon & J. Earman & C. Clymour & J. G. Lennox & P. Machamer & J. D. Norton & W. C. Salmon & K. F. Schaffner, (1998), Εισαγωγή στη Φιλοσοφία της Επιστήμης, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

[4] P. Machamer, Φιλοσοφία της Ψυχολογίας και T. A. Harley, The Psychology of Language, From Data to Theory, Erlbaum (UK) Taylor & Francis, (1995).

3 Γνωσιοκρατία (κατασκευαστισμός)

O J. Bruner ηπήρξε ο ψυχολόγος που επέφερε την ρίξη με τον Συμπεριφορισμό 1957. Οι αναζήτησεις που προέκυψαν με τις μελέτες για "σκεπτόμενες μηχανές" έφερε σε πρωτεραιότητα την συνεισφορά του οργανισμού στη γνώση και τη θεωρία της αντίληψης. Η αντίληψη, υποστηρίχθηκε προχωρεί πέρα από τις πληροφορίες που προσφέρει το περιβάλλον. Ο Bruner κι οι συνεργάτες του αναζωογόνησαν το ενδιαφέρον για τη μελέτη των συγκινησιακών μεταβλητών, καθόσον αξίες, ανάγκες και προσδοκίες επηρεάζουν τα όσα αντιλαμβανόμαστε[5]. Ο Bruner ήταν αυτός που επέβαλε στον αγγλοσαξωνικό κόσμο δυο άλλους σημαντικούς ψυχολόγους τον ελβετό J. Piaget και τον ρώσσο L. S. Vygotsky[6].

4 Ο J. Piajet και η Γενετική Επιστημολογία

O Jean Piaget (1896-1980) γεννήθηκε στην Ελβετία. Ασχολήθηκε με τη βιολογία, τη ζωολογία και ενδιαφέρθηκε για τη φιλοσοφία. Ήδη σε ηλικία 15 ετών δέχεται την επίδραση του H. Bergson. To 1918 υποστηρίζει τη διδακτορική διατριβή με θέμα την οστρακολογία. Παρακολουθεί μαθήματα ψυχολογίας στο Εργαστήριο Ψυχολογίας του Carl Jung, και εκεί ανακαλύπτει την Κλινική Μέθοδο (αρχικά ιδέα του Freud). O Piaget είναι ο πρώτος μέσα στην πειραματική ψυχολογία που εισάγει την κλινική συνέντευξη και τις ποιοτικές αναλύσεις, ιδέες που αποτελούσαν ταμπού και ατόπημα για τον συμπεριφορισμό ο οποίος πρότεινε μόνο ποσοτικές μεθόδους[7]. παρατηρώντας τον τρόπο με τον οποίο ο Jung και ο Bleuler διεξήγαγαν τις συνεντεύξεις με τους ψυχικά ασθενείς. Το 1919 πηγαίνει στο Παρίσι και παρακολουθεί μαθήματα Λογικής και Φιλοσοφίας της Επιστήμης στη Σορβόνη, καθώς και Ψυχοπαθολογίας στο Νοσοκομείο Σαλπετριέρ. Στο Παρίσι γνωρίζει το έργο του Αμερικανού ψυχολόγου J. Baldwin, ενός από τους πρωτεργάτες της Πειραματικής Ψυχολογίας.

Την ίδια περίοδο, ο T. Simon, στενός συνεργάτης του A. Binet, του ανέθεσε τη στάθμιση των τεστ συλλογισμού του Burt. Το ενδιαφέρον του Piaget στράφηκε προς το είδος των εσφαλμένων απαντήσεων των παιδιών, πράγμα που τον οδήγησε στη διερεύνηση των βασικών μηχανισμών σκέψης του παιδιού. Η διανοητική ανάπτυξη του παιδιού και του εφήβου θα αποτελέσει έκτοτε το βασικό αντικείμενο των μελετών του. Ωστόσο, ο ίδιος έχει δηλώσει ότι δεν θεωρεί τον εαυτό του παιδοψυχολόγο, με την έννοια ότι το ενδιαφέρον του για το παιδί και την ανθρώπινη νοημοσύνη εντάσσεται στα πλαίσια του ευρύτερου επιστημολογικού του προβληματισμού, που αφορά τη σχέση της βιολογίας με τη γνώση.

Το 1921 έχει ήδη δημοσιεύσει αρκετά από τα αποτελέσματα των ερευνών του και επιστρέφει στην Ελβετία και αναλαμβάνει τη διεύθυνση του Ινστιτούτου Jean-Jacques Rousseau της Γενεύης. Από το 1926 έως το 1929 διετέλεσε καθηγητής Φιλοσοφίας στο Πανεπιστήμιο του Nechâtel και το 1929 έγινε καθηγητής της Ιστορίας της Επιστημονικής Σκέψης στο Πανεπιστήμιο της Γενεύης. Καθ'όλη τη διάρκεια της ζωής του, δίδαξε σε διάφορα πανεπιστήμια, αλλά το επίκεντρο των δραστηριοτήτων του υπήρξε το Ινστιτούτο J. J. Rousseau, στο οποίο συνέχισε να εργάζεται ακόμα και μετά τη συνταξιοδότησή του το 1974, μέχρι το τέλος της ζωής του. Το 1930 έγινε διευθυντής του Διεθνούς Ινστιτούτου Εκπαίδευσης που υπήρξε πρόδρομος της UNESCO. Ως διευθυντής του Εργαστηρίου Ψυχολογίας του Πανεπιστημίου της Λωζάνης, συνεργάστηκε ως

[5] P. Machamer, Φιλοσοφία της Ψυχολογίας

[6] R. Gross, Psychology, The Science of Mind and Behaviour, Holder & Stoughton 1996.

[7] Ginsburg H. (1981), The Clinical Interview in Psychological Research on Mathematical Thinking: Aims, Rationales, Techniques, *For The Learning Mathematics, 1,3 57-64.*

αρχισυντάκτης στην έκδοση της Ελβετικής Επιθεώρησης Ψυχολογίας. Το 1952 έγινε καθηγητής Ψυχολογίας του Παιδιού στο Πανεπιστήμιο της Σορβόνης, και το 1955 ίδρυσε στη Γενεύη το Διεθνές Κέντρο Γενετικής Επιστημολογίας. Πέθανε το 1980 στη Γενεύη.

Στο πρώτο του βιβλίο *Η γλώσσα και η σκέψη του παιδιού*, (1923) μελέτησε τις ιδιαιτερότητες της λογικής του παιδιού, που χαρακτηρίζεται από έναν εγωκεντρισμό, με την έννοια ότι το παιδί αδυνατεί να δει τα πράγματα από τη σκοπιά του άλλου. Ακολούθησε μια σειρά βιβλίων που αναλύουν τα βασικά χαρακτηριστικά της σκέψης του παιδιού, μεταξύ των οποίων είναι: Η κρίση και ο συλλογισμός του παιδιού, (1924), Η φυσική αιτιότητα στο παιδί, (1927), Η ηθική κρίση του παιδιού, (1932), Μια λεκτική μορφή της σύγκρισης στο παιδί, (1921), Η αναπαράσταση του κόσμου στο παιδί, (1926), Η γέννηση της νοημοσύνης, (1936), Η διαμόρφωση του συμβόλου, (1946). Η ψυχολογία της νόησις (1947), Εισαγωγή στη Γενετική Επιστημολογία, (1950), Οι μετασχηματισμοί των λογικών λειτουργιών, (1952), Οι αντιληπτικοί μηχανισμοί, (1961), Η εξισορρόπηση των γνωστικών δομών, (1975).

Η συμβολή των θεωριών του Piaget στις γνώσεις μας για την ανθρώπινη νοημοσύνη, την ανάπτυξη και τη λειτουργία της, παραμένει αναμφισβήτητη. Εκείνο ωστόσο που είναι χαρακτηριστικό είναι η μελέτη του για το καντιανό επιστημικό υποκείμενο, τα βασικά χαρακτηριστικά του νου όσο αφορά τις κατηγορίες του χώρου του χρόνου, της πιθανότητας, της αναγκαιότητας, της δικαιολόγησης, της μη αντίφασης, του αριθμού, της λογικής[8]. Την επιστήμη αυτή ως μεταίχμιο επιστημολογίας και ψυχολογίας ονόμασε **Γενετική Επιστημολογία.** Judgement and reasoning in the child. (1928). The equilibration of cognitive structures (1985), Possibility and necessity Vol. 2 (1987), (& Sieminska) Child's conception of number, (1952), (& Garcia) understanding of causality, (1974) Towards a logic of meanings (1991), (& Garcia & Grize) Epistemology and psychology of functions (1977) (& Inhelder) Child's Conception of Space (1956), (& Inhelder & Siminska) Chlild's conception of Geometry (1960). On Contradiction, (1972). Beth – Piaget, Epistemology and Psychology of Mathematics, (1968), Child's Conception of Time (1960).

Κονστρουκτιβισμός[9] στη Διδακτική των Μαθηματικών (Η Θεωρία Κατασκευής της Γνώσης). Σύμφωνα με τους Steffe και Kieren, οι έρευνες στη Διδακτική των Μαθηματικών επηρεασμένες από τη Θεωρία της Γενετικής Εξέλιξης του J. Piaget, πέρασαν από διάφορα στάδια προκειμένου να φθάσουν στη σημερινή τους μορφή. Ετσι, μέχρι περίπου τα μέσα της δεκαετίας του 70, ο βασικός στόχος ήταν να δείξουν ότι οι μαθηματικές δομές θα μπορούσαν να χρησιμεύσουν ως μοντέλα περιγραφής των μαθηματικών γνώσεων του παιδιού, όπως οι γενετικές δομές ήταν τα αντίστοιχα μοντέλα της νοητικής ανάπτυξης. Σταδιακά, άρχισε να γίνεται κατανοητό το γεγονός ότι οι γενετικές δομές του Piaget ήταν μοντέλα ερμηνείας της συμπεριφοράς του παιδιού και όχι ένα υποθετικο-παραγωγικό σύστημα. Αυτό σημαίνει ότι οι ερευνητές έπρεπε να κατασκευάσουν τα δικά τους μοντέλα προκειμένου να εξυπηρετήσουν τους σκοπούς τους και όχι να χρησιμοποιούν τις παρατηρήσεις του Piaget. Τούτο σηματοδοτεί τη μεγάλη καμπή. Η καμπή αυτή, με τη σειρά της, οδήγησε σε αυτό που σήμερα ονομάζουμε Θεωρία Κατασκευής της Γνώσης (Constructivism), όπου οι ερευνητές παρατηρούν και περιγράφουν τους μηχανισμούς με τους οποίους το παιδί οικοδομεί τις μαθηματικές του γνώσεις, μέσα σε ένα συγκεκριμένο μαθησιακό περιβάλλον.

---

[8] S. Meadows, Piaget's Contribution to Understanding Cognitive Development: An Assessment for the Late 1980s, & H. Ginsburg, Piaget and Education: The Contributions and Limits of Genetic Epistemology, in Ken Richardson & Sue Sheldon, Cognitive Development to Adolescence, Open University set book, 1993. Philip M. Davidson. Genevan Contributions to Characterizing the Age 4 transition, Human Development 1992, 35: 165-171. Α. Δημητρίου, Γνωστική Ανάπτυξη, Τομος 1, Piaget και Νεοπιαζετιανοί. ART TEXT, 1993.

[9] Αν θα θέλαμε να αναζητήσουμε βαθύτερα στον χρόνο και τη φιλοσοφία τις ρίζες της κονστρουκτιβιστικής αυτής αντίληψης, θα πηγαίναμε πολύ πίσω και από τον Kant, σε έναν άλλο Γερμανό φιλόσοφο του 16ου αιώνα τον Valentine Weigel (1533 - 1588), Κ. Ι. Λογοθέτου, Η φιλοσοφία της αναγεννήσεως, ΟΕΣΒ, 1956.

Τυπικά, η αρχή του Κονστρουκτιβισμού τοποθετείται το 1975, όταν ο Von Glaserfeld παρουσίασε τις ιδέες του στην Εταιρεία J. Piaget της Philadelphia των Η.Π.Α. Οι ιδέες του Glaserfeld, στηριγμένες στη Γενετική Επιστημολογία του Piaget, οδήγησαν στον Ριζοσπαστικό Κονστρουκτιβισμό (Radical Constructivism) και τελικά άνοιξαν το δρόμο για μια νέα εποχή στη μαθηματική εκπαίδευση. Όμως, παρά το γεγονός της ευρείας δημοσιότητας των ιδεών του Glaserfeld, μόλις το 1983 παρουσιάστηκε άρθρο με τη λέξη *constructivism* στον τίτλο του. Στο άρθρο αυτό τονίζεται ότι δεν είναι αποφασιστικές για την νοητική του ικανότητα, οι επεμβάσεις των ενηλίκων καθ'εαυτές που επιδρούν στην κατασκευή της γνώσης του παιδιού, αλλά οι εμπειρίες του παιδιού από αυτές τις επεμβάσεις, έτσι όπως αυτό τις ερμηνεύει βασιζόμενο στις ήδη υπάρχουσες γνώσεις του. Ο ενήλικας δεν μπορεί να προκαλέσει στο παιδί εμπειρίες διαμέσου των δικών του εμπειριών. Επομένως, ο δάσκαλος δίνει τις ευκαιρίες στο μαθητή για μαθηματικές δραστηριότητες, αλλά εξαρτάται από τον ίδιο το μαθητή να οικοδομήσει τη δική του γνώση μέσα από αυτές τις δραστηριότητες.

Γενικά, ο Ριζοσπαστικός Κονστρουκτιβισμός προσδιορίζεται από τις ακόλουθες δύο υποθέσεις:

1. Η γνώση κατασκευάζεται ενεργητικά από το υποκείμενο και δεν *συλλαμβάνεται* παθητικά από το περιβάλλον.

2. Η γνώση είναι μια διαδικασία προσαρμογής με τον κόσμο των εμπειριών, κι όχι η ανακάλυψη ενός προϋπάρχοντος κόσμου, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από το γνώστη.

Η δεύτερη υπόθεση, η οποία μπορεί να προκαλέσει κι αντιπαραθέσεις, έχει διατυπωθεί από τον Von Glaserfeld ως εξής: *Η πραγματικότητα με μια απόλυτη έννοια βρίσκεται έξω από τη σφαίρα της πειραματικής επαλήθευσης*.

Ο Ριζοσπαστικός Κονστρουκτιβισμός έχει σοβαρές συνέπειες για τη μαθηματική εκπαίδευση. Για παράδειγμα, η έννοια της κατανόησης μιας μαθηματικής ιδέας χάνει τον απόλυτο χαρακτήρα της και απόκτά μια *εξατομικευμένη* μορφή, η οποία πρέπει να γίνει αντικείμενο διαπραγμάτευσης μέσα στην τάξη. Ετσι λοιπόν, το νόημα της έννοιας προσδιορίζεται από τη χρήση της στα πλαίσια της μαθηματικής κοινότητας, η οποία δρα στη συγκεκριμένη στιγμή ως μια *επιστημονική* κοινότητα. Δηλαδή, σε κάθε περίπτωση, η έννοια έχει ένα νόημα *κοινωνικά* προσδιορισμένο, που, με τη σειρά του, βασίζεται στα standards της ευρύτερης Μαθηματικής Κοινότητας. Η αντίληψη αυτή επιδρά τόσο στον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να γίνονται οι δραστηριότητες μέσα στην τάξη, όσο και στον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόμαστε τη θέση και το ρόλο του δασκάλου μέσα στην τάξη.

Η αποδοχή του Κονστρουκτιβισμού είχε επίσης σοβαρή επίδραση στην έρευνα. Ο βασικός σκοπός είναι να μελετήσουμε την κατασκευή των μαθηματικών εννοιών και πράξεων με τις οποίες ο μαθητής προσπαθεί να οργανώσει τις εμπειρίες του. Στο έργο αυτό κυριαρχεί η Γενετική επιστημολογία του Piaget και ιδιαίτερα ο όρος *αναστοχαστική αφαιρετική* διαδικασία (reflective abstraction). Σύμφωνα με την αναστοχαστική αφαιρετική διαδικασία, η μάθηση είναι δυνατή επειδή είμαστε ικανοί να ανακαλύπτουμε κοινές ιδιότητες σε διαφορετικού είδους εμπειρίες, τις οποίες *αποθηκεύουμε* στη μνήμη για μελλοντική χρήση. Η νοητική αναπαράσταση μιας κοινής ιδιότητας είναι αυτό που ονομάζουμε έννοια. Οποτεδήποτε βλέπουμε ή ακούμε κάτι στο περιβάλλον, ανακαλούμε από τη μνήμη μας μια έννοια που θεωρούμε σχετική. Παριστάνοντας τις έννοιες με σύμβολα μπορούμε να τις ανακαλέσουμε ανά πάσα στιγμή χωρίς την ανάγκη εξωτερικού ερεθίσματος. Στην περίπτωση αυτή η έννοια έχει γίνει ένα νοητικό αντικείμενο (mental object), το οποίο διαπραγματευόμαστε με διάφορους τρόπους. Με τον ίδιο τρόπο, μπορούμε να ομαδοποιήσουμε έννοιες από μια κοινή τους ιδιότητα, σχηματίζοντας έννοιες ανωτέρας τάξεως. Οι διαδοχικές αφαιρετικές διαδικασίες που απαιτούνται για τη δημιουργία εννοιών ανωτέρας τάξεως, προσδιορίζουν το νόημα του όρου reflective abstraction.

Η κονστρουκτιβιστική[10] έρευνα επηρέασε τόσο τη διδακτική πρακτική όσο και τον προσανατολισμό της μαθηματικής εκπαίδευσης. Οι γενικές αρχές στις οποίες στηρίζονται σήμερα τα νέα διδακτικά μοντέλα είναι οι ακόλουθες:

1. Η γνώση είναι πάντα συνδεδεμένη με το γνώστη. Η γνώση κατασκευάζεται πάντα από τον ίδιο και δεν μεταφέρεται.
2. Η νέα γνώση βασίζεται στα ήδη υπάρχοντα γνωστικά σχήματα του υποκειμένου.
3. Η νέα γνώση θεσμοθετείται ως *επίσημη* γνώση μέσα στο περιβάλλον της μαθητικής κοινότητας, η οποία δρα ως *επιστημονική* κοινότητα. Στο νέο αυτό πλαίσιο τα μαθηματικά είναι τόσο δραστηριότητες που επιτρέπουν την κατασκευή της γνώσης, όσο και ένα σύνολο γνώσεων.

6 L. S. Vygotsky:

Αυτό που χαρακτηρίζει τον L. S. Vygotsky είναι μια αντιδογματική μαρξιστική φιλοσοφία που θεωρεί την ανθρώπινη συνείδηση προϊόν κοινωνικοποίησης και προσδιορισμένης μέσα στο κοινωνικό και οικονομικό σύστημα που εξετάζεται. Ο νους καθορίζεται από κατηγορίες εξαρχής κοινωνικοψυχολογικές που εσωτερικεύονται στην συγκεκριμένη συνείδηση του εκάστοτε ατόμου. Στο σημείο αυτό έχει βασικές διαφορές με τον Piaget. Ο τελευταίος θεωρεί ότι η νοητική ανάπτυξη αρχίζει με ένα εσωτερικό εγωκεντρικό λόγο του παιδιού που βαθμιαία εξελίσσεται σε κοινωνικό. Αντίθετα, ο ρώσσος ψυχολόγος θεωρεί ότι ο εγωκεντρικός λόγος του παιδιού είναι αποτέλεσμα ενός πρότερου κοινωνικού λόγου που περιβάλλει το παιδί.

Σχήμα Piaget:

Εξωγλωσσικός αυτιστικός λόγος → εγωκεντρικός λόγος και σκέψη → κονωνικοποιημένος λόγος και λογική σκέψη

Σχήμα Vygotsky:

κοινωνικός λόγος → εγωκεντρικός λόγος → εσωτερικός λόγος → γραπτή γλώσσα (η άλγεβρα της γλώσσας).

Ο Vygotsky στο βιβλίο "Σκέψη και Γλώσσα"[11] μελετά πολλά ζητήματα που αφορούν την διαλεκτική οργάνωση της γλώσσας μέσα στο νού ως διαμεσολαβητικό εργαλείο της κοινωνικοποίησης του ατόμου και της εξασφάλισης της αφαιρετικής σκέψης. Για το ψυχολόγο, μια έννοια κατανοείται όταν έχει ξεπεραστεί και ειδοθεί σε ένα ανώτερο αφαιρετικό επίπεδο. Το παιδί καταλαβαίνει καλύτερα την αριθμητική όταν μάθει την άλγεβρα, γιατί απελευθερώνει αυτή την μάθηση από τις συγκεκριμένες αριθμητικές πράξεις. Σε αυτή την περίπτωση ισχυρίζεται, η προηγούμενη δομή καταρρέει και εμφανίζεται η νέα. Αν π.χ ένα παιδί έχει μάθει να χειρίζεται την ιδέα του χ σε μια αναζήτηση αγνώστου σε πρόβλημα, είναι πολύ δύσκολο να ξαναγυρίσει σε λύσεις προβλήματος με τεχνικές προαλγεβρικές που μαθαίνει στην αριθμητική περίοδο[12]. Έχει ενδιαφέρον η θέση του για το παιχνίδι σε σχέση με την αφαιρημένη σκέψη.

---

[10] Ernst von Glasersfeld (1983), Learning as a Constructive Activity, In J. C. Bergeron & N. Herscovics (Eds) Proceedings of the Fifth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 42-69). Montreal University de Montreal, Faculte de Science se l' Education.
& (1991) Radical constructivism in mathematics education. Dortrecht: Kluwer. & Abstraction, representation and reflection: An interpretation of experience and Piaget's approach. In L. P. Steffe (Ed.) Epistemological Functions of Mathematical experience (pp. 45-67). New York: Springer-Verlag. & Jeremy Kilpatrick, What Constructivism Might Be in Mathematics.

[11] L. S. Vygotsky (1993), Σκέψη και Γλώσσα, (μετάφραση Α. Ρόδη), ΓΝΩΣΗ.
[12] Στο ίδιο σελ. 339.

Το παιχνίδι[13]

Το παιχνίδι είναι μια ανθρώπινη δραστηριότητα που αρχίζει από την παιδική ηλικία και δεν σταματά ποτέ. Το παιχνίδι διεγείρει την φαντασία όχι μόνο των παιδιών αλλά στοχαστών και φιλοσόφων. Ο Piaget είχε αναδείξει πόση σημασία έχει για το παιδί η λειτουργία δοκιμή – λάθος για την πρωταρχικές καταχωρήσεις που συγκροτούν την σκέψη. Οι φιλόσοφοι της Μαθηματικών συνδέουν το παιχνίδι με τις πλέον βασικές ικανότητες της συνδυαστικής σκέψης που προηγείται κι εκείνη της Λογικής μας. Μια τέτοια είναι η πολύ βασική λεγόμενη Αρχή του Περιστερώνα (αν έχουμε ένα αριθμό από ν φωλιές και ν+1 περιστέρια τότε σε μια φωλιά θα καθίσουν 2 περιστέρια).

Ο άνθρωπος επικοινωνεί με σύμβολα και συνδυασμούς αυτών των συμβόλων με βάση κάποιους κανόνες που επιβάλλουν τόσο οι κοινωνικές συμβάσεις όσο κι η σχέση μας με την φύση. Ο μεγάλος φιλόσοφος του 20ου αιώνα L. Wittgenstein[14] αναφερόμενος σε αυτούς τους συνδυασμούς των συμβόλων με τους οποίους οι άνθρωποι καθορίζουν την επικοινωνία τους και θέτουν τα προβλήματά τους μιλά για Γλωσσικά Παιχνίδια. Έτσι, θέλουν να βλέπουν συχνά το παιχνίδι οι μαθηματικοί όπως για παράδειγμα ο Ζερβός[15] ως ένα σύστημα κανόνων που θυμίζει μαθηματικά ή τα πνευματικά παιχνίδια. Άλλωστε υπάρχει ολόκληρος κλάδος των Μαθηματικών που ονομάζεται Θεωρία των Παιγνίων. Η εκδοχή αυτή θέτει την ιδέα του προβλήματος σε ένα αρκετά εξυψωμένο νοητικό επίπεδο. Ωστόσο, αν ανατρέξουμε στον Vygotsky[16] έχει επεργαστεί μια πλήρη θεωρία για το παιχνίδι:

Το να ορίσουμε το παιχνίδι ως δραστηριότητα που δίνει χαρά στο παιδί θα ήταν ανακριβές για δυο λόγους: Καταρχάς υπάρχουν πολλές δραστηριότητες, όπως για παράδειγμα το πιπίλισμα του δακτύλου, που προσφέρουν στο παιδί πολύ πιο έντονη ευχαρίστηση. Κατά δεύτερο λόγο, υπάρχουν παιχνίδια στα οποία η δραστηριότητα αυτή καθαυτή δεν είναι απολαυστική. Για παράδειγμα, κάποια παιχνίδια προς το τέλος της προσχολικής ηλικίας και την αρχή της σχολικής, δίνουν χαρά στο παιδί μόνο αν το αποτέλεσμα παρουσιάζει ενδιαφέρον. Το ίδιο συμβαίνει και στα αθλήματα (πνευματικά και μη) όπου το παιδί μπορεί να κερδίσει ή να χάσει: παρατηρείται συχνά έντονη δυσαρέσκεια όταν το αποτέλεσμα δεν είναι το επιθυμητό.

Όμως, ενώ η χαρά δεν μπορεί να θεωρηθεί το κύριο χαρακτηριστικό του παιχνιδιού, φαίνεται πως οι θεωρίες που αγνοούν ότι τα παιδιά, παίζοντας, ικανοποιούν τις ανάγκες τους, καταλήγουν στην αυθαίρετη πνευματικοποίησή του. Γενικά, όσον αφορά στην ανάπτυξη του παιδιού, πολλοί θεωρητικοί κάνουν το σφάλμα να μη λαμβάνουν υπόψη τις ανάγκες του, που περιλαμβάνουν οτιδήποτε αποτελεί κίνητρο για δράση. Συχνά, η ανάπτυξη του παιδιού περιγράφεται με την ανάπτυξη των διανοητικών του λειτουργιών: κάθε παιδί αντιμετωπίζεται σαν θεωρητικός που μεταβαίνει από το ένα επίπεδο στο άλλο, και χαρακτηρίζεται από ένα υψηλό ή χαμηλό επίπεδο πνευματικής ανάπτυξης….

Συνήθως τα μικρά παιδιά ικανοποιούν τις επιθυμίες τους άμεσα…. Εάν κατά τα σχολικά χρόνια δεν αναπτύσσονταν οι μη άμεσα πραγματοποιήσιμες ανάγκες, δεν θα υφίστατο παιχνίδι, αφού, όπως φαίνεται, το παιδί ανακαλύπτει το παιχνίδι όταν αρχίζει να βιώνει απραγματοποίητες τάσεις. … το παιδί της προσχολικής ηλικίας μπαίνει σ'έναν μαγικό κόσμο, όπου οι ανεκπλήρωτες επιθυμίες μπορούν να πραγματοποιηθούν: ο κόσμος αυτός είναι το παιχνίδι….

---

[13] L. S. Vygotsky (1997), Νους και Κοινωνία, (μετάφραση Α. Μπίμπου- Σ. Βοσνιάδου) Gutenberg.

[14] L. Wittgenstein (1977), Φιλοσοφικές Έρευνες, (μετάφραση Π. Χριστοδουλίδης), ΠΑΠΑΖΗΣΗΣ.

[15] Σ. Π. Ζερβός, Πώς μπορούν ο πατέρας και η μητέρα να διδάξουν το παιδί τους νεώτερα μαθηματικά (διάλεξη στο Αττικό Λύκειο 1974).

[16] L. S. Vygotsky, Νους και Κοινωνία, Σελ. 157-175.

…Η παλιά αντίληψη ότι το παιχνίδι του παιδιού είναι η φαντασία σε δράση, θα πρέπει να αντιστραφεί: μπορούμε να πούμε πως η φαντασία στους ενήλικες και τα σχολιαρόπαιδα είναι το χωρίς δράση παιχνίδι…

… αν το παιχνίδι γίνεται αντιληπτό ως συμβολικό, υπάρχει κίνδυνος να θεωρηθεί ως δραστηριότητα παρόμοια με την άλγεβρα. Δηλαδή, όπως η άλγεβρα, έτσι και το παιχνίδι μπορεί να θεωρηθεί ως σύστημα σημείων που γενικεύουν την πραγματικότητα χωρίς να έχει τις ιδιότητες που κατά τη γνώμη μου χαρακτηρίζουν το παιχνίδι. Το παιδί θ' αντιμετωπισθεί Σα μαθηματικός που αν και Δε μπορεί ακόμη να γράψει τα σημεία, ωστόσο μπορεί να τα απεικονίσει στην πράξη. Πιστεύω ότι το παιχνίδι δεν είναι πραγματικά συμβολική πράξη… Αρκετοί ερευνητές… αφού εξέτασαν το προσχολικό παιχνίδι μέσα από τη μελέτη του μεταγενέστερου και βασισμένου σε κανόνες παιχνιδιού, συμπέραναν ότι αν κι έχει να κάνει με μια φανταστική κατάσταση, στην πραγματικότητα πρόκειται για παιχνίδι με κανόνες.

Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι δεν υπάρχει παιχνίδι χωρίς κανόνες. Σε κάθε παιχνίδι, η φανταστική κατάσταση εμπεριέχει κανόνες συμπεριφοράς, ακόμη κι όταν αυτοί δεν ορίζονται εξαρχής. Όταν το κοριτσάκι υποδύεται τη μητέρα έχοντας την κούκλα του για παιδί, υιοθετεί τους κανόνες της μητρικής συμπεριφοράς…. Τα μικρά παιδιά μπορούν και ταυτίζουν το παιχνίδι με την πραγματικότητα… Δυο αδελφές πέντε κι επτά ετών, πρότειναν η μια στην άλλη να υποδυθούν τις αδελφές – ν αναπαραστήσουν δηλαδή την πραγματικότητα… Η απόφασή τους να παίξουν τις αδελφές, τις ωθεί να υιοθετήσουν κανόνες συμπεριφοράς. Στο παιχνίδι τους αυτό είναι αποδεκτές μόνο πράξεις που συμμορφώνονται με ορισμένους κανόνες: ντύνονται πανομοιότυπα, μιλάνε με τον ίδιο τρόπο και αναπαριστάνουν οτιδήποτε τονίζει την αδελφική τους σχέση… Ό,τι περνάει απαρατήρητο για το παιδί στην πραγματική ζωή, γίνεται κανόνας συμπεριφοράς στο παιχνίδι… η συμπεριφορά θα προκύπτει από κανόνες…

Ωστόσο, όπως αποδείχθηκε, τα αποκαλούμενα ως *παιχνίδια κανόνων* είναι κυρίως παιχνίδια φανταστικών καταστάσεων… το σκάκι για παράδειγμα δημιουργεί μια φανταστική κατάσταση… Παρόλο που δεν προσφέρει άμεσα υποκατάστατα πραγματικής ζωής, είναι ένα είδος φανταστικής κατάστασης. .. κάθε φανταστική κατάσταση κρύβει κανόνες και κάθε παιχνίδι με κανόνες κρύβει μια φανταστική κατάσταση. Η μετάβαση από τα παιχνίδια που έχουν μια ορατή φανταστική κατάσταση και κρυφούς κανόνες στα παιχνίδια με φανερούς κανόνες και κρυφή φανταστική κατάσταση, περιγράφει την εξέλιξη του παιδικού παιχνιδιού.

Δράση και νόημα στο παιχνίδι.

Η επίδραση του παιχνιδιού στην ανάπτυξη του παιδιού είναι τεράστια. … Πειράματα έχουν δείξει ότι οι πράξεις των μικρών παιδιών καθορίζονται από τους περιορισμούς που ενυπάρχουν σε μια κατάσταση. Για παράδειγμα έχει δειχθεί ότι το παιδί αντιμετωπίζει μεγάλη δυσκολία να αντιληφθεί ότι πρώτα πρέπει να γυρίσει την πλάτη του σε μια πέτρα και μετά να καθίσει επάνω της… Πειράματα έχουν δείξει ότι είναι αδύνατο για τα πολύ μικρά παιδιά να διαχωρίσουν το *πεδίο του νοήματος* από το *οπτικό πεδίο* , επειδή το νόημα και η οπτική εμπειρία είναι συγχωνευμένα….

Τα παιδιά κι αφασικοί …. Ζούνε σε ένα υπερεαλιστικό κόσμο όπου δεν υπάρχουν συμβολισμοί… βλέπε και J. Gabel, Ψευδής Συνείδηση, εκδόσεις ΑΚΜΩΝ 1978… ένα κοριτσάκι δυο ετών του ζητήσουμε να επαναλάβει την πρόταση «Η Τάνια στέκεται» όταν η Τάνια κάθεται μπροστά της, θα την αλλάξει και θα πει «Η Τάνια κάθεται». Ασθενείς αφασικοί δεν μπορούν να που ψέματα. Ο ασθενή κοιτά το παράθυρο και ο καιρός είναι πολύ καλός. Του ζητείται να πει «Ο καιρός είναι απαίσιος» και ο ασθενής λέει «Ο καιρός είναι υπέροχος».

Κάποια διάσταση ανάμεσα στο νοηματικό και το οπτικό πεδίο εμφανίζεται για πρώτη φορά στην προσχολική ηλικία. Στο παιχνίδι η σκέψη διαχωρίζεται από τα αντικείμενα, και η δράση είναι επακόλουθο ιδεών μάλλον παρά πραγμάτων: ένα κομμάτι ξύλου γίνεται κούκλα κι ένα ραβδί γίνεται άλογο. Η δράση βάσει κανόνων αρχίζει να καθορίζεται από ιδέες κι όχι από τα ίδια τα αντικείμενα…Το παιδί δεν το κάνει αυτό απότομα γιατί του είναι δύσκολο να διαχωρίσει τη σκέψη (το νόημα μιας λέξης) από το αντικείμενο… η λεγόμενη *αντίληψη των πραγματικών αντικειμένων,* δηλαδή και του νοήματος. Αυτό είναι κάτι που δεν έχει το ανάλογό του στην αντίληψη των ζώων. Οι άνθρωποι δεν βλέπουν απλώς κάτι στρογγυλό και μαύρο με δυο δείκτες. Βλέπουν ένα ρολόι, και μπορούν να διαχωρίσουν το ένα αντικείμενο από το άλλο…

Η δομή της ανθρώπινης αντίληψης θα μπορούσε να εκφραστεί μεταφορικά με μιαν αναλογία στην οποία το αντικείμενο είναι ο αριθμητής και το νόημα ο παρονομαστής (αντικείμενο/νόημα). Αυτή η αναλογία συμβολίζει ότι ολόκληρη η ανθρώπινη αντίληψη συντίθεται από γενικευμένες μάλλον παρά μεμονωμένες αντιλήψεις. Για το παιδί, το αντικείμενο κυριαρχεί στην αναλογία αντικείμενο/νόημα, και το νόημα υπάγεται στο αντικείμενο. Στην κρίσιμη στιγμή, όταν ένα ραβδί γίνεται ο άξονας για να διαφοροποιηθεί το νόημα του αλόγου από ένα αληθινό άλογο, αυτό το κλάσμα αντιστρέφεται και το νόημα υπερισχύει. Έτσι έχουμε την αναλογία νόημα/αντικείμενο.

… Στο παιχνίδι ένα παιδί κάνει αυθόρμητα χρήση της ικανότητας του να διακρίνει τη σημασία από το αντικείμενο χωρίς να καταλάβει ότι το κάνει, όπως επίσης δεν συνειδητοποιεί ότι μιλά σε πεζό λόγο, απλώς το κάνει, χωρίς να δίνει σημασία στις λέξεις. Έτσι, μέσα από το παιχνίδι, το παιδί φτάνει σ' ένα λειτουργικό ορισμό των εννοιών ή των αντικειμένων, και οι λέξεις αποτελούν τμήμα του αντικειμένου. … στο παιχνίδι υιοθετεί τον τρόπο της ελάχιστης αντίστασης – κάνει ό,τι του αρέσει περισσότερο επειδή το παιχνίδι συνδέεται με την ευχαρίστηση – και συγχρόνως μαθαίνει ν' ακολουθεί τον τρόπο της μεγαλύτερης αντίστασης, καθώς υποτάσσει τον εαυτό του σε κανόνες, και απαρνιέται, έτσι, αυτό που θέλει, αφού η πειθάρχηση στους κανόνες και η αποκήρυξη των αυθόρμητων πράξεων αποτελούν τη μέγιστη ευχαρίστηση στο παιχνίδι.

Το παιχνίδι συνεχώς απαιτεί από το παιδί να ενεργεί ενάντια στις άμεσες παρορμήσεις του. Σε κάθε βήμα το παιδί είναι αντιμέτωπο με μια σύγκρουση ανάμεσα στους κανόνες του παιχνιδιού και στο τι θα έκανε αν μπορούσε ξαφνικά να δράσει αυθόρμητα. .. Το παιδί στο παιχνίδι πετυχαίνει το μέγιστο αυτοέλεγχο.

…Έτσι, το βασικό χαρακτηριστικό του παιχνιδιού είναι ο κανόνας που έγινε επιθυμία. Οι θεωρίες του Spinoza για «την ιδέα που έχει γίνει επιθυμία, την έννοια που μετατρέπεται σε πάθος», βρίσκουν τα πρότυπά τους στο παιχνίδι, που είναι το βασίλειο του αυθορμητισμού και της ελευθερίας. Ο κανόνας επικρατεί, επειδή είναι η πιο δυνατή παρόρμηση. Κανόνας αυτού του είδους είναι ένας εσωτερικός κανόνας αυτοπεριορισμού και αυτοδιάθεσης, όπως λέει ο Piaget, και όχι ένας κανόνας στον οποίο υπακούει το παιδί σαν να είναι νόμος της φύσης. Με λίγα λόγια, το παιχνίδι δίνει νέα μορφή στις επιθυμίες του.

… Όπως έχουμε την αναλογία αντικείμενο/έννοια έχουμε και την αναλογία έννοια/αντικείμενο… Το παιδί δεν συμπεριφέρεται μ' ένα καθαρά συμβολικό τρόπο στο παιχνίδι. Μάλλον σχηματίζει επιθυμίες τις οποίες και πραγματοποιεί, επιτρέποντας βασικές κατηγορίες πραγματικότητας να περνούν μέσα από την εμπειρία του. Το παιδί εκπληρώνει τις ευχές του με το να επιθυμεί. Με το να σκέφτεται ενεργεί… και αντιστρέφει την αναλογία δράση/έννοια σε έννοια/δράση…. Η δράση αποσύρεται σε δεύτερη θέση, και παίρνει τη θέση του άξονα. Η έννοια αποχωρίζεται από την πράξη με την ενεργοποίηση μιας διαφορετικής πράξης. Αυτό είναι ένα άλλο παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο η ανθρώπινη συμπεριφορά καταλήγει να εξαρτάται από λειτουργίες που βασίζονται σε νοήματα…

ΜΕΤΑΠΙΑΖΕΤΙΑΝΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Θεωρίες για την ψυχολογία των μαθηματικών

Ένα πλήθος γνωσιακών θεωριών έχουν αναπτυχθεί. Άλλες εστιάζουν το ενδιαφέρον τους στις συνθήκες διδασκαλίας και άλλες στον τρόπο που ο μαθητής κατανοεί[1]. Τι είναι η μαθηματική σκέψη ή η μαθηματική αφαίρεση; Μπορεί να προσομοιωθεί με ρουτίνες; Μπορούμε να δώσουμε ένα μοντέλο παραγωγικής σκέψης που προυποθέτει η μαθηματική σκέψη; Για παράδειγμα, στην περίπτωση της αρίθμησης έχουμε εμπλοκή όλων των κατηγοριών που αναφέρονται ως προ-πράξεις. Ακόμη, προηγείται ένα γενικό ενέργημα του νου που απαιτεί "εξίσωση των διαφορών" μεταξύ των στοιχείων κάποιου συνόλου με άλλα λόγια η άμεση ή έμμεση εισαγωγή της *μονάδας*. Τα στοιχεία απλά γίνονται ομοιογενής μονάδες (units) το καθένα ισοδύναμο με τα υπόλοιπα Piaget[2]. Το συγκεκριμένο γίνεται αντιληπτό με την μεσολάβηση του αφηρημένου[3].

Ο Piaget διακρίνει δυο είδη αφαίρεσης την *εμπειρική αφαίρεση* (empirical) και την *στοχαστική* (reflective) τοιαύτη[4]. Η πρώτη παράγει την γνώση της από ιδιότητες των αντικειμένων του πραγματικού κόσμου ενώ η στοχαστική ξανακατασκευάζει τις γνώσεις της από δομές που κατασκευάστηκαν σε προηγούμενα στάδια και αποτελεί μια ολοκλήρωση ανωτέρου επιπέδου[5].

Ο Piaget στο έργο του δίνει μεγάλη σημασία στην κατά αναγκαιότητα παραγωγή των μαθηματικών κρίσεων.

"Αν και οι λογικό- μαθηματικές έννοιες, που ως κρίσεις επιβάλλονται κατά αναγκαιότητα, προκύπτουν από ενέργειες που το υποκείμενο ασκεί σε συλλογές αντικειμένων, ωστόσο η λογικό - μαθηματική εμπειρία είναι ψυχολογικά αναγκαία για την πλήρωση της παραγωγικής σκέψης. Αυτό δεν σημαίνει ότι οι στοιχειώδεις πράξεις σε σύνολα σχέσεων ή αριθμών παράγονται από τα φυσικά αντικείμενα, ούτε από το ατομικό ψυχολογικό υποκείμενο, αφού η λογικό – μαθηματική εμπειρία αποσυνδέει τις πλέον γενικές συντεταγμένες πράξεων και νόμων που είναι ανεξάρτητοι από τις επιμέρους ατομικές πράξεις[6]".

Ο J. Bruner χώρισε την μορφή κατανόησης σε *ενεργητική*, *εικονική* και *συμβολική* [7]. Σύγχρονοι ερευνητές ασχολούνται με το θέμα κι ενδεικτικά αναφέρω, τους Sierpinska[8], Sfard[9], Dubinsky[10], Gray & Tall[11], Hiebert & Carpenter[12]. Οι

---

[1] Niss M. (1995), Key issues in Mathematics Education in the 1990s – An international Pespective, *Β' Πανελλήνιο Συνέδριο, Διδακτική Μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση,* Κύπρος Απρίλης 1995.
[2] Piaget J. (1969) The Child's Conception of Number, *Routledge & Kegan Paul, σελ. 84.*
[3] Κόζικ, σελ 35.
[4] Beth – Piaget, σελ 188.
[5] στο ίδιο, σελ. 203.
[6] Beth – Piaget, σελ 135.
[7] R. Gross, Psychology, The Science of Mind and Behaviour, Holder & Stoughton 1996 σελ. 646. & J. S. Bruner, The Course of Cognitive Growth, in Cognitive Development to Adolescence, Ed. K. Richarson & S. Sheldon, Open University set book 1993.
[8] Sierpinska A. (1996), Understanding in Mathematics, The Falmer Press.
[9] Sfard A. (1991). On the Dual Nature of the Mathematical Conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics,* 22, 1-36.
[10] Dubinsky Ed (1991) Reflective Abstarction in Advance Mathematical Thinking, Edi.by David Tall Advance Matheematical Thinking, Kluwer.

νεότερες εξελίξεις της ψυχολογίας, των νευροεπιστημών της γλωσσολογίας, μελέτες για την τεχνητή νοημοσύνη προσέφεραν πολλές νέες ιδέες για το πώς η κατανόηση μπορεί να επιτευχθεί και να αξιολογηθεί. Θα ήταν σκόπιμο να ρίξουμε μια ματιά στο επιστημολογικό υπόβαθρο κάποιων τέτοιων γνωστικών θεωριών για να διαπιστώσουμε το χρήσιμο των παρατηρήσεων του αλλά και τον περιορισμένο τους χαρακτήρα, όσον αφορά την μαθηματική σκέψη και αφαίρεση. Θα περιγράψουμε βασικές *ενεργητικές* (enactive) θεωρίες που καταγίνονται με την εξήγηση τις λειτουργίας της κατανόησης μαθηματικών εννοιών. Τέτοιες είναι η APOS (1991) θεωρία του Dubinsky, η θεωρία της *εκπραγμάτωσης* της Sfard (1991) ή θεωρία του *procept*, (σύνθετη λέξη παραγόμενη από το process και concept) των Gray & Tall (1994). Οι θεωρίες έχουν ως βάση τη διάκριση *εργαλειακής* (instrumental) και *συσχετισμένης* (relational) νόησης που είχε προταθεί από τον Skemp[13] κι αποτελούν τροποποιήσεις εμηνειών που εκείνος έδωσε στην κατασκευαστική ιδέα του Piaget [14].

Η ενεργητική ιδέα της κατανόησης μιας μαθηματικής έννοιας αποτελεί μια γνωστή μεταφορά του γραμματολογικού κανόνα ότι ένα ουσιαστικό παράγεται από ένα ρήμα, όπως παρατηρεί ο Davis[15]. Οι αντιλήψεις αυτές υπάρχουν διάσπαρτες σε όλη την σύγχρονη γνωστική επιστήμη και το ιδιαίτερο των παραπάνω ερευνητών είναι ότι επιχειρούν μια εξειδίκευση στο περιβάλλον της διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών. Οι θεωρίες έχουν σκοπό να αναλύσουν τον τρόπο που μια μαθηματική έννοια καταχωρείται στον νου και γίνεται κτήμα του μαθητή, ώστε να ανακαλείται και να χρησιμοποιείται όποτε προκύψει. Διαπιστώνουν σε μια μαθηματική έννοια δυο κυρίως μέρη ένα λειτουργικό - αλγοριθμικό και ένα συμβολικό - εννοιολογικό το οποίο αποτελεί και το μέρος εκείνο που προσφέρεται στην συμβολική διαχείριση και τους υπολογισμούς. Με αυτή κυρίως την διάκριση γίνονται μια σειρά μελέτες σε μαθητές του κατά πόσο σκέφτονται με αλγοριθμικό ή συμβολικό τρόπο.

Η ιδέα του Dubinsky (1991), καθώς αναφέρει ο εμπνευστής της, ξεκινά από τον Piaget. Οι μαθηματικές έννοιες διαμορφώνονται πάνω στην βάση: *ενεργειών* (actions) που ασκούνται βήμα προς βήμα σε *αντικείμενα* (objects) και προσλαμβάνονται ως ιδέες μιας συνολικής *διαδικασίας*, ενώ τελικά *ενθυλακώνονται* (encapsulated) ως ένα *νοητικό αντικείμενο* που αργότερα θα ενταχθεί σε ένα νοητικό *σχήμα* (schema), ένα δίκτυο σχετικών εννοιών. Με αυτό τον τρόπο ο Dubinsky μας προσφέρει μια πιθανή ρουτίνα καταχώρησης στο νου μιας μαθηματικής έννοιας.

«Μια ενέργεια είναι ένας φυσικός ή νοητικός μετασχηματισμός ώστε να επιτευχθούν άλλα αντικείμενα. Εμφανίζεται ως αντίδραση σε ένα ερέθισμα που το άτομο προσλαμβάνει ως εξωτερικό. Ενδέχεται να πρόκειται για απλή ανταπόκριση ως φυσικό αντανακλαστικό η μια ενέργεια ανάκλησης κάποιου γεγονότος από την μνήμη. Ακόμη, ενδέχεται να πρόκειται για μια πολλαπλή ανταπόκριση που χαρακτηρίζεται από το ότι το κάθε επόμενο βήμα ενεργοποιείται από ό,τι έχει προκύψει προηγουμένως παρά τον συνειδητό έλεγχο του μετασχηματισμού από το άτομο…. Καθώς το άτομο ξανασκέφτεται πάνω σε μια ενέργεια, αρχίζει να εγκαθιστά ένα συνειδητό έλεγχο πάνω

---

[11] Gray, E. M. & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: A proceptual view of simple arithmetic. Journal for Research in Mathematics Education, 25, 2, 115-141.

[12] Hiebert J. & Carpenter T. P. (1992), Learning and Teaching with understanding, In D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 65-79). Enschede, The Nederlands: NICD.

[13] Skemp R., (1977) Relational Understanding Instrumental Understanding, Maths Teaching 11,20– 26.

[14] P. Ernest (1991), The Philosophy of Mathematics Education, *The Falmer Press*, London, σελ. 77.

[15] Davis, R. B (1984). Learning Mathematics: The cognitive science approach to mathematics education, Norwood, NJ: Ablex.

της. Τότε μπορούμε να πούμε ότι η ενέργεια εσωτερικεύεται και μετατρέπεται σε διαδικασία. Ενέργειες, διαδικασίες και αντικείμενα οργανώνονται σε δομές που ονομάζουμε σχήματα. Ένα άτομο μπορεί να σκεφτεί πάνω στο σχήμα και να δράση σε αυτό. Το αποτέλεσμα στο σχήμα αυτό γίνεται ένα νέο αντικείμενο[16]».

Η ιδέα αυτή προτείνει ένα τρόπο καταχώρησης στον νου κάποιων εννοιών. Προσφέρει μια ρουτίνα που μας λέει πώς μαθαίνουμε κάτι. Μάλλιστα, οι νευρολόγοι Edelman & Tononi[17] έχουν περιγράψει την διαδικασία κατά την οποία όταν μια ρουτίνα λειτουργεί την πρώτη φορά ενεργοποιεί περισσότερα από ένα εγγεφαλικά κέντρα. Η επανάληψη της χαρίζει στον εγκέφαλο το πλεονέκτημα να σπαταλά λιγότερη ενέργεια και να απασχολεί μικρότερες περιοχές. Οι Gray & Tall (2001), το επικαλλούνται ως επιχείρημα για να δείξουν μια πιθανή λειτουργία με την οποία ο νους μετατρέπει τις σωματικές εμπειρίες σε ιδέες. Αυτό όμως σε τίποτα δεν διαχωρίζει τις λειτουργίες που μαθαίνει κανείς μαθηματικά ή ποδήλατο.

Με μια ενδιαφέρουσα παραλλαγή εμφανίζεται η πρόταση της Sfard. Προτείνει δυο προσεγγίσεις κατά την ανάπτυξη μιας έννοιας: Μια *λειτουργική* (operational) η οποία εστιάζεται στην διαδικασία και μια *δομική* (structural), η οποία εστιάζεται στα αντικείμενα.

"Ένα επιτυχές πέρασμα από μια δραστική έννοια σε μια δομική μπορεί να αποδοθεί με ένα υπόδειγμα τριών βημάτων: πρώτο πρέπει να υπάρχει μια διαδικασία που να εκτελείται πάνω σε ήδη οικεία αντικείμενα, τότε αναγκαστικά προβάλλουν η ιδέα στροφής της διαδικασίας σε πλέον συμπαγές και συνεκτικό όλο και η ικανότητα τελικά να ειδωθεί αυτή η καινούργια οντότητα ως ένα σταθερό αντικείμενο που με την σειρά του θα αποκτηθεί. Αυτές οι τρεις συνιστώσες της ανάπτυξης μιας έννοιας θα ονομαστούν *εσωτερίκευση* (interiorization), *συμπύκνωση* (condensation), *εκπραγμάτωση*[18] (reification) ή, αντίστοιχα.

Συμπύκνωση σημαίνει μια μάλλον τεχνική αλλαγή της προσέγγισης που εκδηλώνεται σε μια δυνατότητα να αντιμετωπισθεί η δεδομένη διαδικασία με όρους input/output δίχως αναγκαστική διάκριση σε βήματα.

Εκραγμάτωση είναι το επόμενο βήμα στο νου εκείνου που μαθαίνει, μετατρέπει τις ήδη συμπυκνωμένες διαδικασίες σε ένα αντικείμενο – οντότητα…. Το γεγονός ότι η διαδικασία έχει εσωτερικευτεί και συμπυκνωθεί σε συμπαγή και αυταπόδεικτη οντότητα δεν σημαίνει κατά ανάγκη ότι ένα πρόσωπο έχει αποκτήσει την ικανότητα να την σκεφτεί κατά δομικό τρόπο. Δίχως την εκπραγμάτωση η προσέγγιση θα μείνει καθαρά ενεργητική.[19]" Στην φάση αυτή η έννοια έχει γίνει αντικείμενο που μπορεί να ανακληθεί ως εργαλείο ανά πάσα στιγμή κι έχει ενταχθεί μέσα στο πλάισιο των εννοιών με τις οποίες συγκαθορίζεται.

Στην ιδέα της Sfard βλέπουμε και πάλι την επίδραση της τεχνητής νοημοσύνης με τους όρους input/output. Οι Tall & all[20] με ένα στόχο πιο περιορισμένο, όπως

---

[16] Cottrill, Jim, Dubinsky, Ed Nichols, Devilyna, Schwingendoff, Keith, Thomas, Karen & Vidakovic, Draga, (1996), Understanding the limit concept, Beginning with a co-ordinated process schema, Journal of Mathematical Behavior, 15, 167 – 192.

[17] Edelman & Tononi, Consciousness, How Master Becomes Imagination, 2000, σελ. 57

[18] καλή είναι και η μετάφραση *πραγμοποίηση,* Τ. Πατρώνης – Δ. Σπανός, Σύγχρονες Θεωρήσεις και Έρευνες στη Μαθηματική Παιδεία, Εκ. Πνευματικού, 1996.

[19] Sfard A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reifications – the case of function. In Guershon Harel & Ed Dubinsky (Eds), The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy (pp. 59-84) Washington, DC: MAA (MAA) Notes 25, σελ. 64-65.

[20] Tall D. & Thomas M. & Davis G. & Gray E. & Simpson A. (2000), What is the Object of the Encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior* 18 (2), 223-241.

ομολογούν, προχώρησαν σε μια άλλη πρόταση χρησιμοποιώντας τον ιδιαίτερο όρο του procept. Με τον όρο αυτό προσπάθησαν να εκφράσουν τον δυϊκό ρόλο που εμπεριέχει μια μαθηματική έννοια (εκείνο της διαδικασίας και του συμβόλου), την *ευελιξία* και την *αμφιβολία*.

"Ένα στοιχειώδες procept είναι το αμάγαλμα τριών συνιστωσών: Μια *διαδικασία* που παράγει ένα μαθηματικό *αντικείμενο* και ένα *σύμβολο* που χρησιμοποιείται για να παραστήσει είτε την διαδικασία είτε το αντικείμενο. Ένα procept συνίσταται από μια συλλογή στοιχειωδών procept που έμπεριέχουν το ίδιο αντικείμενο."[21]

Το Σχήμα 1 (στο τέλος) εμφανίζει μια διάταξη της ανάπτυξης μιας έννοιας όπως την προσφέρουν οι Gray & Tall[22]. Για μια συγκεκριμένη έννοια, π.χ ο αριθμός 5 υπάρχουν πολλοί τρόποι να τον παράγουμε μετρώντας ενδεχομένως τα δάκτυλά μας. Ένας τρόπος είναι να πάρουμε 4 και 1. Ένας άλλος 2 και 3. Ο κάθε τρόπος αποτελεί μια διαδικασία προσέγγισης (procedure). Αν τις θεωρήσω όλες μαζί ως μια διαδικασία έχω την διαδικασία παραγωγής (process) του 5. Το σύμβολο που αποδίδω τελικά στην έννοια αποτελεί τον άξονα που συγκρατεί και συνδέει στο νου δυο διαφορετικές έννοιες, της διαδικασίας παραγωγής της έννοιας και την έννοια καθαυτό. Και οι σχετικές έρευνες στρέφονται στην αξιολόγηση του κατά πόσο στο νου των μαθητών υπάρχει μια μαθηματική έννοια ως διαδικασία και πόσο ως σύμβολο.

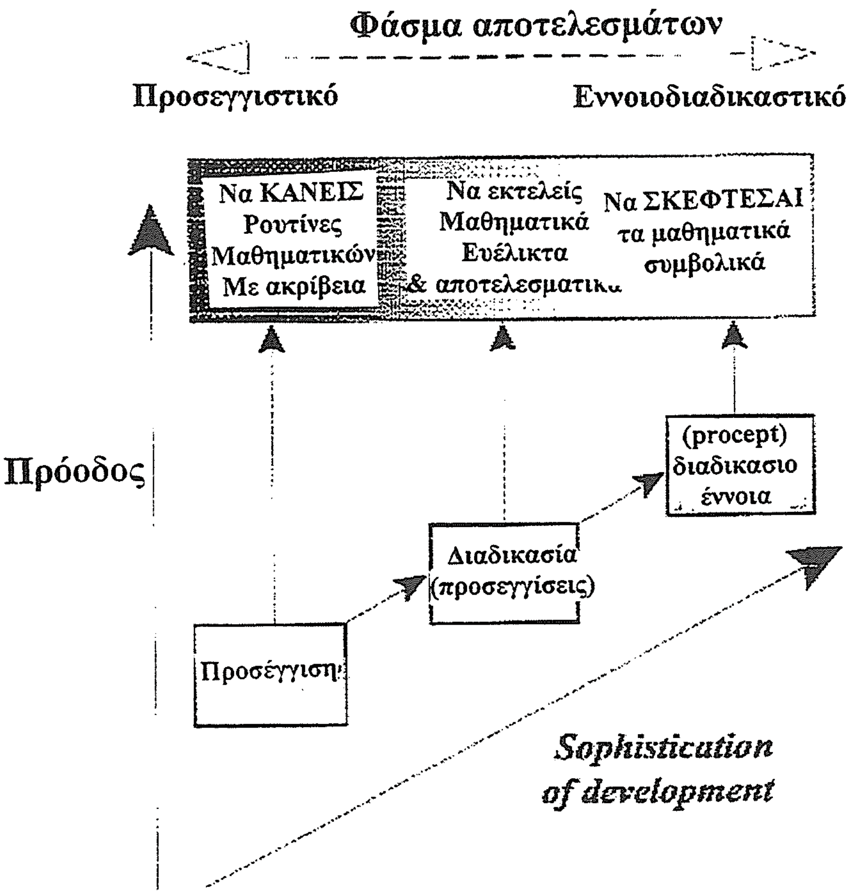
Οι έρευνες αυτές έχουν κάποια πλεονεκτήματα όταν προσπαθούν να κατατάξουν τους μαθητές σε εκείνους που στην κατανόηση μιας έννοιας προσλαμβάνουν το λειτουργικό της σκέλος έναντι άλλων που βλέπουν το συμβολικό. Υπογραμμίζουν τον δισυπόστατο ρόλο που έχουν τα μαθηματικά σύμβολα στην γραφή τους και προπάντων κατά την πρόσληψή τους από αυτόν που μαθαίνει.

Για τις Γεωμετρικές έννοιες ο Tall πιστεύει ότι παράγονται από τις οπτικές εντυπώσεις που δίνονται και είναι ανεξάρτητες από πράξεις και δράσεις επί της πραγματικότητας. Σε αυτό το σημείο διαφέρει από τον Piaget που βλέπει δραστική και την Γεωμετρική σκέψη. Εξάλλου, μια άλλη Θεωρία για την Μαθηματική αφαίρεση αποτελούν τα επίπεδα Van Hiele που αξιοποίησαν τις *θεωρίες της μορφής* (Gestalt). Σε αυτές κάνουμε διάκριση των επιπέδων αφαίρεσης τέτοια ώστε να προσφέρεται σε ελέγχους ποσοτικούς και ποιοτικούς. Τα επίπεδα Van Hiele θεωρούνται πολύ χρήσιμα στην κατανόηση της γεωμετρικής σκέψης των παιδιών. Στην επόμενη παράγραφο παραθέτουμε τα επίπεδα Van Hiele και στο τέλος παραθέτουμε ιδιαίτερα κατατοπιστικούς Πίνακες του Tall που δίδουν κάποια μοντελα της Μαθηματικής αφαίρεσης από Ψυχολογική Πλευρά.

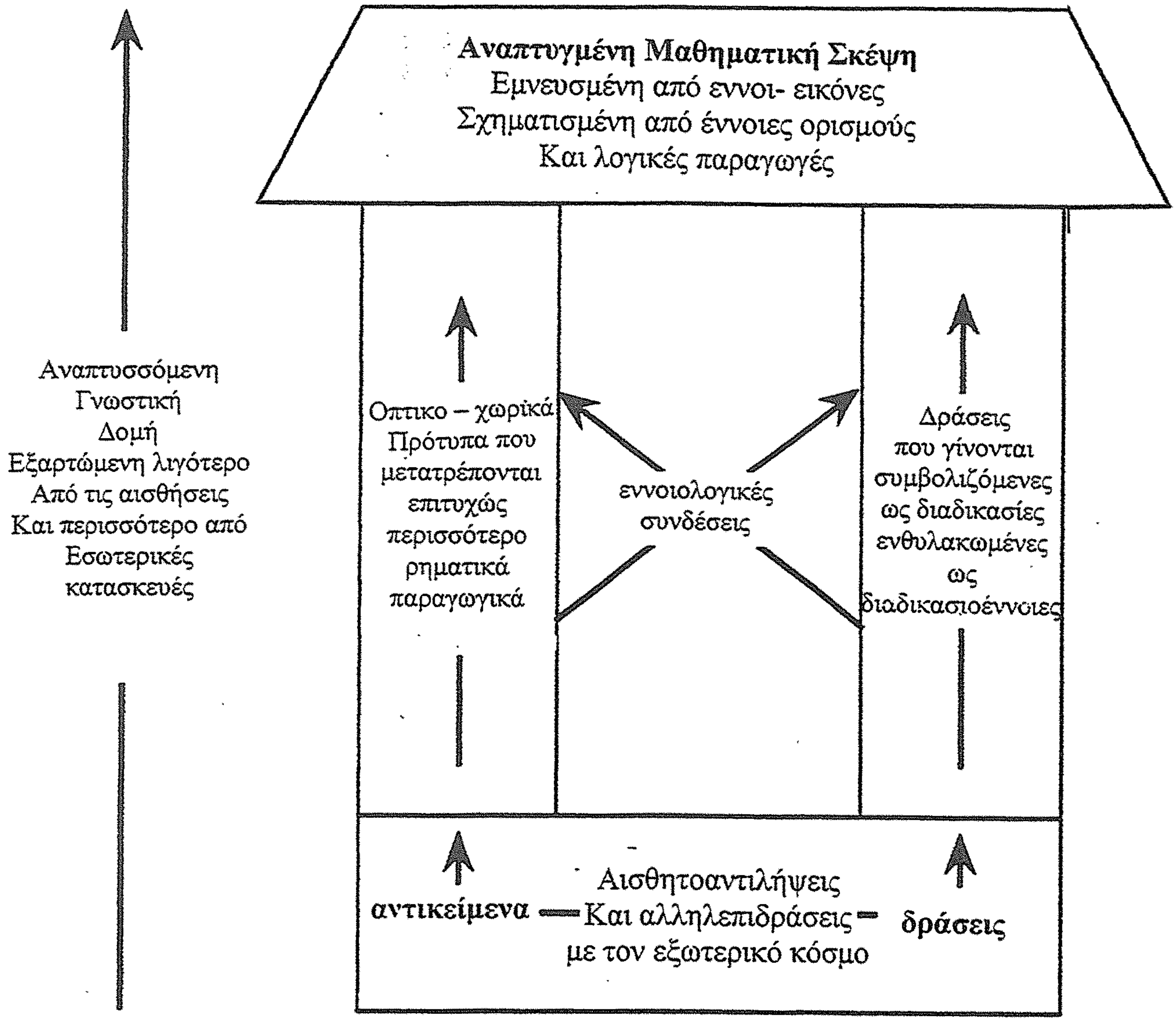
---

[21] Gray & Tall (1994).

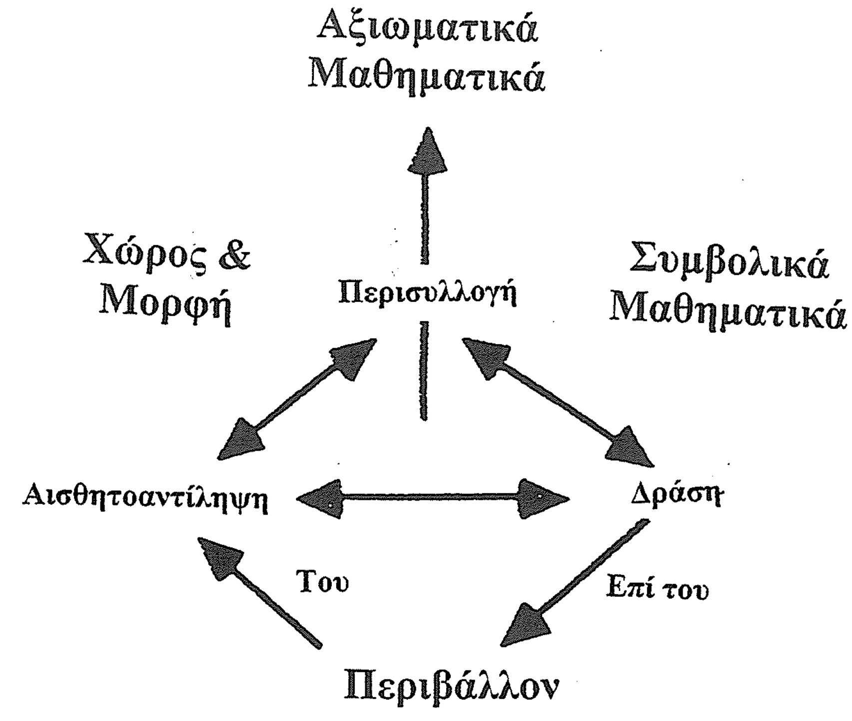
[22] Gray, E. M. & Tall, D. O. (2001), Relationships between embodied objects and symbolic precepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics. PME25.



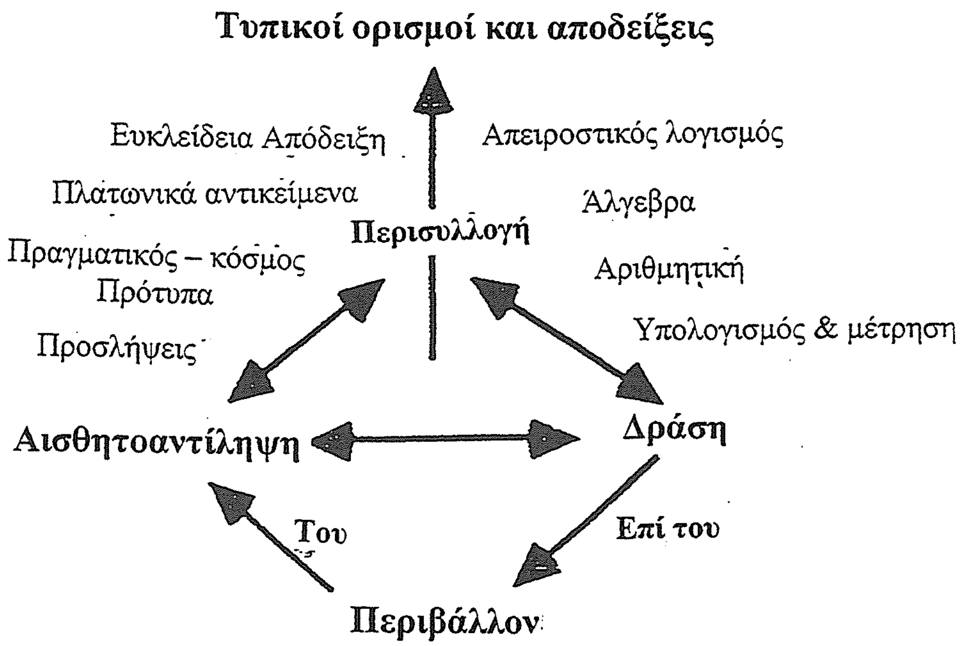
Σχήμα 1: Περιγραφή της ιδέας της εννοιοδιαδικασίας των Gray & Tall



Σχήμα 2: Περιγραφή της γνωστικής ανάπτυξης από το παιδί ως τη μαθηματική έρευνα (Tall)



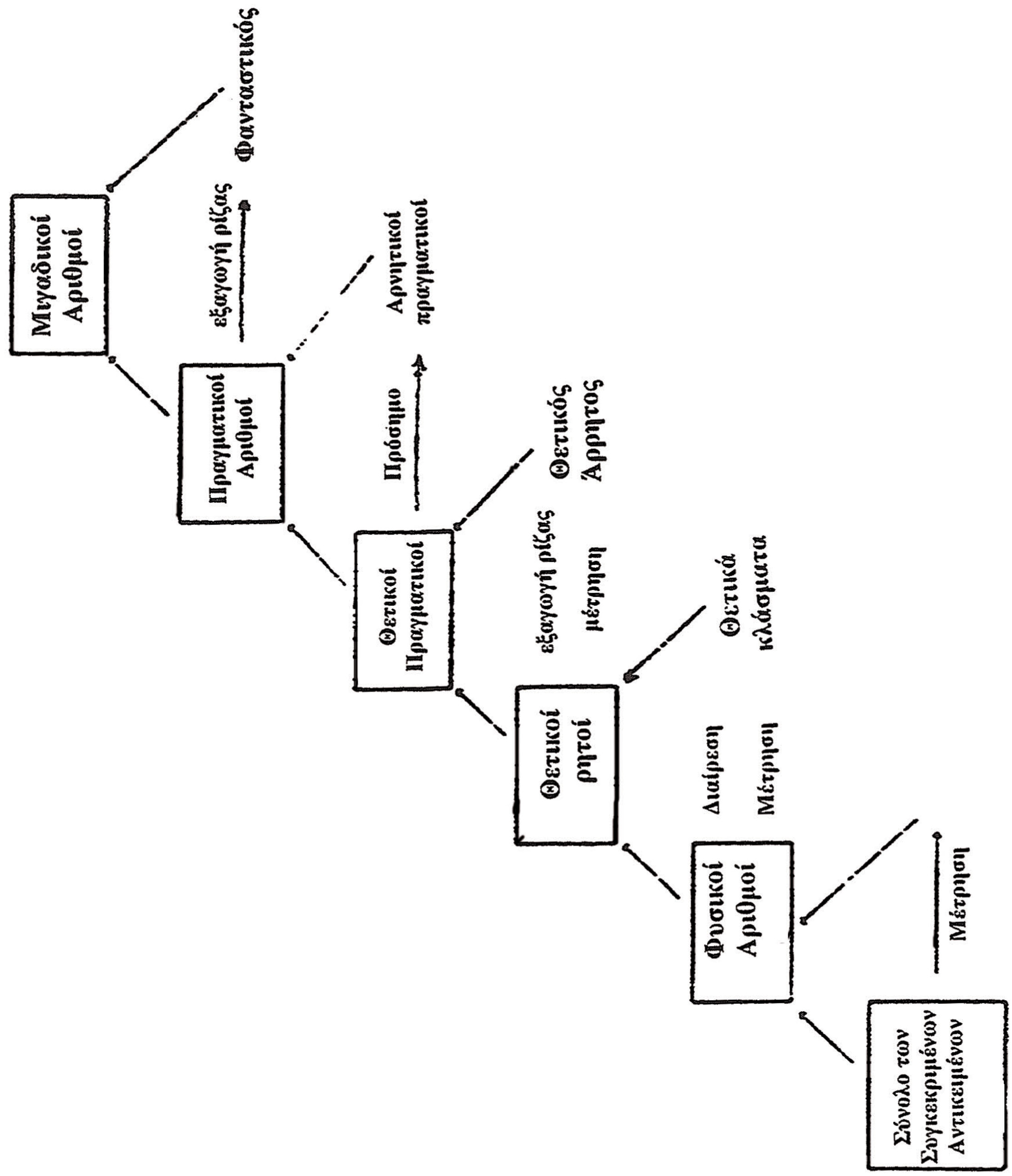
Σχήμα 3: Διάφοροι τύποι των μαθηματικών (Tall)



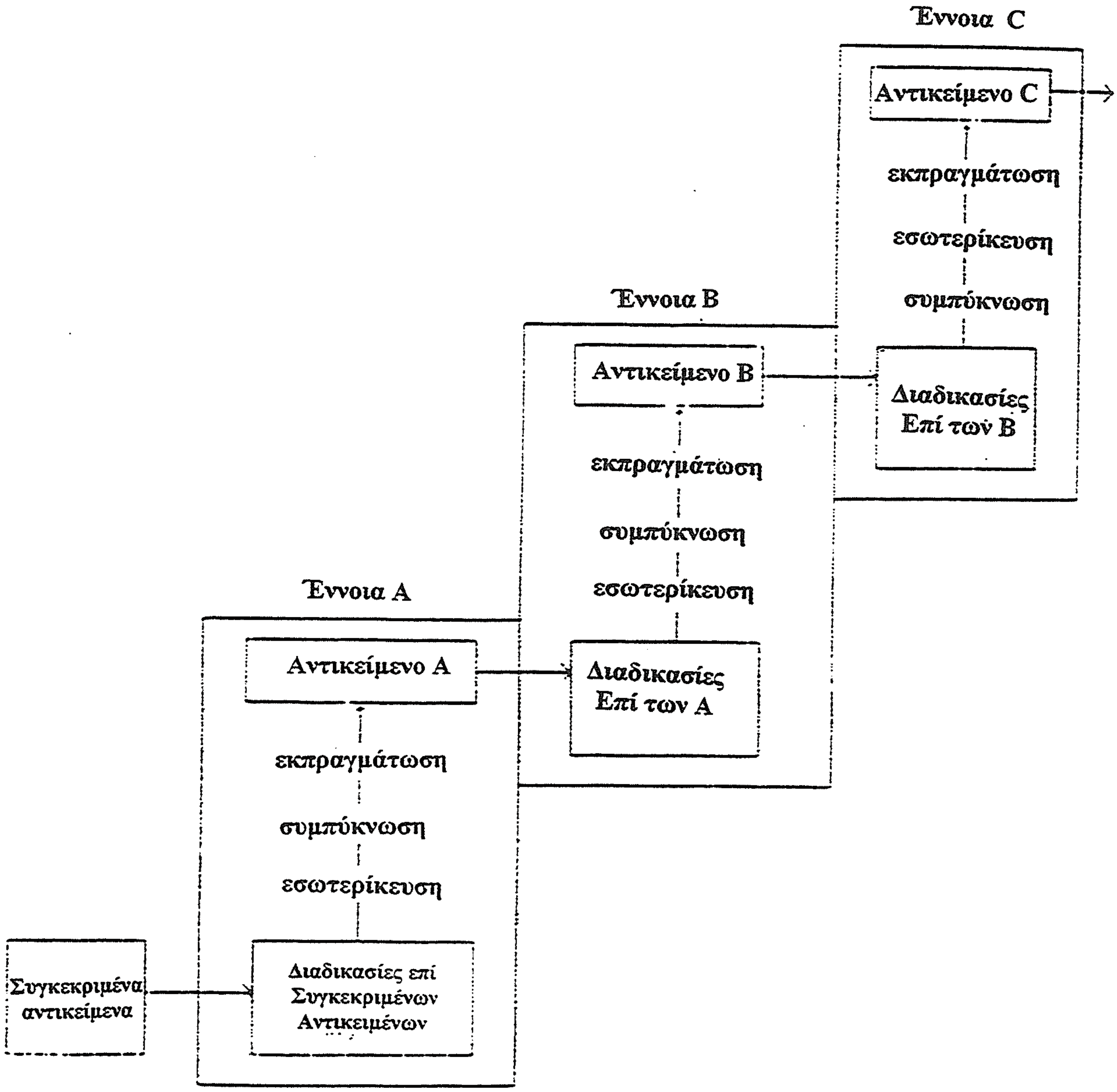
Σχήμα 4: Εννοιολογική εξέλιξη των διαφόρων μαθηματικών δραστηριοτήτων (Tall)

Πίνακας: Η Μετάβαση από την Διαδικασία στο Αντικείμενο

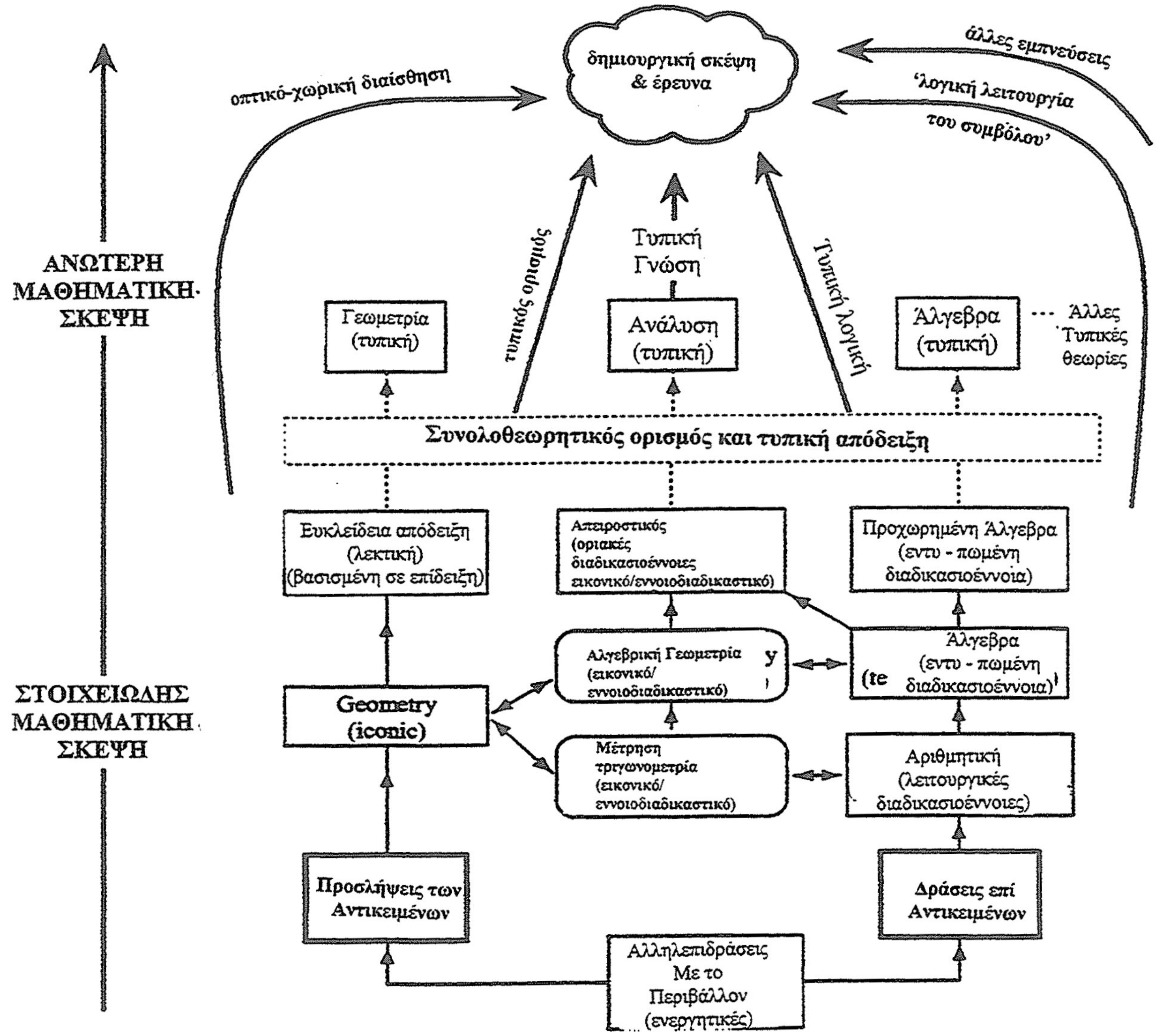
	Διαδικασία	...	Αντικείμενο
Piaget (1950s)	Δράση(εις), πράξη(εις)...	...	Θεματοποιημένο αντικείμενο της σκέψης
Dienes (1960s)	Κατηγόρημα...	...	Θέμα (Subject)
Davis (1980s)	Οπτικά τροποποιημένη ακολουθία...*κάθε βήμα παρακινεί το επόμενο*	ολοκληρωμένη ακολουθία... *ειδομένο ως όλο, και ενδεχόμενο να σπάσει σε υπακολουθίες*	πράγμα, οντότητα, ουσιαστικό
Greeno (1980s)	προσέγγιση ...	είσοδος σε μια νέα προσέγγιση...	εννοιολογική οντότητα
Dubinsky (1980s)	δράση... *κάθε βήμα ενεργοποιεί το επόμενο*	Εσωτερικευμένη διαδικασία... *Με συνειδητό έλεγχο*	Ενθυλακωμένο αντικείμενο
Sfard (1980s)	Εσωτερικευμένη διαδικασία... *Διαδικασία εκτελεσμένη*	Συμπυκνωμένη διαδικασία... *Αυταπόδεκτη*	Εκπραγματωμένο αντικείμενο
Gray and Tall (1990s)	Προσέγγιση... *επί μέρους αλγόριθμός*	διαδικασία... *αντιληπτό ως όλον, ανεξαρτήτως αλγόριθμου*	διαδικασιοέννοια, *σύμβολο ανακαλόν διαδικασία ή έννοια*



Σχήμα 5: Ιεράρχηση των αριθμών ως παράδειγμα επιπέδων μαθηματικής εκπραγμάτωσης (Sfard)



Σχήμα 6: Γενικό μοντέλο του εννοιολογικού σχηματισμού (Sfard)



Σχήμα 7. Η ανάπτυξη της ανώτερης μαθηματικής σκέψης (Tall)

Κατανόηση του Προβλήματος

Επικοινωνία

1. Προσεκτική ανάγνωση
2. Στοιχεία προβλήματος
- **Ερώτηση**
- **Πληροφορίες**
- **αριθμοί**

3. Ανάλυση και σύνθεση προβλήματος

Αναπαράσταση

1. Εικόνες

2. Σχεδιαγράμματα

3. Πίνακες, γραφικές παραστάσεις

4. Μαθηματικά σύμβολα

Οι πρωταρχικές έννοιες του Χώρου

Για να μελετήσουμε τα ζητήματα που αφορούν στην ψυχολογία των μηχανισμών και της συγκρότησης των εννοιών της Γεωμετρίας είναι ανάγκη να κάνουμε μια πρώτη διάκριση μεταξύ του *αντιληπτικού χώρου* και του *αναπαραστατικού χώρου*. Στην ηλικία των 6 μηνών ένα βρέφος μπορεί κάνει διάκριση μεταξύ κύκλου και τριγώνου όταν τους παρουσιάζεται οπτικά. Ωστόσο, πολύ αργότερα θα μπορέσει να αναπαραστήσει αυτά τα σχήματα στην σκέψη, όταν κάποιες έννοιες που αφορούν σε αυτά τα σχήματα θα έχουν αναπτυχθεί. Πράγματι, η ανάπτυξη αυτών των εννοιών διεγείρεται με την ωρίμανση, την πείρα καθώς και την επικοινωνία με τους άλλους αποκρυσταλλώνοντας τους βασικούς κανόνες χρήσης των σημείων και των συμβόλων αναπαράστασης των εννοιών αυτών. Γρήγορα, καθώς το παιδί έχει αποκτήσει κάποια ικανότητα να αναπαριστά στην σκέψη του (*εσωτερική αναπαράσταση*), χωρικές σχέσεις αρχίζει να εκτελεί κάποιες δράσεις που καθιστούν αναγκαία την χρήση χωρικών σχέσεων πιο αφηρημένων που δεν παρατηρούνται άμεσα. Για παράδειγμα, ο Piaget έδειξε ότι έρχεται μια στιγμή όπου ένα παιδί περιεργαζόμενο ένα αντικείμενο που βρίσκεται μέσα στο οπτικό του πεδίο θα συνεχίσει να το ψάχνει και όταν αυτό κρυφτεί. Αυτό σημαίνει ότι έχει αντιληφθεί ήδη ότι το αντικείμενο διαφοροποιείται από το σκηνικό και διατηρείται κάπου πίσω από αυτό. Έχει ακόμη αντιληφθεί την σχέση της κίνησης και μετακίνησης σε σχέση με την δική του σωματικότητα.

Οι χωρικές σχέσεις στον πρωτόγονο άνθρωπο: Εκείνο που διατηρείται στον κόσμο του πρωτόγονου και του σημερινού ανθρώπου είναι η σωματική του υπόσταση με τους βασικούς προσληπτικούς μηχανισμούς. Ο άνθρωπος είναι ένα βιολογικό όν που ζει σε ένα κόσμο που τον καθρίζει η βαρύτητα που του καθορίζει τις συνθήκες ισορροπίας του, το κατακόρυφο και το οριζόντιο. Επίσης βασικός προσληπτικός μηχανισμός είναι η αναγνώριση όμοιων μορφών σε ήχους, χρώματα, αλλά κυρίως σχήματα. Ωστόσο, ο κόσμος των αφηρημένων εννοιών του πρωτόγονου και του σύγχρονου ανθρώπου διαφέρουν ριζικά. Μερικοί χωρικοί προσδιορισμοί προέκυπταν από την άμεση σωματική αλλά και συναισθηματική εμπειρία. Το *μάτι* (*eye*) ενδεχομένως σήμαινε *εμπρός* (*before*) *πλάτη* (*back*) *πίσω* (*behind*) *έδαφος* (*ground*) *κάτω* (*under*). Μια τέτοια χωρική περιγραφή δεν έχει ακόμη αφαιρεθεί από τις συγκεκριμένες συνθήκες και τις υποκειμενικές καταγραφές. Πρέπει να γίνουν μετασχηματισμοί ώστε αυτοί να καταστούν αντικειμενικοί, αφηρημένοι και μετρήσιμοι.

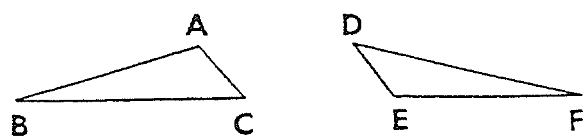
Οι έννοιες του χώρου στο παιδί: Στην αντίληψη των μικρών παιδιών έχουμε κάποια αντίστοιχα χαρακτηριστικά που αναπτύσσονται καθώς το παιδί αποκτά επίγνωση του σώματος του. Οι πρώτοι χωρική γνώση ενός αντικειμένου έρχεται με το να το βάζει στο στόμα του μαζί με το άισθημα αφής. Πολύ σύντομα ο περιβάλλον χώρος διαφοροποιείται από το ίδιο του το σώμα και τα αντικείμενα αγγίζονται και πλησιάζονται. Αυτός ο χώρος βέβαια περιορίζεται σε εκείνο που έχει άμεση πρόσβαση επαφής.

Το παιδί αρχικά γνωρίζει τον χώρο σε άμεση σύνδεση με την εμπειρία. Π.χ. 1) ένα παιδί 3 ετών πάει στον ζωολογικό κήπο με τον πατέρα του, ανεβαίνει στον 1^{o} όροφο με σκάλα και αργότερα κατεβαίνει στο ισόγειο με ανσανσέρ. Την άλλη μέρα πάει στον 1^{o} όροφο από τη σκάλα αλλά δεν την αναγνωρίζει γιατί δηλώνει ότι αυτή είναι για να την 'κατεβαίνουν'. Ένα αγόρι 7 ετών πάει διακοπές έξω από την πόρτα του είναι ένας

θάμνος. Τον αναγνωρίζει πρώτη φορά μετά από ένα κύκλο μέσα από τον κήπο. Όταν παίζοντας με την μητέρα του έπρεπε να την συναντήσει στον θάμνο καθώς έβγαινε από την πόρτα έκανε όλο τον κύκλο ώστε να προσεγγίζει το σημείο.
Τα παραδείγματα δείχνουν ότι ακόμη και στα 7 ο χώρος είναι συνδεδεμένος με κινητικές συγκεκριμένες δράσεις και δεν έχει επαρκώς αφαιρεθεί ώστε να αποτελέσει θέμα νοητικών λειτουργιών. Παραμένει αμετακίνητος μέσα στο νου και δεν μπορεί να τον χειριστεί νοητικά.

Η ταξινόμηση των χωρικών σχέσεων

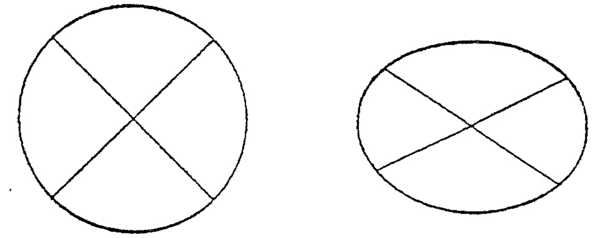
1. Στερεά κίνηση: Οι περισσότεροι άνθρωποι έχουν μια εξοικείωση με τις έννοιες της γεωμετρίας από το σχολείο. Η γεωμετρία ασχολείται με έννοιες *μεγεθών*, όπως είναι μεγέθη γωνιών, εμβαδών και όγκων. Σε αυτή τη γεωμετρία δυο σχήματα λέγονται ότι συμπίπτουν αν είναι ίσα σε μορφή και μέγεθος. Ένα σχήμα μπορεί να επιτευχθεί από ένα άλλο με μια *στέρεα κίνηση* στο χώρο, κατά την οποία υπάρχει μια μεταβολή στη θέση αλλά καμία αλλαγή στα μεγέθη. Για παράδειγμα, τα τρίγωνα ABC και DEF είναι ίσα όταν το ένα μπορεί να προκύψει από το άλλο εάν το μετακινήσουμε διατηρώντας την μορφή αναλλοίωτη (*στερεά κίνηση*) Σχήμα 1.



Σχήμα 1.

Στην Ευκλείδεια γεωμετρία – την γεωμετρία όπου εμπλέκονται μετρήσεις ή μετρική – διπραγματευόμαστε ιδιότητες σχημάτων που παραμένουν σταθερές, ή αναλλοίωτες, αν θεματοποιείσουμε την ιδιαίτερη κλάση των μετασχηματισμών τύπου στερεάς κίνησης.

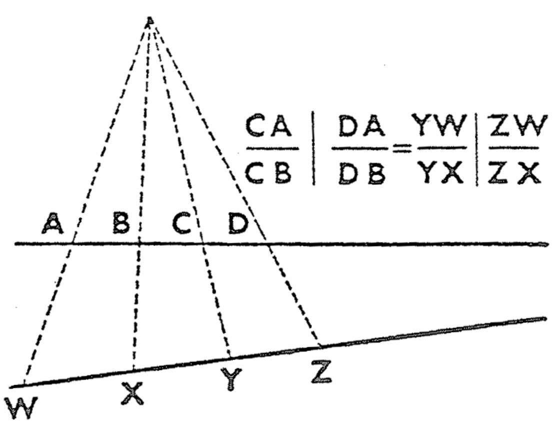
Παίρνουμε τώρα ένα κύκλο με δυο κάθετες διαμέτρους χαραγμένο πάνω σε μια ελαστική επιφάνεια. Με μια κατάλληλη πίεση στο ελαστικό ο κύκλος μπορεί να μετατραπεί σε έλλειψη και οι καθετότητα των διαμέτρων να αλλάξει. Ωστόσο άλλες γεωμετρικές ιδιότητες θα μείνουν οι ίδιες. Για παράδειγμα, το κέντρο της έλλειψης παραμένει το μέσο των δυο διαμέτρων, όπως ήταν και στην αρχική περίπτωση του κύκλου. Ορισμένες χωρικές ιδιότητες παραμένουν σταθερές κάτω από μετασχηματισμούς που είναι πιο έντονες από την στερεά κίνηση.



Σχήμα 2.

2. Προβολικός μετασχηματισμός: Η γεωμετρία αυτή ασχολείται με τις χωρικές ιδιότητες που παραμένουν σταθερές κάτω από μια άλλη κατηγορία μετασχηματισμών. Οι μετασχηματισμός αυτός δεν είναι τόσο περιορισμένος όσο οι στερεά κίνηση και έχει το όνομα του *προβολικού μετασχηματισμού.*

Αν ένας ζωγράφος θέλει να ζωγραφίσει ένα τοπίο σε ένα καμβά η ζωγραφιά θα αποτελέσει μια προβολή του τοπίου. Πάνω στον καμβά τα αντικείμενα εμφανίζονται όπως φαίνονται στο μάτι και όχι όπως βρίσκονται στην πραγματικότητα. Για παράδειγμα, οι παράλληλες ευθείες στο τοπίο δεν καταγράφονται ως παράλληλες στην εικόνα, αφού οι τέτοιες γραμμές εμφανίζονται στο μάτι συγκλίνουσες, σε αντίθεση με το ότι προς εκείνο που θα βρίσκαμε αν μετρούσαμε την πραγματική τους απόσταση σε διαδοχικά σημεία όπως αυτή είναι στο τοπίο. Στους προβολικούς μετασχηματισμούς μήκη και γωνίες παραμορφώνονται και ανομοιογενώς ανάλογα με την απόστασή τους από τον θεωρούμενο παρατηρητή. Οπωσδήποτε παρά την παραμόρφωση είναι δυνατό να αναγνωρίσει κανείς το τοπίο στην ζωγραφιά γιατί κάποιες γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις παραμένουν σταθερές από τους προβολικούς μετασχηματισμούς. Ο προβολικός μετασχηματισμός στέλνει ένα σημείο σε σημείο, μια ευθεία σε ένα επίπεδο γίνεται ευθεία σε κάποιο άλλο επίπεδο. Επίσης τέσσερα σημεία ABCD σε μια ευθεία προβάλλονται στα WXYZ μιας άλλης ευθείας έτσι ώστε ο *διπλός λόγο* $\frac{CA}{CB} / \frac{DA}{DB}$ να μένει σταθερός, Σχήμα 3.



Μήκος, γωνία, εμβαδόν, όγκος κλπ. Παραμένουν απαράλλακτα κάτω από σταθερές κινήσεις, τα σημεία, οι γραμμές ο διπλός λόγος μένει σταθερός κάτω από τους ευρύτερους προβολικούς μετασχηματισμούς.

3. Τοπολογικός μετασχηματισμός : Τώρα θα μιλήσουμε για τους τοπολογικούς μετασχηματισμούς. Αυτοί είναι τόσο δραστικοί που μήκος, γωνία, εμβαδόν, όγκος, σημείο, ευθεία γραμμή, διπλός λόγος κλπ χάνονται. Ωστόσο άλλες θεμελιώδης γεωμετρικές ιδιότητες παραμένουν. Η ελαστική επιφάνεια που προηγουμένως γράψαμε τον κύκλο και την πιέσαμε μόνο τώρα θα την τραβήξουμε από διαφορετικές πλευρές με διαφορετικές δυνάμεις, θα το στρίψουμε και όλες οι άλλες ελαστικές παραμορφώσεις που δεν θα καταστρέψουν την συνέχεια της επιφάνειας. Το σχήμα που θα έχουμε πάνω στην επιφάνεια, έστω X υποβάλλεται σε ένα τοπολογικό μετασχηματισμό και μετατρέπεται σε ένα σχήμα X^1 , δυο (και μόνο δυο) ποιότητες ισχύουν ακόμη:

1) Κάθε σημείο p του σχήματος X αντιστοιχεί σε ένα ακριβώς σημείο p^1 του σχήματος X^1 , και αντιστρόφως.
2) Αν p και q είναι δυο τυχαία σημεία του σχήματος X, και p να κινείται ώστε η απόσταση του από το q να τείνει στο 0, τότε και η απόσταση μεταξύ των αντιστοίχων σημείων p^1 και q^1 στο σχήμα X^1 θα τείνει στο 0, και αντιστρόφως.
3) Αν δυο σύνολα U και V του σχήματος X είναι $U \subseteq V$ τότε τα αντίστοιχα κάτω από τον τοπολογικό μετασχηματισμό U^1 και V^1 τότε $U^1 \subseteq V^1$ και αντιστρόφως.

Η τοπολογία είναι η μελέτη των χωρικών ιδιοτήτων που παραμένουν όταν τα σχήματα υποβάλλονται σε δραστικές παραμορφώσεις ώστε όλες οι μετρικές και προβολικές ιδιότητες χάνονται. Τοπολογική παραμόρφωση κάνουν όλα τα παραμορφωτικά κάτοπτρα, μη κανονικές επιφάνειες (πχ. χάλκινο στήριγμα αμπαζούρ). Οι τοπολογικές παραμορφώσεις περιλαμβάνουν τους προηγούμενους που παρουσιάσαμε.

Piaget: ανάπτυξη της αντίληψης του χώρου από τα παιδιά

Οι Piaget και Inhelder (1956) έχουν μελετήσει με ιδιαίτερα έξυπνα πειράματα που οδηγούν σε μια συγκροτημένη θεωρία για την αντίληψη του χώρου από τα παιδιά. Προτείνουν την εν πρώτοις παράδοξη άποψη ότι η πρωταρχική αντίληψη του χώρου είναι τοπολογική. Δηλαδή τα χαρακτηριστικά που αρχικά είναι παρατηρήσημα είναι:

1) προσέγγιση και εγγύτητα. Τα παιδιά των 4-5 χρόνων θα είναι ικανά να αναπαραστήσουν στον εαυτό τους την *εγγύτητα* πριν ακόμη σκεφτούν την *ομοιότητα,*
2) διαχωρισμός,
3) διάταξη, ή χωρική ακολουθία,
4) Το τι περιβάλει τι ή το περιέχεσθαι. Το παιδί, πιστεύεται ότι προσλαμβάνει την ιδέα του περιεχομένου (κάτι είναι μέσα σε κάτι) ή εξωτερικού, πριν να εμπλέξει την όποια έννοια μέτρου ή μετρικής.
5) συνέχεια (με το νόημα της συνεκτικότητας, συνοχής το όχι σπασμένο) γραμμών και επιφανειών.

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά παραμένουν απαράλλαχτα όταν το σώμα τεντωθεί ή πιεσθεί, ενώ δεν παραμένουν τα ίδια μήτε ‘κατεύθυνση’ ή ‘μετρική’.

Σε έρευνες με μικρά παιδιά που τους δόθηκαν σχήματα σε κομμάτια χαρτόνι να τα ψαύσουν με τα δάκτυλα, χρησιμοποιώντας την αφή (όχι όραση) και μετά να ζωγραφίσουν το σχήμα στον πίνακα. Τα παιδιά 4 ετών δεν διέκρινα έτσι διαφορές ανάμεσα σε κύκλους και πολύγονα ή τρίγωνα. Ωστόσο, διέκριναν διαφορά στην μορφή αλόγου σε χαρτόνι. Οι Ευκλείδειες ιδιότητες έπαιρναν καιρό να γίνουν κατανοητές.

Παιδιά που τους ζητούσαν να σχεδιάσουν ευκλείδεια σχήματα, τετράγωνα, ελλείψεις, τρίγωνα, κύκλους στα οποία οι συνιστώσες (κομμάτια) τεμνόταν μεταξύ τους και κλειστές καμπύλες που είχαν ένα κύκλο εσωτερικά ή εξωτερικά αυτών. Οι συγγραφείς παρατηρούσαν την ευκολία αναγνώρισης σε αυτές τις τοπολογικές ιδιότητες και πολύ αργότερα τους κύκλους σε διάκριση από τα τρίγωνα ή τις ελλείψεις και τα τετράγωνα. Αργότερα στις ηλικίες των 6 ετών διαπίστωσαν την αναγνώριση ιδιοτήτων που θα τις λέγαμε προβολικές. Κατανοούσαν αντικείμενα τοποθετημένα ως την τοποθέτησή τους αλλά χωρίς μέτρηση. Ισχυρίστηκαν την άποψη ότι αναπαριστούσαν στο μυαλό τους τα αντικείμενα σε σχέση με την όψη τους. Το παιδί αρχίζει να εκτιμά το πώς ένα αντικείμενο εμφανίζεται όταν ειδωθεί από διαφορετικές γωνίες.

Σε κατασκευές με πλαστελίνη (4 χρόνων) όταν τους ζητήθηκε να κάνουν μια ευθεία γραμμή κατέληξαν να κάνουν μια καμπύλη και κυματιστή. Στα 6 άρχισε με παρατηρήσεις του πώς φαίνεται από διαφορετικές όψεις ώστε να καταλήξει στην ευθεία.

Μία σειρά ακόμη πειραμάτων οδηγούσαν στην ιδέα ότι οι τοπολογικές ιδιότητες είναι απαιτούν λιγότερα χαρακτηριστικά, είναι πιο γενικές. Αντίθετα οι μετρικές ιδιότητες απαιτούν μετρικές εκτιμήσεις, εξάσκηση στην έννοια του μεγέθους και της μονάδας μεγέθους και προκύπτουν αργότερα μέσα από την ωρίμανση στις πολιτισμικές και εκπαιδευτικές απαιτήσεις.

Το παιδί κτίζει αργά τις χωρικές έννοιες μέσα από τις δράσεις του και την εκπαίδευσή του. Για τον Piaget δεν οι χωρικές ιδιότητες δεν ξεπηδούν *a priori,* καθώς οι δομές του ανθρώπινου νου προσδιορίζονται από την βασική τάση της προσαρμογής. Δεν οφείλονται σε εικόνες που έχουν συνδεθεί σύμφωνα με τους κανόνες του συνειρμού ούτε παθητικά από εντυπώσεις που προκαλούν οι αισθήσεις οπτικές ή αφής. Οι αναπαραστάσεις του χώρου εξαρτώνται από τις δράσεις των υποκειμένων που λαμβάνουν χώρα στην διάρκεια πολλών χρόνων. Καταρχήν, τα παιδιά εξοικειώνονται με εικόνες δια μέσου των αντιληπτικών δράσεων και υπάρχει στενή σχέση μεταξύ ενεργειών που ασκεί κατά την πρόσληψη χωρικών μορφών και της ικανότητας να ανακαλεί αυτά τα σχήματα με εικόνες. Οι αισθητικοαντιληπτική δράση συνιστάται από οπτικές και απτικές διερευνήσεις. Στα πρώτα στάδια, τα ψαξίματά του είναι ανοργάνωτα, καθώς αποτελούν ενδείξεις της φτωχής ικανότητας εσωτερικής αναπαράστασης εκείνων που βλέπει ή ακουμπά.

Για τον Piaget, περισσότερη γεωμετρική σκέψη δεν είναι δυνατή σε ένα υποκείμενο που κατέχει μόνο στατικές εικόνες. Το παιδί πρέπει να ξεπεράσει το στάδιο της απλής φαντασίωσης ως βάσης για την αναπαραστατική του σκέψη. Πρέπει να είναι σε θέση να κατασκευάσει και να μετασχηματίσει τα σχήματα του χώρου και να συλλάβει σε ένα σύστημα με συνοχή των χωρικών σχέσεων. Πρόκειται για μια δράση που στην πραγματικότητα επιβάλλει νοητικά στα αντικείμενα που το περιβάλλουν. τα παιδιά δεν οπτικοποιούν τα αποτελέσματα των απλών πράξεων μέχρι να τις δουν διαμορφωμένες. Δεν μπορούν να φανταστούν την τομή ενός κυλίνδρου ως κύκλου, μέχρι που να το δει αυτό σε κατασκευή πλαστελίνης. Η γεωμετρική σκέψη είναι στην ουσία ένα σύστημα εσωτερικοποιημένων λειτουργιών, δηλαδή μέσω αυτών που αναδεικνύονται από την εσωτερίκευση των εκούσιων πράξεων. Η εικόνα που αναδεικνύεται από την αντιληπτική ενέργεια απαιτεί την ικανότητα να προσφέρει υποστήριξη σε χωρικό συλλογισμό. Χωρικά σχήματα και εικόνες, ως αποτελέσματα των νοητικών πράξεων διαμορφωμένων πάνω σε αυτά τα σχήματα είναι επίσης απαραίτητα για τη γεωμετρική σκέψη. Ανακεφαλαιώνοντας για τον Piaget λέμε ότι καταλαβαίνει:

1) Ενέργειες στις οποίες αντικείμενα τοποθετούνται το ένα μετά το άλλο (εγγύτητα), ή σε σειρές (διάταξη). Δράσεις που περικλείουν στένεμα, φάρδεμα. Όλα αυτά συνδέονται στην ανάπτυξη των τοπολογικών εννοιών.
2) Το να βλέπει ή να σχεδιάζει τα αντικείμενα από διαφορετικές γωνίες. Δίπλωμα και ξεδίπλωμα επιφανειών. Κοψίματα σε αντικείμενα ώστε να εκτεθούν διαφορετικές τομές. Μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις σχημάτων. Στροφές σχημάτων. Όλες αυτές οι δράσεις οδηγούν σε ανάπτυξη προβολικών εννοιών.
3) Σχεδιασμός των όμοιων σχημάτων. Πειράματα που εμπλέκουν κατακόρυφες και οριζόντιες γραμμές ή επίπεδα. Μετρήσεις. Οργάνωση των πραγμάτων μέσω τρισδιάστατων σχέσεων. Αυτά οδηγούν σε Ευκλείδειες έννοιες.

ΕΠΙΠΕΔΑ VAN HIELE

ΕΠΙΠΕΔΟ I

Αναγνώριση: Η δυνατότητα αναγνώρισης περιορίζεται στις φυσικές, ολιστικές, σφαιρικές (global) ιδιότητες των σχημάτων. Ορισμένες φορές χρησιμοποιεί γεωμετρικό λεξιλόγιο (γύρω στο τέλος της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης). Αλλά οι όροι έχουν περισσότερο οπτική παρά γεωμετρική σημασία. Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να εντοπίσει ορισμένες μαθηματικές ιδιότητες των σχημάτων, αλλά πολύ απλές (όπως π.χ. τον αριθμό των πλευρών ενός πολυγώνου).

Ορισμοί: Δεν μπορεί να δόσει μαθηματικούς ορισμούς μόνον περιγραφές φυσικών ιδιοτήτων του σχήματος (π.χ. 'στρογγυλό' ή 'πιο μικρό και πιο στενό') και ίσως κάποια στοιχειώδη μαθηματική ιδιότητα.

Κατηγοροποίηση._(Classification): Μπορεί να κατανοήσει μόνον αποκλειστικού χαρακτήρα (exclusive) κατηγοριοποίηση, εφ' όσον δε βλέπει λογικές σχέσεις ανάμεσα στις κλάσεις, ούτε μεταξύ των μελών της ίδιας κλάσης όταν αυτά έχουν πολύ διαφορετική φυσική όψη.

Απόδειξη :Δεν μπορεί να καταλάβει ούτε καν την έννοια της 'απόδειξης'.

- Έχει οπτική αντίληψη του σχήματος ως ολότητας.
- Δεν βλέπει τμήματος ή συστατικά μέρη του σχήματος.
- Δεν αναγνωρίζει το τετράγωνο ως ρόμβο, είτε το ρόμβο ως παραλληλόγραμο.
- Οι οπτικές εντυπώσεις ασκούν μεγάλη επίδραση στην κατάταξη και σύγκριση σχημάτων.
- Ο μαθητής μπορεί να κατονομάσει σχήματα όπως τρίγωνο, ορθογώνιο, γωνίες και παράλληλες ευθείες.
- Χρησιμοποιεί δικούς του όρους από την τρέχουσα γλώσσα για να περιγράψει σχήματα (π.χ. αποκαλεί το ορθογώνιο 'μακρύτερο τετράγωνο' ή το παραλληλόγραμμο 'πλαγιαστό ορθογώνιο').
- Δεν μπορεί να κάνει γενικεύσεις όσον αφορά την ιδιότητα κάποιας κλάσης (να πει π.χ. 'όλα τα τετράγωνα έχουν τέσσερις ίσες πλευρές').
- Μπορεί να σχεδιάσει ένα το σχέδιο βασίζεται στην ολιστική εντύπωση που προξενεί το σχήμα και όχι στην ανάλυση των συστατικών του μερών.

ΕΠΙΠΕΔΟ II

- Αρχίζει να διακρίνει συστατικά μέρη ενός σχήματος, τις σχέσεις μεταξύ των μερών αυτών καθώς και τις σχέσεις μεταξύ ξεχωριστών σχημάτων.
- Οδηγείται στις ιδιότητες ενός *σχήματος πειραματικά*.
- Χαρακτηρίζει ένα σχήμα με βάση τις ιδιότητες του (π.χ. ένα ορθογώνιο έχει τέσσερις ορθές γωνίες, ίσες διαγωνίους και απέναντι πλευρές ίσες).
- Ενώ παρατηρεί ότι το παραλληλόγραμμο έχει τις απέναντι πλευρές ίσες δεν οδηγείται ακόμα στο συμπέρασμα πως ένα ορθογώνιο είναι παραλληλόγραμμο.

- Γενικεύει μια παρατηρούμενη ιδιότητα για όλα τα μέλη μιας κλάσης.
- Χρησιμοποιεί την κατάλληλη ορολογία για περιγράψει τα σχήματα.

Αναγνώριση: Μπορεί να χρησιμοποιήσει και να διακρίνει μαθηματικές ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων.

Ορισμοί: Όταν του δοθεί ο ορισμός και γνωρίζει κάθε έννοια την οποία αυτός περιλαμβάνει είναι σε θέση να τον χρησιμοποιήσει. Ενδέχεται όμως να τον χρησιμοποιήσει. Ενδέχεται όμως να συναντήσει δυσκολία στη χρήση ορισμένων λογικών εκφράσεων όπως 'και', 'η' ή 'τουλάχιστον'.
Δεν κατανοεί τη λογική δομή του ορισμού (: το σύνολο των αναγκαίων και ικανών ιδιοτήτων της οριζόμενης έννοιας), οπότε όταν του ζητείται κάποιος ορισμός που δεν έχει απομνημονεύσει δίνει περισσότερες ιδιότητες ή άλλες φορές χρησιμοποιεί υπόρρητα κάποια την οποία δεν έχει περιλάβει στον ορισμό και επιμένει σε αυτόν που έμαθε αρχικά.

Κατηγοροποίηση (Classification): Εφόσον έχει δυσκολία στη λογική σύνδεση των ιδιοτήτων, συνήθως κάνει κατηγοροποίηση αποκλειστικού χαρακτήρα (exclusive).

Απόδειξη: Για τον μαθητή του επιπέδου αυτού απόδειξη σημαίνει πειραματική επαλήθευση της ιδιότητας για έναν περιορισμένο αριθμό περιπτώσεων.

ΕΠΙΠΕΔΟ ΙΙΙ

- Συνδέει λογικά τα σχήματα και τις ιδιότητες τους με ορισμούς.
- Δεν συλλαμβάνει το νόημα της λογικο-απαγωγικής διαδικασίας (deduction) εν γένει – ο διδάσκων ή το βιβλίο δίνει τη σειρά των επιχειρημάτων ή της λογικής ακολουθίας.
- Δεν κατανοεί το ρόλο των αξιωμάτων και δεν μπορεί ακόμα να δει τη λογική σύνδεση μεταξύ προτάσεων.
- Επιχειρηματολογεί χρησιμοποιώντας ιδιότητες στις οποίες κατέληξε με τρόπο πειραματικό.
- Αναγνωρίζει το τετράγωνο ως ορθογώνιο και παραλληλόγραμμο.
- Ιεράρχηση και κατάταξη των ιδιοτήτων.
- Δυνατότητα χρήσης προτάσεων τύπου: 'αν – τότε'.
- Αδυναμία διάκρισης μιας πρότασης από την αντιστροφή της.

Αναγνώριση: Όπως στο επίπεδο ΙΙ.

Ορισμοί: Εφόσον μπορεί να δει τις λογικές σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών ιδιοτήτων, είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει και να διαμορφώσει ορισμούς. Προσπαθεί να μην περιλάβει περίσσεια ιδιοτήτων αν και αυτό δεν αποφεύγεται πάντοτε (ειδικά όταν οι σχέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων δεν είναι απλές λογικές συνέπειες).

Κατηγοροποίηση : Εμφανίζεται πλέον η ικανότητα να ομαδοποιεί ακόμα και σε ιεραρχία κλάσεων που η μια μπορεί να περιέχει την άλλη (π.χ λέει πως το τετράγωνο είναι ορθογώνιο), δηλ. μπορεί να περάσει από την αποκλειστικού τύπου κατηγοροποίηση.

Απόδειξη: _Μπορεί να προχωρήσει σε απαγωγικές διαδικασίες και λογικές αποδείξεις. Δίνει άτυπες αιτιολογήσεις για την αλήθεια κάποιων προτάσεων. Τα παραδείγματα απλά υποβοηθούν και δεν αποτελούν πλέον την ουσία της απόδειξης.

ΕΠΙΠΕΔΟ IV

- Ο μαθητής συλλαμβάνει τη σημασία της λογικο- απαγωγικής διαδικασίας.
- Κατανοεί τη ουσία των αξιωμάτων, των ορισμών και των θεωρημάτων.
- Κατανοεί τη λογική δομή της απόδειξης.
- Η απόδειξη είναι η ανώτατη και πλέον έγκυρη αρχή που καθορίζει την αλήθεια μιας πρότασης.
- Ο μαθητής μπορεί να επαναδιατυπώσει προβλήματα σε πιο σαφή γλώσσα.
- Μπορεί να αποσαφηνίσει αμφίβολες ερωτήσεις.

Αναγνώριση: _Όπως στα Επίπεδα I και II.

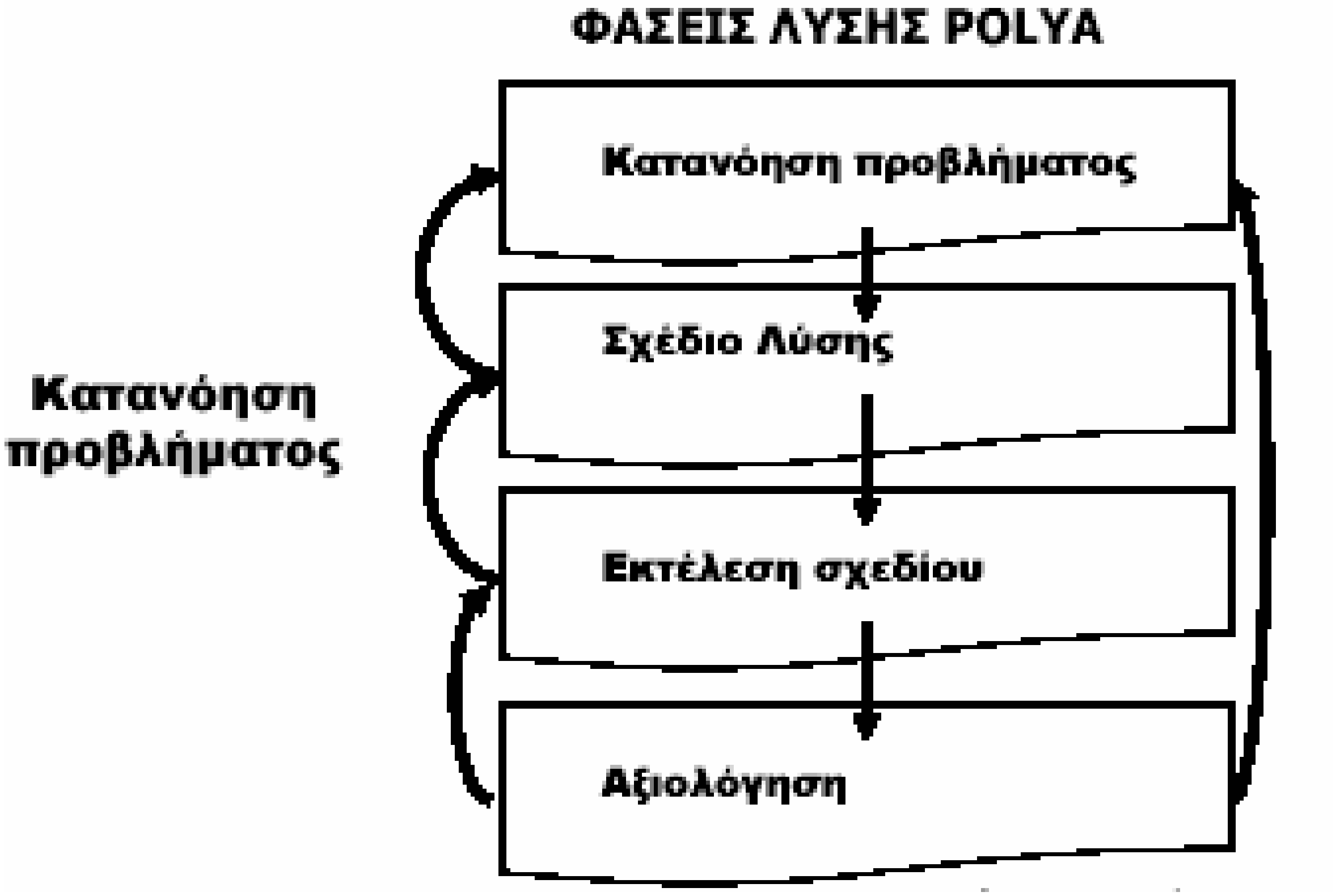
Ορισμοί: Ο μαθητής δέχεται την ύπαρξη διαφορετικών ισοδυνάμων ορισμών και μπορεί να αποδείξει την μεταξύ τους ισοδυναμία.

Κατηγοροποίηση: Όπως στο Επίπεδο III.

Απόδειξη: Μπορεί να καταλάβει και να διαμορφώσει συνηθισμένες τυπικές (formal) αποδείξεις. Σχήματα χρησιμοποιούνται μόνο ορισμένες φορές για υποβοήθηση, αλλά ο μαθητής έχει συνείδηση ότι το σχήμα δεν είναι παρά μια ειδική περίπτωση. Κατανοεί τη λογική δομή της απόδειξης και της σειράς των λογικών βημάτων.

ΕΠΙΠΕΔΟ V

Ο φοιτητής εκτιμά την προσέγγιση του Hilbert για τη Γεωμετρία.
Αναπτύσσει τη θεωρία χωρίς τη χρήση συγκεκριμένων αντικειμένων.
Ο φοιτητής:
Μπορεί να ερευνήσει τη συνέπεια και την ανεξαρτησία των αξιωμάτων.
Μπορεί να γενικεύσει τη μαθηματική αρχή ή θεώρημα και να βρίσκει το **μέγιστο** πλαίσιο εφαρμογής του.


ΦΑΣΕΙΣ ΛΥΣΗΣ POLYA
Κατανόηση προβλήματος
Σχέδιο Λύσης
Εκτέλεση σχεδίου
Αξιολόγηση
Κατανόηση προβλήματος

ΖΗΤΗΜΑΤΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της ανθρώπινης σκέψης είναι η ικανότητα έκφρασης μιας ιδέας με πολλούς τρόπους. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το γεγονός ότι παρουσιάζεται ένα σχέδιο ή μια εικόνα ως επεξήγηση μιας φράσης ή ενός κειμένου, χωρίς να παρέχεται οποιαδήποτε εξήγηση. Κατά συνέπεια, η εκπαιδευτική πράξη, χαρακτηρίζεται από τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων με στόχο την απόδοση ιδεών με διαφορετικούς τρόπους.

Η Μαθηματική Εκπαίδευση ως μέρος της εκπαιδευτικής πράξης, που περιλαμβάνει σύνολα ιδεών και εννοιών που αποδίδονται με τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων. Σύμφωνα με τον Kaput (1987a), τα μαθηματικά αποτελούν ένα επιστημονικό οικοδόμημα που εξετάζει τη διαδικασία της αναπαράστασης από μια δομή σε άλλη. «Μεγάλο μέρος της δουλειάς που γίνεται στα μαθηματικά επικεντρώνεται στον εντοπισμό εκείνης της δομής που τελικά διατηρείται μετά την αναπαράσταση».

Η ανάγκη μελέτης της έννοιας της αναπαράστασης προκύπτει τόσο για πρακτικούς όσο και για θεωρητικούς λόγους. Οι πρακτικοί λόγοι αφορούν στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στη μετάφραση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη σε σχέση με τις μαθηματικές έννοιες, καθώς επίσης και ανάμεσα στην καθημερινή εμπειρία και τα μαθηματικά.

Με τον όρο μετάφραση εννοούμε «τις ψυχολογικές διαδικασίες που εμπλέκονται στη μετάβαση από τη μια μορφή αναπαράστασης στην άλλη, για παράδειγμα, από μια εξίσωση σε μια γραφική παράσταση» (Janvier, 1987a., σελ.2). Οι θεωρητικοί λόγοι αφορούν στην ανάγκη ύπαρξης ενός συστηματικού θεωρητικού πλαισίου σε σχέση με τα διάφορα συστήματα αναπαράστασης, ώστε να μπορούν να αντιμετωπιστούν αποτελεσματικά οι πρακτικές δυσκολίες που προκύπτουν σε σχέση με την κατανόηση και τη χρήση των αναπαραστάσεων. «Το θεωρητικό πλαίσιο θεωρείται ότι παρέχει ένα γλωσσικό- σημειωτικό συμπλήρωμα στην καθαρά γνωστική προσέγγιση των πιο πάνω προβλημάτων» (Kaput, 1987a.)

Τα παιδιά από μικρή ηλικία έρχονται καθημερινά σε επαφή με μια μεγάλη ποικιλία εξωτερικών αναπαραστάσεων μέσα στα πλαίσια της διδασκαλίας των μαθηματικών. Στόχος είναι η σε βάθος κατανόηση των μαθηματικών εννοιών μέσα από τη δημιουργία πλούσιων και καλά οργανωμένων νοητικών αναπαραστάσεων. Η κατανόηση μιας έννοιας προϋποθέτει την ικανότητα αναγνώρισης της έννοιας, όταν αυτή παρουσιάζεται με μια ποικιλία ποιοτικά διαφορετικών συστημάτων αναπαράστασης, την ικανότητα ευέλικτου χειρισμού της έννοιας μέσα στα συγκεκριμένα συστήματα αναπαράστασης και τέλος, την ικανότητα μετάφρασης της έννοιας από το ένα σύστημα στο άλλο (Dufour – Janvier, 1987; Seeger, 1998).

Η ικανότητα μετάφρασης από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο είναι ιδιαίτερα σημαντική τόσο για τη μάθηση των μαθηματικών εννοιών όσο και για την επίλυση προβλήματος (Janvier, 1987a). Οι αναπαραστάσεις είναι «σύμφυτες» με τα μαθηματικά (Dufour – Janvier et al, 1987, σ.110). Υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι αναπαραστάσεις είναι τόσο στενά συνδεδεμένες με μια έννοια, όπως για παράδειγμα οι συναρτήσεις και η γραφική παράσταση, ώστε είναι δύσκολο να γίνει κατανοητή η έννοια χωρίς τη χρήση της συγκεκριμένης αναπαράστασης. «Είναι γενικά παραδεκτό ανάμεσα στους μαθηματικούς παιδαγωγούς ότι η συνάρτηση είναι ένα από τα σημαντικότερα θέματα, που καλούνται να αντιμετωπίσουν οι μαθητές κατά τη διάρκεια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσής τους» (Kalchman & Case, 1998, σ.7).

Μια συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με διάφορους τρόπους: με πίνακα τιμών, γραφική παράσταση, αλγεβρική έκφραση, λεκτική έκφραση. Όπως επισημαίνουν οι Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992), κάθε πεδίο έκφρασης, κάθε αναπαράσταση, παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει ολοκληρωτικά. Αντίθετα, οι διάφορες αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αλληλοσυμπληρώνονται.

1.1 Η έννοια της Αναπαράστασης

Αναπαράσταση σημαίνει ότι μια οντότητα αντιπροσωπεύει μια άλλη οντότητα μέσω κάποιας αντιστοίχισης. Ο όρος «αναπαράσταση» όμως, είναι ασαφής και επιδέχεται πολλαπλές ερμηνείες. Σύμφωνα με τον ορισμό του Palmer (1977), τον οποίο υιοθετούν οι Kaput (1987a; 1987b) και Goldin (1987), η έννοια της αναπαράστασης περιλαμβάνει τις ακόλουθες πέντε ενότητες:

α. την ολότητα που αναπαρίσταται,

β. την ολότητα που αναπαριστά,

γ. τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας προς αναπαράσταση που αναπαρίστανται,

δ. τις συγκεκριμένες πτυχές της ολότητας που αναπαριστά, οι οποίες κάνουν την αναπαράσταση και τέλος,

ε. την αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο ολότητες

Αυτοί οι ορισμοί έχουν επηρεαστεί από τις ιδέες του Johnson Laird (1983), ο οποίος διακρίνει τρεις τύπους αναπαράστασης:

i. Προτασιακές (γραπτές προτάσεις της φυσικής γλώσσας).
ii. Νοητικά μοντέλα (δομημένα ανάλογα με τον κόσμο).
iii. Νοητικές εικόνες (αντιλήψεις των μοντέλων από μία οπτική γωνία).

Κατά τον Bruner (1996) υπάρχουν τρεις τύποι που συνδέονται εξελικτικά:

α. Ενεργητική (λειτουργική) αναπαράσταση (δράση, π.χ. οι διάφορες κινήσεις).
β. Εικονική αναπαράσταση (νοερές εικόνες, όχι λεπτομέρειες αλλά κάποια πολύ χρήσιμα χαρακτηριστικά).
γ. Συμβολική αναπαράσταση (ο τρόπος αυτός αναπαράστασης εμπειριών στη μνήμη γίνεται μέσω γλωσσικών ή άλλων συμβόλων.

Ένα σύμβολο είναι μια λέξη ή ένα σημάδι που δεν μοιάζει καθόλου με το αντικείμενο ή την ενέργεια που παριστάνει. Η φάση της ενεργητικής αναπαράστασης αφορά στην ικανότητα των παιδιών να απαντούν σε ερωτήσεις μόνο σε σχέση με προηγούμενες πρακτικές εμπειρίες τους. Η εικονική φάση χαρακτηρίζεται από απαντήσεις που αφορούν σε νοητικές εικόνες φυσικών αντικειμένων. Η συμβολική αναπαράσταση αφορά στη χρήση αφηρημένων συμβόλων των οποίων το νόημα πρέπει να εκφραστεί ή να οριστεί. Ο Bruner αναφέρει ότι η εμφάνιση αυτών των φάσεων στη ζωή του παιδιού γίνεται με την παραπάνω σειρά και ότι η κάθε φάση εξαρτάται από την προηγούμενη για να εξελιχθεί, αλλά ότι και οι τρεις αφού αναπτυχθούν συνυπάρχουν εφ'όρου ζωής.

Ο Mason επεκτείνει τη θεώρηση αυτή του Bruner εστιάζοντας το ενδιαφέρον του στη σημασία της αναπαράστασης μιας ιδέας με παραπάνω από έναν τρόπους και αν είναι δυνατόν και με τους τρεις. Ο Mason μάλιστα, υποστηρίζει ότι οποιαδήποτε συμβολική αναπαράσταση πρέπει να μπορεί να γίνει λειτουργική (να μπορεί να τη χρησιμοποιεί σε λύση προβλημάτων) για να μπορούμε να πούμε ότι το παιδί την έχει κατανοήσει.

Έχει μεγάλη σημασία να δώσουμε ευκαιρίες στα παιδιά να κινούνται σπειροειδώς σε σχέση με τον τρόπο που αναπαριστούν ιδέες, δηλαδή λειτουργικές ιδέες να δίνουν μια εικονική αναπαράσταση, η οποία με τη σειρά της να γεννά ιδέες που να αναπαρίστανται συμβολικά και οι οποίες στη συνέχεια να γίνονται λειτουργικές κοκ. Δηλαδή, η συμβολική έκφραση πρέπει τελικά να μπορεί να γίνει λειτουργική για να μπορούν να γεννηθούν από αυτή νέες πιο πολύπλοκες έννοιες και νοήματα. Χειροπιαστό παράδειγμα μαθητικών προβλημάτων που έχουν τη ρίζα τους στην έλλειψη εμπειρίας αναπαράστασης ιδεών και στα τρία επίπεδα, είναι τα μαθηματικά, όπου οι μαθητές μαθαίνουν τον επιφανειακό χειρισμό συμβολικών εννοιών, χωρίς να έχουν ιδέα για τα νοήματα που αυτός ο συμβολισμός αναπαριστά.

Το 2000 το National Council of Teachers of Mathematics πρόσθεσε την αναπαράσταση στα «Principles and Standards of School Mathematics», λόγω της αυξανόμενης σημασίας της στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών.

Η αναπαράσταση μπορεί να θεωρηθεί ως μια εσωτερική αφαίρεση μαθηματικών ιδεών ή γνωστικών σχημάτων (Pape & Tchoshanov, 2001). Είναι ένα προϊόν μιας διανοητικής ενέργειας, από την οποία το άτομο (ή ομάδα ατόμων) ξαναφτιάχνει το πραγματικό, το οποίο αντιμετωπίζει και του προσδίδει μια ορισμένη σημασία (A. Robert & J. Robinet, 1989). Οι Confrey & Smith (1991) αναφέρουν την αναπαράσταση ως μια νοητική δομή, η οποία καθορίζεται από διάφορα εργαλεία όπως πίνακες, σχήματα, εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις και από τον τρόπο που αυτά χρησιμοποιούνται για την παρουσίαση μαθηματικών ιδεών και εννοιών. Οι ψυχολογικές διεργασίες που πραγματοποιούνται κατά τη μεταφορά από τη μια μορφή αναπαράστασης σε μια άλλη, ορίζονται από τον Janvier (1987) ως **διαδικασία μετάφρασης**.

Οι αναπαραστάσεις ανήκουν σε δομικά πολύπλοκα συστήματα: προσωπικά ή πολιτισμικά και συμβατικά (Goldin & Kaput, 1996).

Τα συστήματα αυτά έχουν ονομαστεί **σχήματα συμβόλων** (Kaput, 1987a; 1987b) ή **συστήματα αναπαράστασης** (Goldin, 1987; Lesh, Landau & Hamilton, 1983).

Στο πιο πάνω γενικό πλαίσιο οι (Dufour – Janvier et al, 1987) κάνουν μια ενδιαφέρουσα διάκριση:

- **Εσωτερικές (νοητικές) αναπαραστάσεις**: είναι οι νοητικές εικόνες που κατασκευάζουμε, για να αναπαραστήσουμε την πραγματικότητα (βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαινόμενου). Είναι προϊόν νοητικής δραστηριότητας μέσω της οποίας ανασυντάσσεται η πραγματικότητα που αντιμετωπίζουμε. Το άτομο δεν περιμένει απλώς να αποτυπωθούν οι επιδράσεις του περιβάλλοντός του στο μυαλό του. Προσπαθεί ενεργητικά να το ερμηνεύσει και να το κατανοήσει. Το ερμηνεύει νοητικά, χτίζει ένα μοντέλο του κόσμου στο μυαλό του, ένα σύστημα εσωτερικών αναπαραστάσεων, το κινητοποιεί όταν θέλει να προβλέψει γεγονότα ή όταν αντιμετωπίζει κάποιο πρόβλημα και πάντα με τον δικό του προσωπικό τρόπο. Εξαιτίας της φύσης τους, οι εσωτερικές αναπαραστάσεις δεν είναι άμεσα παρατηρήσιμες. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν με βάση την εξωτερική συμπεριφορά των υποκειμένων. Πολλές φορές η διδασκαλία αποσκοπεί στη δημιουργία συγκεκριμένων νοητικών αναπαραστάσεων. Όπως επισημαίνει ο Glasersfeld (1987), μια νοητική αναπαράσταση αποτελείται από στοιχεία που αρχικά προήλθαν από το αισθησιοκινητικό επίπεδο της εμπειρίας. Δεν αποκλείονται, ωστόσο, οι πρωτότυποι συνδυασμοί επιμέρους στοιχείων της εμπειρίας ή κάποιος βαθμός αφαίρεσης σε σχέση με τα αρχικά αισθησιοκινητικά στοιχεία, με αποτέλεσμα να προκύπτουν νέες νοητικές αναπαραστάσεις. Σύμφωνα με τις αρχές του οικοδομισμού, οι νοητικές αναπαραστάσεις έχουν δυναμικό χαρακτήρα: δεν πρόκειται για καταχωρήσεις που ανακαλούνται από κάποιο αρχείο, αλλά για παραγωγικές διαδικασίες, οι οποίες ενεργοποιούνται.
- **Εξωτερικές (σημειωτικές) αναπαραστάσεις**: αφορούν στην εξωτερική οργάνωση συμβόλων που αναπαριστούν μια συγκεκριμένη μαθηματική πραγματικότητα (βρισκόμαστε στο πεδίο του σημαίνοντος). Τα βασικά εξωτερικά συστήματα αναπαράστασης περιλαμβάνουν: γλώσσες, σύμβολα (αλγεβρικά και αριθμητικά), διαγράμματα, εικόνες, γραφικές παραστάσεις και φυσικά μοντέλα. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις είναι «οι παρατηρήσιμες

ενσωματώσεις του τρόπου, με τον οποίο κατανοούν τις έννοιες εσωτερικά οι μαθητές» (Lesh et al, 1987a, σ.33).

Ιδιαίτερα σημαντική είναι η αμφίδρομη σχέση αλληλεπίδρασης ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις (Goldin & Kaput, 1996; Kaput, 1998). Συγκεκριμένα, σε μερικές περιπτώσεις το άτομο εξωτερικεύει σε φυσική μορφή πράξεις που πηγάζουν από εσωτερικές δομές, ενώ σε άλλες περιπτώσεις, εσωτερικεύει πράξεις μέσω της αλληλεπίδρασης με τις εξωτερικές φυσικές δομές ενός συμβολικού συστήματος διαβάζοντας, ερμηνεύοντας λέξεις και προτάσεις, ερμηνεύοντας εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις. Πολύ συχνά οι αμφίδρομες αλληλεπιδράσεις ανάμεσα στις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις συμβαίνουν ταυτόχρονα. Η ερμηνεία των εξωτερικών αναπαραστάσεων και των σχέσεων αναπαράστασης δεν είναι αντικειμενική και απόλυτη, αλλά εξαρτάται από τις εσωτερικές αναπαραστάσεις των ατόμων που δίνουν την ερμηνεία (Goldin & Kaput, 1996). Σύμφωνα με μια από τις βασικές αρχές του οικοδομισμού (Glasersfeld, 1987) μια αναπαράσταση δεν αναπαριστά από μόνη της, αλλά χρειάζεται ερμηνεία και για να ερμηνευθεί πρέπει να υπάρχει το άτομο που θα την ερμηνεύσει. Το κάθε άτομο αντιλαμβάνεται και ερμηνεύει μια εξωτερική αναπαράσταση με βάση τις νοητικές αναπαραστάσεις που έχει ήδη οικοδομήσει ως αποτέλεσμα προηγούμενων γνώσεων και εμπειριών.

Η ερμηνεία, ωστόσο, μπορεί να επέλθει και με το συνδυασμό επιμέρους γνωστών στοιχείων με αποτέλεσμα να οικοδομηθεί μια νέα έννοια.

Συνοπτικά, ο όρος **αναπαράσταση** ή **σύστημα αναπαράστασης** περιλαμβάνει:

α. Εξωτερικές φυσικές ενσωματώσεις, δηλαδή, οποιαδήποτε δομημένη φυσική κατάσταση ή σύνολο καταστάσεων εξωτερικών προς το άτομο, οι οποίες μπορούν να περιγραφούν με τη χρήση των μαθηματικών ή να θεωρηθούν ως ενσωματώσεις μιας μαθηματικής έννοιας.

β. Εξωτερικές γλωσσικές ενσωματώσεις, όπου δίνεται έμφαση στα συντακτικά και σημασιολογικά δομικά χαρακτηριστικά της γλώσσας που χρησιμοποιείται για τη δημιουργία μαθηματικών προβλημάτων και τη συζήτηση των μαθηματικών.

γ. Τυπικές μαθηματικές κατασκευές ή συστήματα κατασκευών, που αναπαριστούν καταστάσεις μέσω της χρήσης συμβόλων, τα οποία συνήθως υπακούουν σε συγκεκριμένα αξιώματα ή είναι σύμφωνα με ακριβείς ορισμούς. Όταν αναφερόμαστε σε σύμβολα ή σημεία, εννοούμε τα τεχνητά σημεία που χρησιμοποιούνται για να αναπαραστήσουν κάτι. Το σύμβολο επιλέγεται αυθαίρετα ανάμεσα σε πολλές πιθανές επιλογές, για να υποδηλώσει κάτι άλλο. Η έμφαση βρίσκεται σε ένα περιβάλλον προβλήματος εξωτερικό προς το υποκείμενο.

δ. Εσωτερικές γνωστικές αναπαραστάσεις, την ύπαρξη των οποίων συμπεραίνουμε με βάση τη συμπεριφορά. Πρόκειται για εσωτερικές, γνωστικές διαμορφώσεις των υποκειμένων. Συνεπώς, εννοούμε ατομικές εσωτερικές αναπαραστάσεις, για αναπαραστάσεις μαθηματικών ιδεών, όπως είναι το «εμβαδόν», οι «συναρτήσεις» κ.λ.π.

Περιλαμβάνονται, επίσης, συστήματα γνωστικής αναπαράστασης με μια ευρύτερη έννοια, ως κατασκευές που υποβοηθούν την περιγραφή των διαδικασιών μάθησης και επίλυσης προβλήματος στα μαθηματικά.

Τέλος, *διαφανή* συστήματα αναπαράστασης είναι τα συστήματα αναπαράστασης που έχουν ακριβώς το ίδιο νόημα με την έννοια ή τη δομή που αναπαριστούν (π.χ. στην Ευκλείδεια Γεωμετρία), ενώ, *αδιαφανή* συστήματα αναπαράστασης είναι τα συστήματα που δίνουν έμφαση σε ορισμένες πτυχές της έννοιας ή της δομής που αναπαριστούν, υποβαθμίζοντας κάποιες άλλες.

1.2 Αναπαραστάσεις και μάθηση των μαθηματικών

Οι αναπαραστάσεις που έχει ο μαθητής για μια έννοια συνδέονται άμεσα με την ικανότητά του στα μαθηματικά. Όσο πιο πλούσιες είναι αυτές τόσο πιο κατανοητή είναι η έννοια και αντίστροφα. Ανάπτυξη της μαθηματικής ικανότητας σημαίνει να ελευθερώσει ο μαθητής τη σκέψη του από το συγκεκριμένο, χωρίς όμως να αποκοπεί και από αυτό που είναι απαραίτητο για την κατανόηση του αναπαραστασιακού χαρακτήρα του συμβολισμού. Πρέπει να δει ότι ένα τυπικό σύστημα (δηλαδή ένα σύνολο από σύμβολα, ορισμούς, αξιώματα, θεωρήματα π.χ. Άλγεβρα), πέρα από το αναφορικό του νόημα, μπορεί να λειτουργεί και από μόνο του. Σ'αυτή τη δύναμή του οφείλεται η αξία του. Δε θα μπορούσαν να αναπτυχθούν τα Μαθηματικά και η μαθηματική σκέψη, ούτε θα μπορούσαμε να ασχοληθούμε με προχωρημένα προβλήματα, έχοντας πάντοτε αναφορικό νόημα στα σύμβολα.

Η μαθηματική γλώσσα, όπως και κάθε φυσική γλώσσα, παίζει τον διπλό ρόλο του **σημαίνοντος** και του **σημαινόμενου**. Υπάρχει όμως μια διαφορά στη γλώσσα των Μαθηματικών. Υπάρχουν σύμβολα και ποικίλες λέξεις της φυσικής γλώσσας με εντελώς διαφορετική σημασία. Για παράδειγμα, η έννοια του «ορίου» στην καθημερινή επικοινωνία χρησιμοποιείται ποικιλοτρόπως. Στα Μαθηματικά δίνεται ένας τυπικός ορισμός με εντελώς διαφορετικό περιεχόμενο από αυτό που έχει στη φυσική γλώσσα. Ερμηνεία όμως, ενός συμβόλου σημαίνει να το συνδέσουμε με κάποια έννοια ή μία νοητική απεικόνιση, για να μπορεί να αφομοιωθεί από την ανθρώπινη συνείδηση. Απαιτεί προσοχή, διότι η σύνδεση αυτή έχει σχέση και με τις εσωτερικές αναπαραστάσεις. Η έννοια της αναπαράστασης αποτελεί βοηθητικό θεωρητικό εργαλείο για το χαρακτηρισμό των γνωστικών διαδικασιών στη μάθηση των μαθηματικών και αυτό γιατί η περιγραφή του τρόπου εξέλιξης των συστημάτων αναπαράστασης στο χρόνο περιλαμβάνει τόσο σημειωτικές πράξεις, μέσω των οποίων οι αναπαραστάσεις αποκτούν συγκεκριμένο νόημα, όσο και τη δομική εξέλιξη νέων συστημάτων, τα οποία οικοδομούνται πάνω στις βάσεις που παρέχουν τα προϋπάρχοντα συστήματα αναπαράστασης (Goldin & Kaput, 1996).

Τα μαθηματικά ως «συλλογή γλωσσών» (Kaput, 1989, σ.167), με την παρουσία συμβόλων και αφαιρέσεων, είναι ένας από τους τομείς όπου οι αναπαραστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν ευρέως, λόγω των ικανοτήτων τους να ενισχύουν τις «πληροφορίες κατανόησης και επικοινωνίας» (Greeno & Hall, 1997, σ.362). Η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων έχει συνδεθεί έντονα με τη σύνθετη διαδικασία στα μαθηματικά και ειδικότερα, με την επιδίωξη της καλύτερης κατανόησης των σημαντικών μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές.

Η ανάγκη για ποικίλες σημειωτικές αναπαραστάσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών εξηγείται, κυρίως λόγω του κόστους επεξεργασίας και των περιορισμένων δυνατοτήτων

των αναπαραστάσεων για κάθε περιοχή του συμβολισμού. Η χρήση περισσοτέρων του ενός συστημάτων αναπαράστασης βοηθά τους μαθητές να διαμορφώσουν καλύτερη εικόνα για μια μαθηματική έννοια (Kaput, 1992). Ο Kaput (1989) διαπίστωσε ότι η χρήση των πολλαπλών αναπαραστάσεων καλύπτει τις διαφορετικές ερμηνείες μιας έννοιας, υπογραμμίζει τις πτυχές των σύνθετων εννοιών και προωθεί τη γνωστική σύνδεση των αναπαραστάσεων.

Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για να μετριάσουν ορισμένες δυσκολίες και να καταστήσουν τα μαθηματικά ελκυστικότερα και ενδιαφέροντα. Η ιδέα της αναπαράστασης ξεκινά από τον Descartes περνά από τον Καντ και φτάνει ως τον Husserl τον ιδρυτή της φαινομενολογίας (1900). Για τον Husserl η αναπαράσταση είναι ένα τρόπος να δειχθεί το αποβλεπτικό αντικείμενο που είναι ανεξάρτητο από την μορφή που το σύστημα της αναπαράστασής του.

Για παράδειγμα μια κωνική μπορεί να δοθεί με συμβολικό, γεωμετρικό (εικονικό) αλλά και με λεκτικό τρόπο, όπως π.χ ως ο γεωμετρικός τόπος με την ιδιότητα τάδε. Υπάρχουν τρεις στόχοι που εξυπηρετούν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις. Κατ’αρχάς, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις συστήνονται λόγω των πληροφοριών που λαμβάνουν οι μαθητές. Δεύτερον, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις είναι καλές μέθοδοι για να προκαλέσουν μια ιδιαίτερη ποιότητα στη γνώση των μαθητών. Και τρίτον, η χρήση των αναπαραστάσεων μπορεί με τη σειρά της να είναι ευεργετική για τη μάθηση.

Οι Greeno και Hall (1997) υπογραμμίζουν τη σημασία της επιλογής κατάλληλων αναπαραστάσεων από τους μαθητές με μορφές που τους βοηθούν στην κατανόηση εννοιών, δεδομένου ότι οι διαφορετικές μορφές αναπαραστάσεων παρέχουν διαφορετικές πληροφορίες για μια έννοια. Επιπρόσθετα, λόγω της εκτενούς χρήσης των συμβόλων, των αφαιρέσεων, των κανόνων και των ορισμών, οι μαθητές αντιμετωπίζουν πραγματικό πρόβλημα προσπαθώντας να καταλάβουν, να εσωτερικοποιήσουν, να εφαρμόσουν και να επικοινωνήσουν με σημαντικές έννοιες στα σχολικά μαθηματικά.

Τα συστήματα αναπαραστάσεων είναι θεμελιώδη και καθοριστικά για τη μάθηση (Cheng, 2000). Επίσης, είναι ιδιαίτερα σημαντικό να παρουσιάζεται η πληροφορία στους μαθητές με ποικίλες μορφές και να διδάσκεται η σχέση και η σύνδεση μεταξύ των αναπαραστάσεων. Η ικανότητα να προσδιορίζεται η ίδια έννοια με διαφορετικές αναπαραστάσεις και η ευελιξία μετάβασης από μια αναπαράσταση σε άλλη, είναι κύρια στοιχεία στη μάθηση των μαθηματικών, διότι επιτρέπουν στους μαθητές να δουν τις πολλαπλές σχέσεις και να κατανοήσουν βαθιά την έννοια (Even, 1998).

Συχνά παρατηρείται οι μαθητές στην τάξη να παρουσιάζουν ορισμένες προτιμήσεις για κάποια συγκεκριμένη εξωτερική αναπαράσταση.

Οι Dufour – Janvier et al. (1987) επεξήγησαν την αδυναμία των μαθητών να αναγνωρίσουν την ίδια έννοια που δόθηκε σε διαφορετικές αναπαραστάσεις. Η Hart (1991) μελέτησε τις αναπαραστάσεις που προτιμούν οι μαθητές και τον τρόπο κατά τον οποίο η επιλογή των αναπαραστάσεων ποίκιλε όσον αφορά το πρόβλημα. Τα συμπεράσματά της έδειξαν ότι η αναπαράσταση που χρησιμοποιείται από τους μαθητές για να λύσουν τα προβλήματα επηρεάζεται έντονα από την προηγούμενη εμπειρία τους.

Κατά συνέπεια, οι πολλαπλές αναπαραστάσεις παρέχουν μια συνεπή ερμηνεία για ένα μαθηματικό αντικείμενο και βοηθούν τους μαθητές να οργανώνουν και να παρακολουθούν τις ιδέες και τα συμπεράσματά τους.

1.2 Η σημασία των αναπαραστάσεων στην έννοια της συνάρτησης

«Η ανάπτυξη της έννοιας της συνάρτησης στους μαθητές θα έπρεπε να αποτελεί βασικό στόχο του αναλυτικού προγράμματος τόσο της δευτεροβάθμιας όσο και της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης» (Eisenberg, 1992, σ.174). Ωστόσο, η ποικιλία αναπαραστάσεων που συνδέονται με την έννοια της συνάρτησης και οι δυσκολίες που παρουσιάζονται κατά τη διαδικασία συνδυασμού των συστημάτων αναπαράστασης μιας έννοιας, η οποία εμπλέκεται στην επίλυση προβλήματος, δυσχεραίνουν την επίτευξη του παραπάνω στόχου (Hitt, 1998).

Είναι γενικά παραδεκτός ο σημαντικός ρόλος που διαδραματίζουν οι πολλαπλές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων στη μαθηματική ανάπτυξη των μαθητών και γι’αυτό θα πρέπει οι μαθητές να είναι ικανοί να μεταβαίνουν μεταξύ της συμβολικής, της γραφικής και της αναπαράστασης σε πίνακα μιας συνάρτησης (NCTM, 1989, σ.154). Οι συναρτήσεις έχουν μια βασική θέση στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, σε όλες τις βαθμίδες εκπαίδευσης και ιδιαίτερα στη δευτεροβάθμια και τριτοβάθμια, όπου παίρνουν ένα ευρύ φάσμα εκφράσεων και αναπαραστάσεων.

Όντας θεμελιώδης για τη μελέτη των μαθηματικών, η έννοια της συνάρτησης έχει προσδιοριστεί ως ενιαία σημαντικότερη έννοια, καθ'όλη τη σχολική εκπαίδευση των μαθητών (Dubinsky & Harel, 1992). Η διδακτική μεταφορά της έννοιας της συνάρτησης, φαίνεται δύσκολη, δεδομένου ότι περιλαμβάνει τρεις διαφορετικές διαστάσεις: την επιστημολογική διάσταση όπως εκφράζεται στα ιστορικά μαθηματικά κείμενα, την επιστημολογία των καθηγητών μαθηματικών για τη συνάρτηση και τη διδακτική διάσταση που αφορά στη γνώση των μαθητών και στους περιορισμούς που θέτει το εκπαιδευτικό σύστημα (Evangelidou, Spyrou, Elia & Gagatsis, 2004).
Η πολυπλοκότητα της διδακτικής μεταφοράς και η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι κύρια ανησυχία των εκπαιδευτικών και σημαντική εστίαση της προσοχής για την ερευνητική κοινότητα (Dubinsky & Harel, 1992; Sierpinska, 1992). Ένας ουσιαστικός αριθμός ερευνητικών μελετών έχει εξετάσει το ρόλο των διαφορετικών αναπαραστάσεων στην κατανόηση και την ερμηνεία των συναρτήσεων (Gagatsis & Shiakalli, 2004; Hitt, 1998). Η έννοια της συνάρτησης περιλαμβάνει ποικίλες αναπαραστάσεις, οι οποίες πρέπει να εφαρμόζονται κατά τη διδασκαλία της έννοιας και κάθε μια από αυτές προσφέρει πληροφορίες για τις ιδιαίτερες πτυχές της έννοιας χωρίς να είναι σε θέση να την περιγράφει εντελώς.

Τα μαθηματικά κείμενα επεξηγούν τις συναρτήσεις με διάφορους τρόπους, όπως με διαγράμματα, πίνακες τιμών, γραφικές παραστάσεις και αλγεβρικούς τύπους. Η χρησιμοποίηση των πολλαπλών αναπαραστάσεων για τη διδασκαλία της συνάρτησης, δηλαδή, η **λεκτική**, η **γραφική** και **συμβολική** μορφή, στοχεύει στην προώθηση, την ενίσχυση και τη βαθιά κατανόηση της συνάρτησης.

Οι Eisenberg και Dreyfus (1994) επισημαίνουν ότι η συνάρτηση είναι μια από τις σημαντικότερες ιδέες της μαθηματικής σκέψης, και επιτρέπει στους μαθητές να αποκτήσουν τις επιμέρους γνώσεις στις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος. Ο σημαντικός ρόλος που κατέχει η έννοια της συνάρτησης, η οποία αποτελεί μια έννοια με μακρόχρονη ιστορική εξέλιξη, στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών διαφαίνεται από το μεγάλο αριθμό ερευνητικών εργασιών που εμφανίζονται στη διεθνή βιβλιογραφία και επιχειρούν μια πολυδιάστατη μελέτη της έννοιας αυτής. Οι εργασίες θα μπορούσαν να ταξινομηθούν σε δύο τομείς ανάλογα με το θέμα στο οποίο εξειδικεύονται:

Στον πρώτο τομέα μπορούν να ταξινομηθούν οι εργασίες που εστιάζουν την προσοχή τους στον ορισμό της συνάρτησης και στη διδακτική προσέγγιση της έννοιας. Ένας σημαντικός αριθμός εργασιών που εμπίπτουν στον τομέα αυτό ασχολείται με τις αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια της συνάρτησης, όπως αυτές διαμορφώνονται κατά τη διάρκεια της μαθηματικής τους παιδείας. Ο δεύτερος τομέας περιλαμβάνει τις εργασίες που εξετάζουν τη συνάρτηση σε σχέση με τους διάφορους τρόπους αναπαράστασής της και τη μετάβαση από το ένα πεδίο έκφρασης στο άλλο. Μια συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί με τη χρήση ενός πίνακα τιμών, μιας γραφικής παράστασης, μιας αλγεβρικής έκφρασης ή μιας λεκτικής έκφρασης.

Όπως επισημαίνουν οι Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992) κάθε πεδίο έκφρασης, κάθε αναπαράσταση, διαφωτίζει και παρέχει πληροφορίες για ορισμένες πτυχές της έννοιας, χωρίς να μπορεί να την περιγράψει ολοκληρωτικά. Αντίθετα, οι διάφορες αναπαραστάσεις της ίδιας έννοιας αλληλοσυμπληρώνονται. Ως παράδειγμα αναφέρεται η μετάβαση από την αλγεβρική έκφραση μιας συνάρτησης στη γραφική της παράσταση και αντίστροφα. Αυτή η μετάβαση δεν είναι μια απλή μετάφραση, όπως υποδεικνύει ο Janvier (1987a), αλλά μια μεταφορά. Αυτό σημαίνει, σύμφωνα με τον Janvier (1987a), ότι ένα μέρος πληροφορίας δεν μετατρέπεται απλώς σε ένα άλλο συμβολικό σύστημα, αλλά αναλύεται και ως αποτέλεσμα αυτής της ανάλυσης προκύπτει νέα πληροφορία, η οποία με τη σειρά της εκφράζεται σε ένα άλλο συμβολικό σύστημα. Σύμφωνα με αποτελέσματα ερευνών, η μετάβαση από τη μια μορφή έκφρασης στην άλλη παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες, τόσο σε μαθητές γυμνασίου-λυκείου (Kerslake, 1986; Gagatsis, 1997; Hitt, 1998) και απόφοιτους λυκείου (Καλδρυμίδου & Οικονόμου, 1992) όσο και σε φοιτητές Μαθηματικών και Φυσικής (Artique, 1992; Even, 1998).

Σύμφωνα με τους Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992), μέρος των δυσκολιών αυτών οφείλεται στον τρόπο διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Συγκεκριμένα, το πλαίσιο μελέτης της συνάρτησης παρουσιάζεται πολύ περιορισμένο και τα προβλήματα που χρησιμοποιούνται είναι συγκεκριμένου τύπου –

συνήθως καλλιεργείται η μετάβαση από την αλγεβρική έκφραση στη γραφική παράσταση. Κατά συνέπεια, βασικός στόχος διδασκαλίας της έννοιας της συνάρτησης αφορά στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών να περνούν από μια αναπαράσταση σε άλλη, χωρίς να υποπίπτουν σε αντιφάσεις (Hitt, 1998). Επιπρόσθετα, όπως επισημαίνουν οι Καλδρυμίδου και Οικονόμου (1992), μια αλγεβρική έκφραση είναι αναλογική, με την έννοια ότι μεταφέρει πληροφορία γραμμικά μέσω μιας ακολουθίας προτάσεων που μπορούν να διαβαστούν η μια μετά την άλλη.

Αντίθετα, η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι ολιστική. Αυτό σημαίνει ότι οι σχέσεις μεταξύ των απλών συστατικών της γραφικής παράστασης δίνονται ταυτόχρονα, με παράλληλο τρόπο και η επεξεργασία τους απαιτεί την ανάλυση του όλου και τη σύνθεση των μερών. Οι μαθητές αντιμετωπίζουν πρόβλημα στο να δημιουργήσουν συνδέσμους μεταξύ διαφορετικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων (τύπων, γραφικών παραστάσεων, διαγραμμάτων, λεκτικών περιγραφών ή σχέσεων), στην ερμηνεία διαγραμμάτων και στο χειρισμό συμβόλων που σχετίζονται με τις συναρτήσεις (Sierpinska). Φαίνεται ότι οι μαθητές διατηρούν τελείως διαφορετικά αναπαραστασιακά συστήματα για τη συνάρτηση και δεν εκμεταλλεύονται πλήρως τα συμπληρωματικά χαρακτηριστικά καθενός.

Οι Schwartz & Yerushalmy (1992) ισχυρίζονται ότι η συμβολική αναπαράσταση είναι σχετικά πιο αποτελεσματική στην ανάδειξη της φύσης της συνάρτησης ως μιας **διαδικασίας**, ενώ η γραφική αναπαράσταση είναι πιο αποτελεσματική στην ανάδειξη της φύσης της συνάρτησης ως **οντότητας** (Schwartz & Yerushalmy, 1992, σ.263). Για την κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης είναι απαραίτητο οι μαθητές να αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση (και τη γραφική της παράσταση) τόσο ως διαδικασία όσο και ως οντότητα. Οι Dubinsky & Harel (1992) επισημαίνουν ότι οι δύο έννοιες είναι άρρηκτα συνδεδεμένες: «είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η έννοια του αντικειμένου είναι δομημένη ώστε να ενσωματώνει τη διαδικασία». Αυτές οι προοπτικές απορρέουν από έναν οντολογικό δυϊσμό συμφυή με τις μαθηματικές έννοιες, δηλαδή, «την ιδέα ότι πολλές μαθηματικές έννοιες μπορούμε να τις δούμε με δύο διαφορετικούς συμπληρωματικούς τρόπους, ως λειτουργικό και δομικό ή ως διαδικασία και αντικείμενο (αντιστοίχως)».

Οι Moschkovich, Schoenfeld & Arcavi ανέπτυξαν ένα θεωρητικό πλαίσιο για την αλληλεπίδραση των μαθητών με τα διάφορα είδη αναπαράστασης των συναρτήσεων. Το θεωρητικό πλαίσιο που υποστηρίζεται, χαρακτηρίζεται από δύο αρχές:

α) τα διαθέσιμα μέσα για την αναπαράσταση των συναρτήσεων, δηλαδή, την αλγεβρική, τη γεωμετρική και την αναπαράσταση σε πίνακα

β) τη διάσταση στην οποία αντιμετωπίζεται μια συνάρτηση.

Ο Moschkovich και οι συνεργάτες του διακρίνουν δύο διαφορετικές διαστάσεις:

i) **τη διάσταση διαδικασίας** και

ii) **τη διάσταση αντικειμένου**.

Σύμφωνα με την πρώτη, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως μια σχέση τιμών μεταξύ των τετμημένων και τεταγμένων (x και y), αντικαθιστούν σε μια εξίσωση το x και προσπαθούν να βρουν λύση σε μια εξίσωση βρίσκοντας τις συντεταγμένες ενός σημείου της γραφικής παράστασης. Σύμφωνα με τη διάσταση αντικειμένου, οι μαθητές αντιλαμβάνονται τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ως μια οντότητα.

Οι μαθητές που χρησιμοποιούν τη διάσταση αυτή, αναγνωρίζουν τη μορφή της γραφικής παράστασης της συνάρτησης από τη μελέτη της συμβολικής της μορφής και κάνουν παρατηρήσεις για τις τιμές και το πρόσημο των συντελεστών της π.χ. για την κατασκευή των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)= 3x$ και $g(x)=3x+1$, χρησιμοποιούν τη σχέση που τις συνδέει $g(x)=f(x)+1$ (Knuth, 2000).

Η αντιμετώπιση της συνάρτησης ως διάσταση αντικειμένου αναφέρεται και ως «ποιοτική» διάσταση των συναρτήσεων. Σύμφωνα με τον Dubinsky, ο οποίος υιοθετεί απόψεις της θεωρίας του Piaget σχετικά με την απόκτηση των μαθηματικών εννοιών, κάθε άτομο κατασκευάζει τη δική του μαθηματική γνώση διαμέσου μιας διαδικασίας στοχαστικής αφαίρεσης.

Η θεωρία ασχολείται με τον τρόπο με τον οποίο οι διαδικασίες εσωτερικοποιούνται , συντονίζονται (δύο ή περισσότερες διαδικασίες για να κατασκευαστεί μια νέα), συμπυκνώνονται για να θεωρηθούν έννοιες, γενικεύονται τοποθετούμενες σε ένα ευρύτερο πλαίσιο. Για να επεξεργαστεί το μοντέλο του και να το συνδέσει με συγκεκριμένες έννοιες ο Dubinsky χρησιμοποιεί την έννοια του «σχήματος». Ένα σχήμα είναι μια περισσότερο ή λιγότερο συναφής συλλογή από αντικείμενα και διαδικασίες. Ο Dubinsky πιστεύει ότι η μαθηματική γνώση ενός ατόμου έχει σχέση με την τάση να απαντήσει σε μια συγκεκριμένη κατάσταση προβλήματος κατασκευάζοντας νέο σχήμα σε μια προσπάθεια να διεκπεραιώσει την κατάσταση. Η μάθηση είναι αποσπασματική. Ο μαθητής απομονώνει αποσπάσματα μιας σύνθετης δομής, τα αναλύει και τοποθετεί σε μερική διάταξη τα περιεχόμενά τους για να παράγει αυτό που ορίζεται ως «γενετική ανάλυση» της έννοιας και μετά ερευνά πως αυτή η γενετική αποσύνθεση συνδέεται με τα σχήματά του.

Ο Dubinsky εφάρμοσε αυτό το θεωρητικό πλαίσιο σε αρκετά μαθηματικά θέματα συμπεριλαμβανομένης και της έννοιας της συνάρτησης. Οι μαθητές όταν χρησιμοποιούν τη συνάρτηση περνούν από διαδοχικά επίπεδα αφαίρεσης και φθάνουν σε κάποια ορόσημα, τα οποία κάλεσε έννοιες της συνάρτησης ως **ενέργεια, διαδικασία, αντικείμενο** (Dubinsky, 1991). Όποιος αντιλαμβάνεται την έννοια της συνάρτησης ως ενέργεια βλέπει τη συνάρτηση ως ένα σύνολο από μεμονωμένους υπολογισμούς. Έτσι, όταν αναφέρεται στη συνάρτηση μιλάει για κάποιο συγκεκριμένο δεδομένο. Δηλαδή η έννοια της συνάρτησης ως ενέργειας είναι συνδεδεμένη με σαφείς υπολογισμούς και κάθε εξαγόμενο από μια συγκεκριμένη συνάρτηση είναι το αποτέλεσμα ενός πειράματος χωρίς να συνδέεται με άλλα εξαγόμενα. Έτσι, φαίνεται η συνάρτηση ως στατική έννοια, γιατί κάποιος καλείται να κάνει έναν συλλογισμό πάνω σε αυτήν μια μόνο φορά.

Η έννοια της συνάρτησης ως διαδικασίας συνεπάγεται έναν δυναμικό χειρισμό των ποσοτήτων. Όταν ένα δίκτυο υπολογισμών εσωτερικοποιηθεί σε μια διαδικασία μπορεί να χρησιμοποιηθεί σα μια βασική πρωταρχική έννοια στους υπολογισμούς χωρίς να μας ενδιαφέρει ο εσωτερικός τρόπος λειτουργίας της, π.χ. η συνάρτηση $f(x)=4x-1$ ερμηνεύεται ως η διαδικασία κατά την οποία όταν δίνουμε το δεδομένο x, παράγεται το εξαγόμενο $f(x)$. Οι μαθητές που προσανατολίζονται στη συνάρτηση ως διαδικασία, αισθάνονται περισσότερη σιγουριά αιχμαλωτίζοντας ένα περίπλοκο δίκτυο υπολογισμών σε μια διαδικασία και στη συνέχεια χρησιμοποιούν τη συμπεριφορά της διαδικασίας αντί για τα αποτελέσματα ενός εμπειρικού πειράματος ως κριτήριο για την ορθότητα της εκτέλεσης των υπολογισμών (Cuoco, 1995).

Η συνάρτηση μπορεί να αντιμετωπιστεί ως αντικείμενο, ανεξάρτητο από αυτό που κάνει και πάνω στο οποίο μπορούμε να ενεργήσουμε ολιστικά. Στη φάση αυτή συμπυκνώνονται διαδικασίες και στη συνέχεια χρησιμοποιούνται ως δεδομένα. Για παράδειγμα, όταν οι μαθητές δεν ασχολούνται με τις λεπτομέρειες των υπολογισμών, αρχίζουν να συγκρίνουν συναρτήσεις, όχι στη βάση των βημάτων που εκτελούνται για να υπολογίσουμε τα εξαγόμενα, αλλά περισσότερο στη βάση της συμπεριφοράς των συναρτήσεων. Από τη σύλληψη της έννοιας της συνάρτησης, ως αντικείμενο, εξαρτάται και η κατανόηση διεργασιών πάνω στις συναρτήσεις όπως η σύνθεση, ο μετασχηματισμός, η διαφόριση και η ολοκλήρωση.

Σχετικά με τις διάφορες μορφές αναπαραστάσεων των συναρτήσεων η Sfard υποστηρίζει ότι η αλγεβρική αναπαράσταση μπορεί να αντιμετωπιστεί με δύο τρόπους: είτε λειτουργικά ως μια περιληπτική περιγραφή κάποιων σχέσεων ή δομικά ως μια στατική σχέση δύο μεγεθών. Από την άλλη μεριά, επειδή σε μια γραφική παράσταση τα άπειρα συνθετικά μιας συνάρτησης συνδυάζονται σε μια λεπτή γραμμή έτσι ώστε να μπορούν να θεωρηθούν ταυτοχρόνως σαν μια ολοκληρωμένη ολότητα, το γράφημα ενθαρρύνει μια δομική προσέγγιση της έννοιας (Sfard, 1992). Είδαμε ότι ένας τεράστιος αριθμός ερευνών έχει χρησιμοποιήσει διαφορετικές προσεγγίσεις για να μελετήσει την έννοια της συνάρτησης στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών. Η Sierpinska (1992) μελέτησε τις αντιλήψεις των μαθητών για τις συναρτήσεις, τον τρόπο με τον οποίο αυτές διατυπώνονται στα πλαίσια της διδασκαλίας και τη σχέση τους με την ιστορική ανάπτυξη της συνάρτησης. Η Sfard (1992) εισήγαγε τη δομική και λειτουργική κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, ενώ οι Dubinsky και Harel (1992) πρότειναν τέσσερα διαφορετικά στάδια στην κατανόηση των συναρτήσεων (προσυνάρτηση, ενέργεια, διαδικασία και αντικείμενο). Οι Markovitz et al. (1986) προσδιόρισαν ότι οι μαθητές συνάντησαν δυσκολίες στα διάφορα έργα που περιελάμβαναν τρεις ιδιαίτερους τύπους συναρτήσεων: τη σταθερή συνάρτηση, τη συνάρτηση που η γραφική της παράσταση είναι διακεκομμένη και τη πολυκλαδική συνάρτηση.

Οι όροι «εικόνα» και «ορισμός» είναι δύο έννοιες που έχουν συζητηθεί εκτενώς στα μαθηματικά κείμενα σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών για τη συνάρτηση (Vinner & Dreyfus, 1989; Tall & Vinner, 1981; Vinner & Hershkowitz, 1980). Αν και οι τυπικοί ορισμοί των μαθηματικών εννοιών εισάγονται στους μαθητές γυμνασίου ή λυκείου, οι μαθητές δεν τους χρησιμοποιούν ουσιαστικά όταν καλούνται να προσδιορίσουν ή να κατασκευάσουν μαθηματικά αντικείμενα που έχουν σχέση με αυτές τις έννοιες. Συχνά βασίζονται σε μια εικόνα της έννοιας που αναφέρεται στο «σύνολο όλων των διανοητικών εικόνων που συνδέονται στο μυαλό του μαθητή με το όνομα της έννοιας, μαζί με όλες τις ιδιότητες που τις χαρακτηρίζουν» (Vinner & Dreyfus, 1989, σ.356).

Στη μελέτη τους, οι Vinner και Dreyfus εξέτασαν, αρχικά, τους κοινούς ορισμούς της έννοιας της συνάρτησης που δόθηκαν από τους μαθητές πριν αρχίσουν τους υπολογισμούς. Στη συνέχεια, εξέτασαν τις κύριες εικόνες της έννοιας της συνάρτησης που χρησιμοποίησαν οι μαθητές για τους στόχους προσδιορισμού και κατασκευής. Έπειτα, εξέτασαν τις διαφορές μεταξύ των ομάδων των μαθητών ως προς τον τρόπο που συνέλαβαν τις συναρτήσεις και τέλος, εξέτασαν τη συχνότητα των μαθητών που χρησιμοποίησαν τον τυπικό ορισμό της συνάρτησης και αυτών που χρησιμοποίησαν την εικόνα τους για την έννοια της συνάρτησης, δηλαδή, είχαν δύο συγκρουόμενα γνωστικά σχέδια που αντιστοιχούσαν στον ορισμό και στην εικόνα της συνάρτησης, αντίστοιχα.

1.3 Αλλαγή πεδίου αναπαράστασης της συνάρτησης

Η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης περιλαμβάνει και την ικανότητα να μπορεί κάποιος να αναπαριστά συναρτήσεις με μια ποικιλία τρόπων, εκ των οποίων οι πιο γνωστές στους μαθητές είναι με τη βοήθεια ενός αλγεβρικού τύπου (συμβολικά), με γραφική παράσταση ή με πίνακα τιμών, καθώς επίσης και την ικανότητά τους να ερμηνεύουν τις πληροφορίες που περιέχονται σε όλες αυτές τις αναπαραστάσεις και να μετακινούνται ευέλικτα μεταξύ τους όταν μια αναπαράσταση ταιριάζει καλύτερα για να ορίσει ή να μεταδώσει κάποια πληροφορία.
Οι Tall (1986), Blackett (1987), Rival (1987) και Thomas (1988) έδειξαν ότι οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν μια βαθύτερη κατανόηση σε δυσκολότερες μορφές συναρτήσεων και σχέσεων μόνο αν τις αναπτύξουν διαισθητικά. Επίσης, έδειξαν ότι όταν η έμφαση δίνεται στην οπτική αναπαράσταση, οι μαθητές συγκρατούν πολύ καλύτερα τις έννοιες παρά όταν τις αναπτύσσουν σε αναλυτικό πλαίσιο. Η ικανότητα ερμηνείας μιας γραφικής παράστασης ή ενός πίνακα τιμών δεν κατακτάται εύκολα. Αν και οι περισσότεροι μαθητές μπορούν να σχεδιάσουν απλές συναρτήσεις, συχνά αντιμετωπίζουν τη γραφική παράσταση σαν κάτι εξωτερικό από την ίδια τη συνάρτηση και όχι πραγματικά σαν μέρος της ουσίας της (Vinner & Dreyfus, 1989).

Επίσης, δεν μπορούν να ερμηνεύσουν τις γραφικές παραστάσεις που οι ίδιοι σχεδιάζουν. Οι μαθητές δεν έχουν αναπτύξει την εννοιακή εικόνα της συνάρτησης. Καθηλώνονται στη χρήση των διαδικασιών και στη λύση ασκήσεων αναλυτικά και όχι γραφικά. Ιστορικά, η οπτική εννοιακή εικόνα της συνάρτησης έχει με την αναλυτική περιγραφή της μια διαμάχη εκατοντάδων χρόνων, με την οπτική εικόνα πάντα να χάνει (Kleiner, 1988).

Οι Dreyfus και Eisenberg (1987) παρατήρησαν ότι οι μαθητές σπανίως αναφέρονται στις γραφικές παραστάσεις που οι ίδιοι δημιουργούν. Άλλες μελέτες έδειξαν ότι η χρήση της γραφικής παράστασης δεν είναι αποτελεσματική γιατί οι μαθητές δεν καταλαβαίνουν τη σχέση που περιγράφει η γραφική παράσταση ανάμεσα στην ανεξάρτητη και την εξαρτημένη μεταβλητή. Σε δημόσια συζήτηση στο Working Group on Advanced Mathematical Thinking, φάνηκε ότι υπάρχουν δύο *σχολές* στους ερευνητές σχετικά με το θέμα αν τα σχολικά και πανεπιστημιακά μαθηματικά πρέπει να δίνουν έμφαση ή όχι στις οπτικές όψεις που περιβάλλουν τις στοιχειώδεις συναρτήσεις (Dubinsky, 1989; Dreyfus, 1991). Η οπτική αναπαράσταση της συνάρτησης μέσα από τις γραφικές παραστάσεις εξασφαλίζει καλύτερη κατανόηση και διατήρηση στη μνήμη, εκθέτει τα σπουδαιότερα μέρη της πληροφορίας και τους συνδετικούς κρίκους μεταξύ τους και διευκολύνει το συμβολισμό των καταστάσεων.

Αποτελέσματα έρευνας σχετικά με τις δυσκολίες συνδυασμού των διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας της συνάρτησης καταδεικνύουν την ύπαρξη συγκεκριμένων επιπέδων κατανόησης της έννοιας (Hitt, 1998). Οι έρευνες περιλαμβάνουν συγκεκριμένα έργα μετάφρασης από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο, ώστε να διατηρείται το νόημα, καθώς επίσης έργα όπου η κατάσταση προβλήματος δεν υποδηλώνει άμεσα το σύστημα ή τα συστήματα αναπαράστασης που απαιτούνται για την επίλυσή τους.

Με βάση τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών έχουν εντοπιστεί τα ακόλουθα επίπεδα σχετικά με την οικοδόμηση της έννοιας της συνάρτησης (Hitt, 1998, σ.125):

Επίπεδο 1: Τα υποκείμενα έχουν ανακριβείς ιδέες για την έννοια (μη συναφές μίγμα διαφορετικών αναπαραστάσεων της έννοιας).

Επίπεδο 2: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να εντοπίζουν διαφορετικές αναπαραστάσεις της έννοιας.

Επίπεδο 3: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να κάνουν μετάφραση με διατήρηση του νοήματος από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο.

Επίπεδο 4: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να συνδυάζουν δύο συστήματα αναπαράστασης.

Επίπεδο 5: Τα υποκείμενα είναι σε θέση να συνδυάζουν διάφορα συστήματα αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος.

Με βάση τα επίπεδα που έχουν εντοπιστεί σχετικά με την οικοδόμηση της έννοιας της συνάρτησης διαφαίνεται ότι η ικανότητα μετάφρασης από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο (Επίπεδο 3) αποτελεί προϋπόθεση για το συνδυασμό διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος (Επίπεδο 5).

Η Even (1998) εξετάζει τους παράγοντες που εμπλέκονται στη σύνδεση των διαφόρων αναπαραστάσεων της έννοιας της συνάρτησης. Συγκεκριμένα, επικεντρώνεται στη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην ευελιξία μετάβασης από μια αναπαράσταση σε άλλη και σε άλλες πτυχές της γνώσης και κατανόησης. Σύμφωνα με αποτελέσματα έρευνας (Even, 1998), η οποία περιλάμβανε φοιτητές μαθηματικών, η γνώση για τις διάφορες αναπαραστάσεις δεν είναι ανεξάρτητη, αλλά συνδέεται με τη γνώση για τους διάφορους τρόπους προσέγγισης των συναρτήσεων, τη γνώση για το πλαίσιο της παρουσίασης και τέλος, τη γνώση για τις υποκείμενες ιδέες.

Η γνώση μιας μαθηματικής έννοιας περιλαμβάνει τους τρόπους με τους οποίους προσεγγίζεται η έννοια. Σχετικά με την έννοια της συνάρτησης, μια ουσιαστική διάκριση σε σχέση με τις προσεγγίσεις που χρησιμοποιούνται, αφορά στην ολιστική προσέγγιση του τρόπου συμπεριφοράς μιας συνάρτησης και την προσέγγιση κατά σημεία. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου μια συνάρτηση πρέπει να αντιμετωπιστεί ολιστικά και να μελετηθεί η συμπεριφορά της (π.χ. όταν πρόκειται να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης, που δίνεται σε συμβολική μορφή). Η κατά σημεία προσέγγιση αφορά στη μελέτη συγκεκριμένων σημείων (π.χ. εύρεση τιμών από μια δοσμένη γραφική παράσταση). Η ευελιξία στη μετάβαση από τη μια αναπαράσταση στην άλλη συνδέεται με την ευελιξία στη χρήση διαφορετικών προσεγγίσεων όσον αφορά στις συναρτήσεις.

Συγκεκριμένα, με βάση τα αποτελέσματα έρευνας (Even, 1998) υπήρχαν περιπτώσεις όπου τα υποκείμενα που χρησιμοποίησαν την κατά σημεία προσέγγιση είχαν μεγαλύτερη επιτυχία στην επίλυση προβλημάτων, που περιλάμβαναν διάφορες αναπαραστάσεις συναρτήσεων, σε σχέση με τα υποκείμενα που χρησιμοποίησαν την ολιστική προσέγγιση και αντίστροφα.

Δύο από τα ερωτήματα που προσπάθησαν να απαντήσουν οι Γαγάτσης et al. (2000a) σχετικά με την επίλυση προβλήματος είναι:

(α) Υπάρχει ένα είδος αναπαράστασης στα Μαθηματικά, το οποίο οι μαθητές τείνουν να χειρίζονται πιο αποτελεσματικά;

(β) Υπάρχει ένα είδος μετάφρασης που ευνοείται;

Με βάση τα αποτελέσματα της έρευνας έχει διαφανεί ότι οι μαθητές τείνουν να χειρίζονται πιο αποτελεσματικά συγκεκριμένες μορφές αναπαράστασης, όπως είναι ο πίνακας τιμών και η γραφική παράσταση.

Αντίθετα, παρουσιάζονται δυσκολίες σχετικά με το χειρισμό λεκτικών εκφράσεων. Αναφορικά με το είδος της μετάφρασης, έχει φανεί ότι ευνοείται η μετάφραση από συμβολική έκφραση σε λεκτική έκφραση και το αντίθετο. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα των ερευνών, η πλειοψηφία των μαθητών αντιμετωπίζει τις γραφικές παραστάσεις ως διαδικασία και όχι ως αντικείμενο. Η διάσταση διαδικασίας είναι η πρώτη που αναπτύσσεται, ενώ η διάσταση αντικειμένου μπορεί να είναι πολύ δύσκολο να αποκτηθεί. Η ικανότητα μετάφρασης από ένα σύστημα αναπαράστασης σε άλλο αποτελεί προϋπόθεση για το συνδυασμό διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης με στόχο την επίλυση προβλήματος (Janvier, 1987a).

Οι τυποποιημένες μορφές αναπαράστασης μερικών μαθηματικών εννοιών, όπως η έννοια της συνάρτησης, δεν είναι αρκετές για τους μαθητές ώστε να κατασκευάσουν ολόκληρη την έννοια και να καλύψουν όλη τη σειρά των εφαρμογών της. Οι καθηγητές μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, παραδοσιακά έχουν στρέψει τη διδασκαλία τους στη χρήση αλγεβρικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων. Οι περισσότερες εκπαιδευτικές πρακτικές περιορίζουν τις αναπαραστάσεις συναρτήσεων στη μετάφραση της αλγεβρικής μορφής της σε γραφική.

Ο Vinner (1992) επισήμανε ότι μια συνάρτηση, όπως διδάσκεται στα σχολεία, προσδιορίζεται συχνά με μια μόνο από τις αναπαραστάσεις της, είτε την αλγεβρική είτε την γραφική. Η Sfard (1992), επίσης, διαπίστωσε ότι οι μαθητές δεν είναι ικανοί να γεφυρώσουν τις αλγεβρικές και γραφικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων.

Μελέτη που πραγματοποιήθηκε από τους Evangelidou et al. (2004), έδειξε τις στενές αμοιβαίες σχέσεις μεταξύ τριών διαφορετικών παραγόντων που είναι συστατικά της έννοιας της συνάρτησης: των ορισμών και παραδειγμάτων της συνάρτησης (εικόνα της έννοιας) με την ικανότητα να χρησιμοποιηθούν οι διαφορετικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης από τους μαθητές. Η λιγότερη προσοχή δόθηκε στις αμοιβαίες σχέσεις ανάμεσα στην επίλυση προβλήματος συνάρτησης, στους διαφορετικούς τρόπους αναπαραστάσεων μιας μαθηματικής έννοιας και στη χρήση των διαφορετικών αναπαραστάσεών της, όπως οι δυνατότητες επίλυσης προβλήματος συνάρτησης, που εξερευνήθηκαν κυρίως ανεξάρτητα από τους τελευταίους δύο παράγοντες.

1.3.1 Η σύνδεση μεταξύ γραφικής και αλγεβρικής αναπαράστασης

Σύμφωνα με το άρθρο του Knuth J. E. (2000) «Student understanding of the Cartesian Connection: An exploratory study», ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η σύνδεση μεταξύ αλγεβρικής και γραφικής αναπαράστασης των συναρτήσεων που πραγματοποιείται από μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Στο άρθρο αυτό γίνεται σαφές ότι πολλοί μαθητές αποφοιτούν από το σχολείο μη έχοντας κατανοήσει τις συνδέσεις ανάμεσα στις πολλαπλές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων. Τα συμπεράσματα έδειξαν ότι για γνωστά και συνηθισμένα προβλήματα πολλοί μαθητές έχουν κατανοήσει τις συνδέσεις μεταξύ γραφικών και αλγεβρικών αναπαραστάσεων, εντούτοις, αυτή η κατανόηση φάνηκε να είναι επιφανειακή. Στη συνέχεια παραθέτουμε αναλυτικότερα κάποια στοιχεία αυτής της ενδιαφέρουσας έρευνας:

«Η εισαγωγή των αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων μπορεί να θεωρηθεί ως μια από τις πιο κρίσιμες στιγμές στη μάθηση των μαθηματικών και αντιπροσωπεύει "ένα από τα πιο σημαντικά σημεία στα μαθηματικά, στο οποίο ο μαθητής χρησιμοποιεί ένα συμβολικό σύστημα για να επεκτείνει και να κατανοήσει κάποιο άλλο" (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990, σ.2). Σκοπός της έρευνας του Knuth ήταν να εξετάσει την κατανόηση των συνδέσεων που αναπτύσσουν οι μαθητές όταν αλληλεπιδρούν με τις διάφορες αναπαραστάσεις. Ειδικότερα, εξέτασε την ικανότητα των μαθητών να χειρίζονται, να επιλέγουν και να κινούνται μεταξύ των αλγεβρικών και γραφικών αναπαραστάσεων των συναρτήσεων.

Οι καθηγητές γενικά, υποθέτουν ότι εφόσον οι μαθητές έχουν έρθει σε επαφή μια φορά με αυτή τη σύνδεση, δεν χρειάζεται καμιά περαιτέρω αναθεώρηση (Schoenfeld et al. 1993). Για το λόγο αυτό, στόχος ήταν να εξεταστεί αυτή η υπόθεση και να ελεγχθεί εάν στην πραγματικότητα, οι περισσότεροι μαθητές κατανοούν αυτή τη θεμελιώδη σύνδεση. Συγκεκριμένα, έπρεπε να εξεταστούν οι ικανότητες των μαθητών να χρησιμοποιούν την Καρτεσιανή Σύνδεση – κατά την οποία, οι συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου μιας γραμμής ικανοποιούν την εξίσωσή της – για να επιλύσουν ασκήσεις όπου απαιτείται η χρήση της.

Το ερωτηματολόγιο περιλάμβανε ασκήσεις στις γραμμικές συναρτήσεις, όπου οι μαθητές καλούνταν να επιλέξουν είτε την αλγεβρική είτε τη γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης, ώστε να επιτύχουν τη λύση με τον πιο εύκολο υπολογιστικά τρόπο, αφού και οι δύο μορφές ήταν ισοδύναμες ως προς τις πληροφορίες που παρείχαν. Έτσι, εάν οι μαθητές είχαν κατανοήσει την Καρτεσιανή Σύνδεση, θα επέλεγαν την πιο βολική και εύκολη στρατηγική επίλυσης, η οποία, ήταν η χρήση της γραφικής αναπαράστασης για τις συγκεκριμένες ασκήσεις.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι περισσότεροι από τα τρία τέταρτα των μαθητών επέλεξαν μια αλγεβρική προσέγγιση σαν μέθοδο λύσης, ακόμη και στην περίπτωση όπου η γραφική προσέγγιση ήταν πιο εύκολη και πιο πρακτική. Εξετάζοντας και τους γνωστικούς και τους εκπαιδευτικούς παράγοντες, δόθηκαν διάφορες εξηγήσεις για να ερμηνεύσουν τις δυσκολίες των μαθητών στη σύνδεση των αναπαραστάσεων.

Κύρια Βιβλιογραφία

- Gagatsis, A., Elia, I., Panaoura A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (2006). *An empirical four-dimensional model for the understanding of function.* In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (Vol. 3, pp. 137-144). Prague: Charles University, Faculty of Education.
- Elia, I., Panaoura A., Gagatsis, A., Gravvani, K., & Spyrou, P. (submitted for publication). Exploring different aspects of the understanding of function: Towards a four-dimensional model. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education.*

- Γαγάτση, Α., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ. (2000). *Συναρτήσεις. Ένα παιχνίδι αλλαγών πεδίου αναπαράστασης.* Λευκωσία: Πανεπιστήμιο Κύπρου, ERASMUS IP1.
- Γαγάτση, Α. (Εκδ.) (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών: Θεωρία και Έρευνα.* Θεσσαλονίκη: Art of Text.
- Γαγάτση, Α. (2004) Γαγάτση (Εκδ.), *Σύγχρονες Τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών.* Λευκωσία: Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού – Πανεπιστήμιο Κύπρου.
- Γαγάτσης, Α., Ευαγγελίδου, Α., Ηλία, Ι., & Σπύρου, Π. (2004). Γαγάτση (Εκδ.), *Αναπαραστάσεις και Μάθηση των Μαθηματικών. Τόμος Ι. Επίλυση προβλημάτων, μοντέλα και συναρτήσεις.* Λευκωσία: 5^{ο} Εντατικό Πρόγραμμα Διδακτικής των Μαθηματικών.

- Ασβεστά, Α., & Γαγάτση, Α. (1995). Προβλήματα Ερμηνείας και η Έννοια της Συνάρτησης. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Διδακτική και Ιστορία των Μαθηματικών* (σσ. 19-38). Θεσσαλονίκη: Erasmus ICP-94-G-2011/11.

- Βασάκου, Θ. (1995). Η Έννοια της Συνάρτησης στους Μαθητές του Λυκείου και Ενέργειες Κατανόησης – Εμπόδια που σχετίζονται με τον Ορισμό της συνάρτησης. Στου Α. Γαγάτση (Εκδ.), *Διδακτική των Μαθηματικών: Θεωρία και Έρευνα* (σσ.239-257). Θεσσαλονίκη: Art of Text.
- Γαγάτση, Α., Κυριακίδη, Λ., Μιχαηλίδου, Ε., & Σιακαλλή, Μ. (2000). Ο Ρόλος της Μετάφρασης μεταξύ των Διαφόρων Πεδίων Αναπαράστασης της Έννοιας της Συνάρτησης στη Μάθηση της Έννοιας. Στων Στ. Γεωργίου, Λ. Κυριακίδη & Κ. Χρίστου (Εκδ.), *Σύγχρονη Έρευνα στις Επιστήμες της Αγωγής* (σσ.337-347). Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου.
- Γαγάτση, Α., & Μουγή, Α. (2000). Ικανότητα Μαθητών Δημοτικού Σχολείου για Διατύπωση Αλγεβρικών Σχέσεων σε Έργα Μετάφρασης. Στων Στ. Γεωργίου, Λ. Κυριακίδη & Κ. Χρίστου (Εκδ.), *Σύγχρονη Έρευνα στις Επιστήμες της Αγωγής* (σσ. 349-359). Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου.
- Γαγάτση, Α., & Παναούρα, Γ. (2000). Ο Ρόλος της Αριθμητικής Γραμμής στην Επίλυση Έργων Πρόσθεσης και Αφαίρεσης. Στων Στ. Γεωργίου, Λ. Κυριακίδη & Κ. Χρίστου (Εκδ.), *Σύγχρονη Έρευνα στις Επιστήμες της Αγωγής* (σσ. 361-368). Λευκωσία: Παιδαγωγική Εταιρεία Κύπρου.
- Dubisky, E., & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Conception of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 85-106). United States: The Mathematical Association of America.
- Duval, R. (2002). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 1*(2), 1-16.
- Eisenberg, T. (1992). On the Development of a Sence for Functions. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Consept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 153-174). The Mathematical Association of America.
- Evangelidou, A., Spyrou, P., Elia, I., & Gagatsis, A. (2004). University students' conceptions of function. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of*

the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 351-358). Bergen University College.

- Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24*, (5), 645-657.
- Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *The Journal of Mathematical Behavior, 17* (1), 123-134.
- Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *TheJournal of Mathematical Behavior, 17* (1), 79-103.
- Knuth, J. E. (2000). Student understanding of the Cartesian Connection: An exploratory study. *Journal of Research in Mathematics Education, 31* (4), 500-508.
- Mousoulides, N., & Gagatsis, A. (2004). Algebraic and geometric approach in function problem solving. In M. Johnsen Hoines & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 385-392). Bergen University College.
- Sfard, A. (1992). Operational Origins of Mathematical Objects and the Quandary of Reification – The Case of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 59-84). Mathematical Association of America.
- Sierpinska, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 25-28). United States: The Mathematical Association of America.
- Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. In E. Dubinsky, & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 195-214). United States: Mathematical Association of America.

Η συνάρτηση ως διαμεσολαβημένη εκτίμηση. Μία διδακτική αξιοποίηση της έννοιας.

Εισαγωγή

Η έννοια της συνάρτησης είναι πολύ βασική στην επιστήμη των Μαθηματικών και τις εφαρμογές της. Η λιτότητα του σημερινού συνολοθεωρητικού ορισμού, όπως τον ξέρουμε, κρύβει βαθιά την ιστορική πρακτική και εμπειρία που την διαμόρφωσε. Η πρακτική αυτή περιελάμβανε, εκτός των άλλων, την έμμεση μέτρηση, η μέτρηση δηλαδή ενός ποσού ψ μέσω ενός άλλου ποσού χ. Στην παρούσα εργασία προτείνεται και ερευνάται η διδασκαλία της συνάρτηση ως ένα μαθηματικό εργαλείο έμμεσης μέτρησης και το ενδιαφέρον μας εστιάζεται σε συγκεκριμένη συνάρτηση, την τριγωνομετρική εφαπτομένη της. Η επιλογή της συνάρτησης αυτής δεν είναι τυχαία αφού η εξέλιξή της είναι συνδεδεμένη με προβλήματα μέτρησης, στο φυσικό περιβάλλον, και με την ανάπτυξη και χρήση εργαλείων, γεγονός που θα μπορούσε να αξιοποιηθεί διδακτικά. (Keisoglou & Spyrou, 2003).

Επιστημολογική-ιστορική ανίχνευση της έννοιας.

Πρώιμες μορφές συναρτησιακών συσχετισμών μπορούμε να ανιχνεύσουμε και στην αρχαιότητα, αλλά ένας συνθετικός ορισμός δεν στάθηκε σε εκείνη την εποχή αναγκαίος (Boyer, 1949). Η νεοτερικότητα, από τον Όρεσμο ως τον Γαλιλαίο (Boyer 1949, Katz 1993), θα μετατοπιστεί σε ένα άλλο επίπεδο αφαίρεσης που θα προκύψει με την μετατροπή του λόγου σε ratio, δηλαδή σε υπολογιστική σχέση με αριθμητικό αποτέλεσμα, καθόσον η αναγέννηση βλέπει τις φυσικές οντότητες ως res extensa (μεγέθη εκτατά και μετρούμενα). Η επιστήμη, μέσα στο νέο εννοιολογικό πλαίσιο που κυριάρχησε , κατάφερε το ξεπέρασμα των επιστημολογικών εμποδίων, που δεν της επέτρεπαν να μελετήσει την κίνηση και να κάνει μαθηματική κινητική (Koyré, 1994). Από τα τέλη του 17^{ου} αιώνα αυτή η υπολογιστική αντίληψη οδήγησε στην δημιουργία του Απειροστικού Λογισμού. Στο πλαίσιο αυτών το διεργασιών, θα προκύψει ένας μεγάλος αριθμός αποτελεσμάτων και θα ανοιχτεί ένας ευρύς ορίζοντας μαθηματικών εμπειριών, που θα απαιτήσει όλο και πιο εκλεπτυσμένα εργαλεία, όπως η ιδέα της συνεξάρτησης κάποιων μεταβλητών και διατυπώνονται οι πρώτοι ορισμοί που αφορούν την συνάρτηση από τους Bernoulli, Euler, Cauchy κ.ά.
Τα μειονεκτήματα εκείνων των ορισμών ήταν κυρίως ότι έβλεπαν συμμετρικά εξαρτημένη κι ανεξάρτητη μεταβλητή, όπως εμφανίζονται σε μια σχέση, (π.χ εξίσωση κύκλου) και δεν μπορούσαν να αποχωρίσουν την χρονικότητα από την ιδέα της μεταβλητής, αναπόφευκτη κληρονομιά για μια έννοια που γεννήθηκε κατά την μελέτη της κίνησης. Τελικά ο Dirichlet 1837 θα καταλήξει σε μια πιο γενική διατύπωση:
"*Η μεταβλητή y είναι συνάρτηση της μεταβλητής x η οποία ορίζεται στο διάστημα a <x <b, αν σε κάθε τιμή της μεταβλητής x από αυτό το διάστημα αντιστοιχεί μια μόνη τιμή της μεταβλητής y, ανεξάρτητα από τη μορφή της αντιστοιχίας*" (Davis & Herch, σελ. 257, 1981, Menheim, σελ. 44)
Κατά αρχή, στον ορισμό αυτό εμφανίζεται ξεκάθαρα το **μονοσήμαντο** της τιμής y. Ακόμη, αν και διατηρείται ο όρος μεταβλητή ενέχει πλέον θέση νοητής επιλογής ενός στοιχείου του συνόλου των πραγματικών αριθμών a <x <b και είναι πλέον ανεξάρτητη από την εμμονή σε μια εποπτική είτε χρονική διάσταση. Εκείνο ωστόσο που αποτελεί το μεγάλο βήμα σε αυτό το ορισμό, σε σχέση με τους παλιότερους, είναι η επιλογή από όλες τις σχέσεις εκείνων που εμπεριέχουν τον συσχετισμό της

μορφής πολλά – ένα, προσδίδοντας στην έννοια κάτι πιο ισχυρό από τον απλό συσχετισμό: Η συνάρτηση, στην μαθηματική πρακτική, αποτελεί μια ειδική σχέση που προσφέρεται ιδιαίτερα στους υπολογισμούς. Στην ουσία πρόκειται για την **εκτίμηση** ενός μεγέθους ψ η οποία όμως **ανάγεται** στην εκτίμηση ενός άλλου μεγέθους χ μέσο μιας σχέσης που τα συνδέει. Το ψ έρχεται να αποτελέσει τον στόχο, που επιδιώκεται να γνωρίζουμε την τιμή του, σε ένα πλαίσιο διαχείρισης, την στιγμή που το χ μας είναι το άμεσα προσπελάσιμο. Μια μέτρηση ενός μεγέθους έχει πάντα μία τιμή και εδώ ίσως οφείλεται η προτίμηση της κοινότητας να θεωρεί ως συναρτήσεις σχέσεις μονότιμες, οι οποίες σε ένα χ αντιστοιχούν ένα μόνο ψ. Η δυνατότητα πολλές μετρήσεις να έχουν το ίδιο αποτέλεσμα οδηγεί με φυσικό τρόπο στην αποδοχή αυτού που αποκαλούμε σχέση πολλά-ένα, για ορισμένες συναρτήσεις. Με αυτή την οπτική θα λέγαμε ότι η συνάρτηση προσφέρεται ως διαμεσολαβητικό εργαλείο, δηλαδή ως **διαμεσολαβημένη εκτίμηση** ή ακόμη ως περιγραφή.
Ο Fraenkel (1966, σελ. 23) εκφράζει χαρακτηριστικά το συγκεκριμένο ζήτημα ως εξής: "*Η συνάρτηση* $T = f(t)$ *που χαρακτηρίζει το θερμογράφο είναι μονότιμη, για κάθε στιγμή t αντιστοιχεί μια κάποια θερμοκρασία. Αν, οποτεδήποτε, ρωτήσουμε σε ποια χρονική τιμή είχαμε μια συγκεκριμένη θερμοκρασία η απάντηση δίδεται από μια συνάρτηση - Η αντίστροφη της συνάρτησης* $T = f(t)$ *είναι εν γένει μη μονότιμη καθόσον διαφορετικές χρονικές στιγμές έχουν διαφορετική μπορεί να έχουν την αυτή θερμοκρασία. Η ιδέα του μονότιμου αλλά μη αναπόφευκτα αντιστρεπτού είναι χρήσιμη στην ανάλυση*".
Τέλος, ο σύγχρονος ορισμός της συνάρτησης διαμορφώνεται μετά τον Hausdorff (1914), ο οποίος δίνει τον ορισμό του διατεταγμένου ζεύγους. Κατά συνέπεια, μπορούμε να πούμε εν συντομία τα εξής: Η συνάρτηση ως τυπική μαθηματική έννοια αποτελεί μια νοητική κατασκευή που ολοκληρώθηκε σχετικώς πρόσφατα μέσα στη επιστήμη. Πρόκειται για μια **σύνοψη** και **ενοποίηση** πολλών εν πρώτοις διαφορετικών εμπειριών και νοητικών εργαλείων, που μαθηματικοί και επιστήμονες εν γένει χρησιμοποίησαν για να λύσουν προβλήματα και να συγκροτήσουν θεωρίες.

2. Δυσκολίες που αφορούν στην έννοια της συνάρτησης.

Η ερμηνεία των διδακτικών δυσκολιών που σχετίζονται με την συνάρτηση είναι αντικείμενο συνεχούς διαπραγμάτευση. Θα αναφέρουμε επιλεκτικά μερικές και θα προτείνουμε την δημιουργία κιναισθητικών εμπειριών στους μαθητές για την διδακτική αντιμετώπισή τους.
α) Εξαιτίας της **ιστορικής συμπύκνωσης** (Katz 1991) η έννοια της συνάρτησης είναι τόσο **αφηρημένη** ώστε να παρουσιάζει πολλές δυσκολίες για την διδακτική της μεταφορά, (παρόλη την απλότητα και την σαφήνεια του ορισμού της για τα κριτήρια ενός μαθηματικού).
β) Στα **διδακτικά εγχειρίδια** παρεισφρύουν κατά συγκεχυμένο τρόπο οι διάφορες επιστημολογικές προσεγγίσεις που οδήγησαν στο νόημα της συνάρτησης, μέσα στην μακρόχρονη ιστορική της εξέλιξη.
γ) Η **πολυσημία** της έννοιας και η συνακόλουθη **πολυπλοκότητα** της διδακτικής της μεταφοράς και της συνάρτησης έχει απασχολήσει ιδιαίτερα τους ενασχολούμενους με την διδακτική των σχολικών (και όχι μόνο) Μαθηματικών και έχει συντελέσει στην εμφάνιση στη διεθνή βιβλιογραφία σε μια πολυδιάστατη μελέτη της έννοιας Dubinsky & Harel (1992), Sierpinska (1992), Kalchman & Case, (1998).
δ) Μία πτυχή των δυσκολιών που σχετίζονται με την έννοια της συνάρτησης είναι και η προτίμηση των μαθητών να καταφεύγουν σε **συναρτήσεις 1-1** όταν τους ζητηθεί να αναφέρουν ένα παράδειγμα συνάρτησης (Evagelidou et al, 2004).Το γεγονός είναι

αναμενόμενο καθόσον η έννοια της αντιστοιχίας 1-1 προσφέρεται άμεσα στο νου με τις πρώτες ιδέες της απαρίθμησης. Ωστόσο, εκείνο που αναφύεται πιο δύσκολο είναι η ιδέα της συνάρτησης ως **'πολλά – ένα'** δηλαδή η δυνατότητα σε διαφορετικές τιμές της μεταβλητής χ να μπορεί να αντιστοιχεί η ίδια τιμή της μεταβλητής ψ. Ο Piaget έχει αναζητήσει κιναισθητικές εμπειρίες που να αποτελούν στοιχεία βίωσης του 'πολλά – ένα'. Πολλές διαφορετικές δράσεις μπορεί να καταλήγουν στο ίδιο αποτέλεσμα, π.χ. ένα σημείο το προσεγγίζω με πολλούς δρόμους (Chapman et al 1988, Davidson 1992).

Αυτό που προτείνουμε στην παρούσα εργασία είναι το παράδειγμα της περιοδικής συνάρτησης και συγκεκριμένα της τριγωνομετρικής εφαπτομένης, η κατασκευή της οποίας μπορεί να στηριχτεί σε κιναισθητικές εμπειρίες των μαθητών όταν οι μαθητές χρησιμοποιούν εργαλεία μέτρησης. Επιπλέον η περιοδική συνάρτηση είναι ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα συνάρτησης 'πολλά-ένα' ενώ συγχρόνως μπορεί να θεωρηθεί ως διαμεσολαβημένη μέτρηση.

Αρκετές έρευνες σχετίζονται με τον τρόπο που οι μαθητές κατασκευάζουν συναρτήσεις καθώς χρησιμοποιούν φυσικά εργαλεία, Da Costa& Magina (1998), Noble e.a (2001). Στις έρευνες αυτές έχει επισημανθεί η αξία της χρήσης φυσικών μηχανισμών σε συνδυασμό με υπολογιστικά εργαλεία για την κατανόηση μαθηματικών εννοιών με ιδιαίτερη έμφαση στις περιοδικές συναρτήσεις και την συνάρτηση ημίτονο. Η μαθηματική έννοια που σχετίζεται με την παρούσα έρευνα είναι η τριγωνομετρική εφαπτομένη.

3.2 Η έννοια της συνάρτησης στην Ελληνική δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Η συνάρτηση ορίζεται για πρώτη φορά στην Β΄ Γυμνασίου, ως αλληλεξάρτηση δύο ποσοτήτων. Η έννοια στην τάξη αυτή διδάσκεται ως «η διαδικασία με την οποία για κάθε τιμή της μεταβλητής χ θα βρίσκουμε την αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής ψ». Στις οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου (Π.Ι) προς τους διδάσκοντες στην Β΄ Γυμνασίου είναι εμφανής η πολυσημία της έννοιας: «Με κατάλληλα παραδείγματα από την καθημερινή ζωή διαπιστώνεται ότι υπάρχει **αλληλεξάρτηση** μεταξύ δύο μεγεθών, η οποία εκφράζεται με μία **ισότητα** που συνδέει τις αντίστοιχες τιμές των δύο μεγεθών. Η ισότητα αυτή ορίζει μία συγκεκριμένη **διαδικασία** με την οποία σε κάθε τιμή μιας μεταβλητής χ **αντιστοιχίζεται** μία μόνο τιμή μιας άλλης μεταβλητής ψ. Μία τέτοια διαδικασία ονομάζεται συνάρτηση» Εδώ αναφέρονται όλες σχεδόν οι σημασίες της έννοιας της συνάρτησης ως αλληλεξάρτηση, ως ισότητα, ως διαδικασία και εμμέσως ως αντιστοιχία, ενώ κατά προτεραιότητα θεματοποιείται το χ.

Στην Γ΄ Γυμνασίου, εισάγεται διακριτικά η έννοια της συνάρτησης, ως μηχανισμός με τον οποίο γίνεται η αντιστοιχία και σημειώνεται ότι: «μία συνάρτηση περιγράφεται όταν γνωρίζουμε για κάθε τιμή του χ το f(χ)». Στην τάξη αυτή, με βάση της οδηγίες του Π.Ι προς τον διδάσκοντα, «.... θα πρέπει να δοθεί μεγάλη βαρύτητα στις γραφικές παραστάσεις», και πάλι η προτεραιότητα του χ δεν αφήνει να φανεί ο στόχος: μέτρηση του ψ, επομένως αναμενόμενη τιμή μία.

Στην Α ΄ Λυκείου η συνάρτηση είναι : «Μία διαδικασία (κανόνας) από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του Β». Αλλά κανόνας είναι και μια σχέση εν γένει. Είναι χαρακτηριστικό ότι ενώ στις οδηγίες του Π.Ι για το Γυμνάσιο υπογραμμίζεται η σημασία των παραδειγμάτων από την καθημερινή εμπειρία του μαθητή στις οδηγίες για το Λύκειο απουσιάζει μία τέτοια υπόδειξη.

Στην Β΄ Λυκείου θα σταθούμε λίγο στον τρόπο με τον οποίο εισάγεται η έννοια της τριγωνομετρικής συνάρτησης και ιδιαίτερα της ψ=εφχ. Το σχολικό βιβλίο αναφέρει

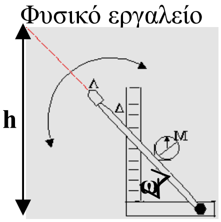
τα εξής: « Όπως γνωρίζουμε για κάθε γωνία ω υπάρχει μια μόνο τιμή του ημω, με $-1 \leq$ ημω≤ 1». Έτσι ορίζεται μία συνάρτηση με την οποία κάθε γωνία ω αντιστοιχίζεται στο ημίτονό της. Όμοια ορίζονται και οι άλλες τριγωνομετρικές συναρτήσεις γωνιών». Λίγο παρακάτω: «Η συνάρτηση εφαπτομένη που συμβολίζεται με εφ, ορίζεται ως εξής: $\text{εφχ}=\frac{\text{ημχ}}{\text{συνχ}}$. Είναι φανερό ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης εφ είναι το σύνολο $R_1=\{\chi/\text{συν}\chi\neq 0\}$. Επειδή για κάθε χ που ανήκει στο R_1 ισχύει εφ(χ+π)=εφ(χ-π)=εφχ, η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο π.» Όσον αφορά στην γραφική παράσταση χρησιμοποιούνται 4 ημιευθείες οι οποίες τέμνουν τον άξονα των εφαπτομένων και παραπέμπουν σε μία περιστρεφόμενη ημιευθεία, της οποίας έχουν αποθανατιστεί μερικά στιγμιότυπα. Η έννοια της ασύμπτωτης, της γραφικής παράστασης της εφαπτομένης περιγράφεται, ως εξής: «Όταν ο χ τείνει στο π/2 από μικρότερες τιμές η εφχ τείνει στο $+\infty$. Γι αυτό λέμε ότι η ευθεία χ=π/2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.» Τέλος, η γραφική παράσταση της εφαπτομένης κατασκευάζεται μέσω ενός πίνακα τιμών και στην συνέχεια παρουσιάζονται οι επαναλαμβανόμενοι κλάδοι της.
Στην ουσία η συνάρτηση της τριγωνομετρικής εφαπτομένης περιγράφεται ως μία μαθηματική έννοια που προκύπτει από τον συμβολική εμπλοκή δύο άλλων εννοιών του ημιτόνου και του συνημιτόνου.

Ερευνώντας την συνάρτηση ως διαμεσολαβημένη εκτίμηση.

Μέσα στα πλαίσια των προβληματισμών που αναφέρθηκαν προηγουμένως, σχεδιάστηκε ένα ερευνητικό project του οποίου το πρώτο μέρος είχε διάρκεια περίπου 3 χρόνια. Τα γενικά ερευνητικά ερωτήματα αφορούσαν στους ιδιαίτερους τρόπους με τους οποίους προβλήματα μετρήσεων θα μπορούσαν να αποτελέσουν για τους μαθητές, ένα πλαίσιο συγκρότησης της έννοιας της συνάρτησης. Έμφαση είχε δοθεί σε εκείνες τις συναρτήσεις που συνδέονται με μετρήσεις στον φυσικό χώρο, ιδιαίτερα δε της τριγωνομετρικής εφαπτομένης.
Η όλη ερευνητική agenda βασίστηκε σε δύο υποθέσεις:
α) Το πλήθος και οι δυνατότητες των εργαλείων που διαθέτει ο μαθητής είναι κρίσιμος παράγοντας στην μαθησιακή διαδικασία αφού επεκτείνουν τις δυνατότητές του.
β) Ένα μαθησιακό περιβάλλον που συνδυάζει εργαλεία μετρήσεων και τον υπολογιστή ευνοεί την κατασκευή από τους μαθητές της έννοιας της συνάρτησης ως διαμεσολαβημένη μέτρηση.
Οι υποθέσεις αυτές μας οδήγησαν στα παρακάτω ερευνητικά ερωτήματα:
α) Ποιες είναι οι ιδιαίτερες δράσεις μαθηματικοποίησης από την μεριά των μαθητών καθώς εργάζονται μέσα σε ένα μαθησιακό περιβάλλον, που συνδυάζει φυσικά εργαλεία μετρήσεων και υπολογιστικές προσομοιώσεις τους.
β) Πως οι δράσεις αυτές συμβάλουν στην δημιουργία νοημάτων σχετικών με την έννοια της συνάρτησης, ιδιαίτερα της τριγωνομετρικής εφαπτομένης, και των ιδιοτήτων της.

Σχεδιασμός και υλοποίηση της έρευνας
Ο σχεδιασμός της έρευνας βασίστηκε στις δύο γενικές υποθέσεις που αναφέρθηκαν προηγουμένως ενώ για την υλοποίησή της κατασκευάστηκε ένα εργαλείο μέτρησης του ύψους ενός απομακρυσμένου απρόσιτου αντικειμένου.

Φυσικό εργαλείο

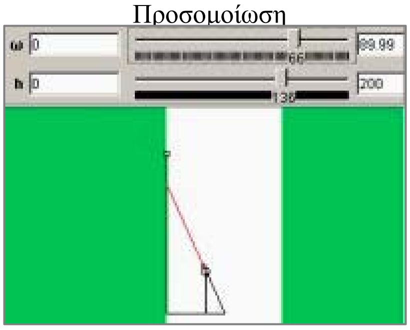


Όταν περιστρέφεται ο δείκτης, χωρίς να μεταφέρεται το εργαλείο, τότε τα μεγέθη που μεταβάλλονται είναι η γωνία ω και το ύψος εστίασης h πάνω στον τοίχο.
Η μέτρηση της γωνίας ω μπορούσε να γίνει άμεσα με το μοιρογνωμόνιο Μ που έφερε ο δείκτης πάνω του. Η σταθερή απόσταση από τον τοίχο μπορούσε να μετρηθεί με ένα μέτρο το οποίο είχαν στην διάθεσή τους οι μαθητές.
Επιπλέον, χρησιμοποιήθηκαν λογισμικά με τα οποία δημιουργήσαμε προσομοιώσεις των εργαλείων, με στόχο την κατασκευή ενός μαθησιακού περιβάλλοντος στο οποίο να συνδυάζονται-συντονίζονται τα φυσικά με τα υπολογιστικά εργαλεία.
Η λειτουργία των φυσικών εργαλείων ήταν άγνωστη στους μαθητές, οπότε η κατάσταση προβλήματος αφορούσε στον τρόπο με τον οποίο θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν τα εργαλεία αυτά, ώστε να μετρήσουν ένα ορισμένο ύψος μέσα στο φυσικό περιβάλλον.
Η πιλοτική έρευνα διήρκεσε περίπου 18 μήνες και μέσω αυτής εντοπίστηκαν δυσλειτουργίες και ασάφειες που είχαν υπεισέλθει στον σχεδιασμό του μαθησιακού περιβάλλοντος. Για παράδειγμα, το δύσχρηστο εργαλείο μέτρησης αντικαταστάθηκε από ένα περισσότερο ευέλικτο, ενώ το αρχικό λογισμικό (sketchpad) αντικαταστάθηκε από το λογισμικό ‘Χελωνόκοσμος’ της υπολογιστικής πλατφόρμας ‘Αβάκιο’ που έχει αναπτύξει το Εργαστήριο Εκπαιδευτικής τεχνολογίας του Πανεπιστημίου της Αθήνας. Το τελευταίο θεωρήθηκε αναγκαίο, γιατί σε μελέτη περίπτωσης δύο ζευγών μαθητών διαπιστώθηκε ότι το λογισμικό αυτό ευνοούσε την συναρτησιακή διαχείριση των προσομοιώσεων.
Η κυρίως έρευνα διήρκεσε 18 μήνες επίσης και σε αυτήν συμμετείχαν 12 ομάδες των δύο ή τριών μαθητών, τόσο της Γ΄ Γυμνασίου όσο και της Α΄ Λυκείου. Οι μαθητές κάθε ομάδας απασχολήθηκαν 7-9 ώρες στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου τους εκτός ωραρίου λειτουργίας.
Τα δεδομένα συνελέγησαν μέσω βιντεοσκόπησης και μαγνητοφώνησης των συναντήσεων, από τις σημειώσεις των μαθητών σε ειδικά διαμορφωμένα τετράδια, και τις απαντήσεις σε συγκεκριμένες ερωτήσεις φύλλων εργασίας. Τα ηχητικά δεδομένα απομαγνητοφωνήθηκαν και οι διάλογοι συσχετίστηκαν με τα δεδομένα των σημειώσεων, ώστε για κάθε ομάδα να μελετηθεί η πορεία μέσω της οποίας οι μαθητές χρησιμοποιούσαν ή δημιουργούσαν συναρτήσεις. Στην ανάλυση και στα αποσπάσματα που παρατίθενται στην συνέχεια, ο ερευνητής συμβολίζεται με το γράμμα Ε η μαθήτρια ή ο μαθητής που βρισκόταν αριστερά της οθόνης ως Α ενώ η άλλη/ος Δ . Κάθε ομάδα χαρακτηρίζεται από ένα κεφαλαίο γράμμα Α (Λύκειο) ή Γ (Γυμνάσιο) και δίπλα έναν αυθαίρετο αύξοντα αριθμό.
Ο ερευνητικός στόχος αφορούσε στην αναζήτηση δομών δράσεων από το μέρος των μαθητών, καθώς αυτοί χρησιμοποιούσαν τα εργαλεία του μαθησιακού περιβάλλοντος για να αξιοποιήσουν τα φυσικά εργαλεία (κατάσταση προβλήματος).

Η κατασκευή μίας συνάρτησης.
Η μη γραμμική συσχέτιση της γωνίας και του ύψους στο οποίο εστιάζει το λέιζερ απετέλεσε τον πυρήνα γύρω από τον οποίο δομήθηκε από τους μαθητές η κατασκευή της συνάρτησης της τριγωνομετρικής εφαπτομένης. Η πορεία στις διάφορες ομάδες παρουσίασε αρκετά κοινά χαρακτηριστικά τα οποία φαίνεται να αποτελούν μια δομή που αναδυόταν καθώς προχωρούσε η έρευνα.
Στάδιο πρώτο: Η μη γραμμικότητα.

Αφετηρία της δραστηριότητας υπήρξε το ερώτημα: «Αν θέλουμε να εστιάσουμε το λέιζερ σε διπλάσιο ύψος, από αυτό στο οποίο ήδη εστιάζει, τι επέμβαση θα πρέπει να κάνουμε στην γωνία;»
Η συντριπτική πλειοψηφία των μαθητών απάντησε αυθόρμητα ότι θα πρέπει να διπλασιαστεί η γωνία και στην συνέχεια επιχείρησαν να το επιβεβαιώσουν. Η πρόβλεψη των μαθητών διαψεύστηκε όταν επιχείρησαν να διπλασιάσουν την γωνία και παρατήρησαν ότι το λέιζερ εστιάζει σε αρκετά μεγαλύτερο ύψος από το διπλάσιο. Η κατάρρευση της γραμμικότητας στην σχέση των δύο ποσών που μεταβάλλονται αποτελεί την πρώτη ψηφίδα στην συγκρότηση της έννοιας της τριγωνομετρικής μεταβολής η οποία στην συνέχεια θα αποτελέσει μια βάση για την συγκρότηση της έννοιας της συνάρτησης της τριγωνομετρικής εφαπτομένης.
Οι μαθητές έχοντας απορρίψει το μαθηματικό εργαλείο των αναλογιών για την μέτρηση-συσχέτιση των δύο μεγεθών αποφασίζουν να μελετήσουν τις μετρήσεις σε μία προσομοίωση του εργαλείου.
Στάδιο δεύτερο: Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και οι ασύμπτωτες.

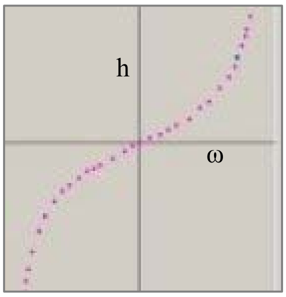
Προσομοίωση



Οι μαθητές είχαν στην διάθεσή τους μία γεωμετρική προσομοίωση του φυσικού εργαλείου, η οποία τους παρείχε την δυνατότητα να μεταβάλουν αυθαίρετα την γωνία ω και το ύψος h από τους δύο μεταβολείς (στο πάνω μέρος της προσομοίωσης)και να καθορίσουν τις τιμές των ακραίων τιμών που μπορούν να πάρουν οι δύο μεταβλητές ω και h.
Σύροντας τους δύο μεταβολείς αναζήτησαν τις τιμές μέσω των οποίων το υποτιθέμενο λέιζερ εστίαζε στο συγκεκριμένο ύψος.
Στην ουσία, η προσομοίωση ήταν ένα επιπλέον εργαλείο το οποίο επιτάχυνε τους υπολογισμούς, τους οποίους οι μαθητές θα έπρεπε να εκτελέσουν στον φυσικό χώρο, και τους επέτρεψε να πειραματιστούν με ένα εικονικό εργαλείο ισοδύναμο προς το φυσικό.
Η πρώτη σημαντική συναρτησιακή δράση ήταν ο καθορισμός των ακραίων τιμών για την γωνία ω καθώς οι μαθητές έδειξαν μία ισχυρή προτίμηση για ένα αρχικό διάστημα [0, 89]. Οι λόγοι που τους οδήγησαν σε αυτή την δράση ήταν κυρίως η λειτουργία του φυσικού εργαλείου το οποίο στις 90 μοίρες δεν θα μπορούσε να εστιάσει σε κανένα ύψος. Επιπλέον, τα ύψη που οι μαθητές μετρούσαν στον φυσικό χώρο δεν είχε νόημα να πάρουν αρνητικές τιμές, όπως υποστήριξαν οι περισσότεροι. Είναι χαρακτηριστική η διαπραγμάτευση μεταξύ των μελών ενός ζεύγους και του ερευνητή.
Ε: Ποιά είναι τα όρια της γωνίας;
Α: Να είναι μέχρι 90 παραπάνω πόσο;…(περιστρέφει τον δείκτη του φυσικού εργαλείου και μορφάζει εκφράζοντας αμφιβολία)
Δ: Βάλτο μέχρι 80 …από 15.
Α: Από 0…γιατί όχι;
Ε: Το μηδέν τι νόημα έχει;
Α: Ο δείκτης είναι εδώ (κατεβάζει τον δείκτη του φυσικού εργαλείου κάτω).
Ε: Το 90 τι νόημα έχει;
Α: Το λέιζερ γίνεται **παράλληλο**, δεν θα σταμάταγε πουθενά.
Δ: Θα φτάσει **όσο θέλουμε ψηλά**.
Βάζουν 90 στο άκρο του μεταβολέα και δοκιμάζουν την τιμή αυτή οπότε δημιουργείται μία πολλαπλά ανακλώμενη ακτίνα του λέιζερ αφού δεν χωρούσε μέσα στα όρια της προσομοίωσης.

A: Όπα, μπερδεύτηκε…να του βάλουμε 89,9999…
Οι μαθητές έχουν δημιουργήσει δύο επιπλέον ψηφίδες της συνάρτησης, ένα πεδίο ορισμού [0 90) και μία έννοια ασύμπτωτης αφού έχουν εισάγει την έννοια του απείρου (όσο θέλουμε ψηλά) και την έννοια της παράλληλης πορείας (κατακόρυφης)

Στάδιο τρίτο: Γραφική παράσταση και επέκταση του πεδίου ορισμού.
Ο σχεδιασμός της έρευνας προέβλεπε, μετά την μελέτη της προσομοίωσης, να ζητηθεί από τους μαθητές να μελετήσουν την σχέση των τιμών ω και h μέσα από την γραφική παράσταση των ζευγών των τιμών αυτών.

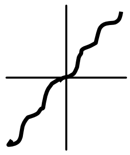


Οι μαθητές είχαν τη δυνατότητα να αναζητήσουν, σε ένα καρτεσιανό επίπεδο, τα σημεία (ω , h) οι συντεταγμένες των οποίων επέτρεπαν το εικονικό λέιζερ να εστιάσει στο ύψος h. Η διάταξη των σημείων απετέλεσε έναν πυρήνα διαπραγμάτευσης καθοριστικό για την συγκρότηση της νέας συνάρτησης.
Η επέκταση του πεδίου ορισμού σε αρνητικές τιμές έγινε μέσα από την διάταξη των σημείων και την τυχαία, στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, επιλογή σημείων στο τρίτο τεταρτημόριο των αξόνων.
Η διαπραγμάτευση των μαθητών για την σημασία των αρνητικών τιμών για την γωνία και το ύψος είχε σαν αφετηρία την άποψη ότι δεν έχει νόημα να δοκιμαστούν αρνητικές τιμές, αφού όπως χαρακτηριστικά σημείωσε μία μαθήτρια της ομάδας Α3 : «Δεν υπάρχουν αρνητικοί αριθμοί στο φυσικό περιβάλλον»
Σε άλλο ζεύγος (Γ 2) παρατηρούν ότι το εικονικό εργαλείο στην οθόνη σχηματίζεται αντεστραμμένο για αρνητικές τιμές της γωνίας ω και ισχυρίζονται:
Δ: Όχι δεν γίνεται γιατί θα πάμε υπόγεια
Ε: Στην οθόνη όμως;
Δ: Η οθόνη δεν είναι φυσικός χώρος.
Τώρα, οι μαθητές δυσκολεύονται να αποδώσουν νόημα στις αρνητικές τιμές αφού διατηρούν την αντίληψη ότι η προσομοίωση ως εικονικός χώρος δεν είναι κατ ανάγκη ισόμορφη προς τον φυσικό χώρο. Η αντίληψη αυτή φαίνεται ότι ενισχύθηκε από την χρήση του εργαλείου αποκλειστικά για την μέτρηση ύψους. Όταν οι μαθητές επιχείρησαν να χρησιμοποιήσουν το εργαλείο σύμφωνα με την προσομοίωση τότε άρχισαν να επινοούν καταστάσεις προβλημάτων στα οποία θα ήταν χρήσιμη η αντιστροφή του εργαλείου(Α3).
Ε: Τι θα μπορούσε να μετρήσει τώρα;
Δ: Το βάθος.
Ε: Το βάθος είναι αρνητικό;
Δ: Όχι θετικό είναι αλλά δεν χρειάζεται να πας κάτω για να το μετρήσεις.
Α: Αν είμαστε σε ένα πηγάδι και θέλαμε να μετρήσουμε το βάθος του θα βάλουμε έτσι το εργαλείο (εννοεί στο χείλος του πηγαδιού).
Στο ζεύγος Γ6 η μαθήτρια Δ υποστήριξε ότι «Μπορούμε αν καθόμαστε στο ταβάνι ανάποδα και θέλουμε να μετρήσουμε το ύψος του δωματίου».
Έτσι, οι μαθητές επεκτείνουν το πεδίου ορισμού σε αρνητικές τιμές μέσα από την επέκταση της χρήσης του φυσικού εργαλείου σε μετρήσεις όχι μόνο ύψους αλλά και βάθους. Η επέκταση αυτή γίνεται μέσα από την ανάγκη να αποδοθεί νόημα στα σημεία της γραφικής παράστασης που βρίσκονται στο τρίτο τεταρτημόριο.

Στάδιο 4^{o} . Ο τύπος της συνάρτησης.

Ο εντοπισμός της συμβολικής αναπαράστασης της νέας συνάρτησης στηρίχτηκε στην προσπάθεια των μαθητών να βρουν έναν τύπο για τον υπολογισμό του ύψους h μέσω της γωνίας ω ώστε να αξιοποιηθεί το εργαλείο.
Η αδυναμία να εντοπίσουν οι μαθητές τον τύπο της συσχέτισης των δύο μεταβλητών, ενώ είχαν κατασκευάσει την γραφική παράσταση, οδήγησε τα περισσότερα ζεύγη να επιστρέψουν σε ένα γεωμετρικό σχήμα στο τετράδιο.
Εδώ, υπήρξε κρίσιμη η παρουσία του μοιρογνωμόνιου Μ με το οποίο οι μαθητές είχαν την δυνατότητα να μετρήσουν την γωνία του δείκτη. Αυτό οδήγησε τους μαθητές να ανακαλέσουν τριγωνομετρικές έννοιες με προτίμηση στην εφαπτομένη πρωτίστως αλλά και του ημιτόνου δευτερευόντως. Έτσι, στα περισσότερα ζεύγη κατέγραψαν οι μαθητές τον τύπο εφω=$\frac{h}{d}$ από όπου προέκυψε ο h=dεφω τον τύπο δηλαδή μέσω του οποίου μπορούσαν να πραγματοποιήσουν μετρήσεις. Στο σημείο αυτό και με βάση το φύλλο εργασίας οι μαθητές θα έπρεπε να διαπραγματευτούν το ερώτημα : «Πως συνδέεται ο τύπος αυτός με τα προηγούμενα;»
Οι μαθητές αντιμετώπισαν πραγματική δυσκολία αφού ο τύπος δεν αποτελούσε γι αυτούς συνάρτηση. Για παράδειγμα στο ζεύγος Γ1.
Α: Μοιάζει με ανάλογα ποσά αλλά δεν είναι.
Ε: Είναι συνάρτηση αυτό;
Α: Εφόσον έχουμε το d σταθερό αυτό μπορεί να αντιστοιχεί στο α και να βγεί ψ=α.χ αλλά αυτό δεν ταιριάζει στην γραφική παράσταση.
Δ: Με τίποτα δεν είναι ψ=αχ γιατί η εφαπτομένη δεν είναι χ το εφ είναι εφαπτομένη
Α: (Προς τον Ε) μπορούμε να πούμε εφαπτομένη χ; Η γωνία θα είναι χ;
Ε: Το ψ;
Α-Δ: Το ύψος
Ε: Αυτό είναι συνάρτηση;
Α: Ναι γιατί σε κάθε γωνία αντιστοιχεί ένα ύψος.
Ε: Ποιά είναι η γραφική παράστασή της;
Δ: Δεν το πιστεύω… αυτή;!! (δείχνει την γραφική παράσταση στους άξονες)
Ε Πώς να χαρακτηρίσουμε την συνάρτηση αυτή;
Δ: Αλγεβρογεωμετρική
Α: Ααα τριγωνομετρία…… Τριγωνομετρική;
Τελικά, η συμβολική αναπαράσταση ψ=d.εφχ φαίνεται να προκύπτει κυρίως μέσω της χρήσης των συμβόλων χ και ψ. Τα σύμβολα αυτά, σε όλα τα ζεύγη, απέδωσαν συναρτησιακό νόημα στον τύπο μέτρησης h=d.εφω ο οποίος υφίσταται έναν εννοιολογικό μετασχηματισμό σε συνάρτηση.
Στάδιο 5^o .Η υπέρβαση του 1-1
Στο τελευταίο στάδιο της δραστηριότητας οι μαθητές διαπραγματεύτηκαν το ερώτημα: «Τι νόημα θα μπορούσε να έχουν τιμές του χ μεγαλύτερες των 90^o»
Η διερεύνηση του ερωτήματος και η διαδρομή προς μία απάντηση είναι συνάρτηση του εργαλείου που χρησιμοποιήθηκε αρχικά.
Οι μαθητές που χρησιμοποίησαν αρχικά το φυσικό εργαλείο περιέστρεψαν τον δείκτη σε γωνία μεγαλύτερη των 90^o οπότε παρατήρησαν ότι το λέιζερ εστιάζει πάλι σε κάποιο ύψος.
Είναι χαρακτηριστικός ο διάλογος στο σημείο αυτό στην ομάδα Α2.
Δ: Επειδή σκέφτηκα….. επειδή ξαναγυρίζει, ξανασχηματίζεται το ίδιο.
Α: Λογικά αυτό που γίνεται μέχρι το 360^o πρέπει να ξαναεπαναλαμβάνεται (περιστρέφει τον δείκτη του εργαλείου)
Ε: Τι επαναλαμβάνεται;
Α: Έχει κάνει ένα σχηματάκι μέχρι αυτό το σημείο και μετά ξανακάνει το ίδιο

(ζωγραφίζει το διπλανό σχήμα)

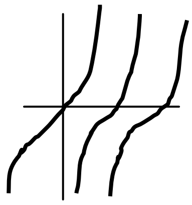


Θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε το σχήμα του μαθητή ως προσπάθεια απόδοσης της περιοδικότητας μέσα από δύο αρχέτυπες αντιλήψεις για την συνάρτηση, την συνέχεια του γραφήματος και το 1-1. Η περιοδικότητα στο σημείο αυτό έχει μάλλον γεωμετρικό χαρακτήρα παρά συναρτησιακό.

Συνεχίζοντας να χειρίζονται το φυσικό εργαλείο ο Α αντιστρέφει και περιστρέφει τον δείκτη:

Δ: Ωραία το στρίβουμε έτσι ώστε να ξαναπηγαίνει εκεί το κατάλαβα

Α: Άμα ξαναρχίζει από το 0 εδώ πέρα έτσι(δείχνει την γραφική παράσταση στο χαρτί) πως θα πηγαίνει έτσι; (δείχνει επαναλαμβανόμενες καμπύλες την μία δίπλα στην άλλη). Είναι γελοίο…. Κάντην εσύ.



Ο Δ κατασκευάζει το διπλανό σχήμα, που του υπέδειξε ο Α, αλλά εκφράζει σοβαρές αμφιβολίες και αυτός.

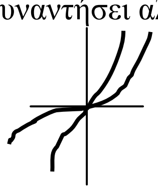
Είναι χαρακτηριστικό ότι η κιναισθητική εμπειρία του Α, ο οποίος χειρίστηκε το εργαλείο, μεταφράστηκε σε ένα γράφημα το οποίο δομικά είναι ισόμορφο προς το φαινόμενο που δημιουργήθηκε. Τα αρχέτυπα όμως της συνέχειας και του 1-1, καθώς και η έλλειψη οποιασδήποτε μαθηματικής εμπειρίας για περιοδικές συναρτήσεις δημιουργεί αρνητική στάση απέναντι στο γράφημα.

Η αρνητική στάση οδηγεί τους μαθητές σε μία τρίτη λύση.

Δ: Να περνάει από δω και να μην περνά από το 0; (με απορία)

Α: Κάτσε μούβαλες μία ιδέα τώρα…αυτό εδώ πέρα πάει και ξαναπάει

Δ: Σκέφτομαι ότι εκτός από εδώ (δείχνει την αρχή των αξόνων) δεν μπορεί να συναντήσει αλλού τους άξονες.



Η διαπίστωση αυτή οδηγεί τους μαθητές στην κατασκευή ενός σχήματος στο οποίο για πρώτη φορά αναιρείται η συνέχεια του γραφήματος αλλά καταργείται η περιοδικότητα και το 1-1. Στην ουσία δεν πρόκειται για γράφημα συνάρτησης πλέον.

Στο σημείο αυτό ο ερευνητής τους ζητά να ελέγξουν την εγκυρότητα των γραφημάτων αποκλειστικά μέσα από την προσομοίωση οπότε οι μαθητές καταφεύγουν στην γραφική παράσταση:

Δ: πάρε ένα σημείο που να είναι πολύ πιο πέρα.

Α: Να είναι στην ίδια ευθεία.

Ε: Στην ίδια ευθεία;

Α: Αυτό πρέπει να γίνεται, στην ίδια ευθεία αφού έχει κάνει όλο αυτό εδώ πέρα (δείχνει την δεύτερη γραφική παράσταση) δεν μπορεί να έχει δύο τιμές.

Δ: Λογικό γιατί εδώ πέρα που δεν θα ενώνεται, δεν ενώνεται ούτε εδώ(δείχνει την ασυνέχεια στο σωστό σχήμα) οπότε επαληθεύονται και αυτά τα σημεία (δείχνει σημεία στην ίδια ευθεία σε διαφορετικούς κλάδους.

Εδώ πλέον η τελική επιλογή γίνεται με το κριτήριο το μονότιμο της συνάρτησης

Διαπραγμάτευση.

Συνοψίζοντας τα ερευνητικά ευρήματα μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι οι μαθητές, με βάση τα εργαλεία που διέθεταν, κατασκεύασαν μία έννοια τριγωνομετρικής συνάρτησης, τα χαρακτηριστικά της οποίας προέκυψαν και συνδέθηκαν με τις δυνατότητες των εργαλείων και την κατάσταση προβλήματος.

Η συνάρτηση, και ένα μέρος από τις ιδιότητές της, αναδύθηκε μέσα από την συντονισμένη χρήση του φυσικού εργαλείου και της προσομοίωσης. Η έννοια δομείται γύρω από τον στόχο που εκφράζεται ρητά μέσα στην κατάσταση προβλήματος «Να υπολογιστεί ένα ύψος h προς το οποίο δεν έχουμε άμεση πρόσβαση».

Τα σύμβολα που απέδωσαν τον τύπο της συνάρτησης προέκυψαν μέσα από την εμπειρία της μέτρησης.

h ή (ψ)	στόχος μέτρησης
ω ή (χ)	άμεση μέτρηση
d.εφω ή (d.εφχ)	έμμεση μέτρηση.

Η περιοδικότητα της συνάρτησης προέκυψε μέσα από την περιοδικότητα του φαινομένου που δημιούργησαν τα εργαλεία. Για την κατασκευή της γραφική παράστασης οι μαθητές χρειάστηκε να υπερβούν τα αρχέτυπα σχήματα της συνέχειας μιας καμπύλης και του 1-1. Η υπέρβαση αυτή έγινε δυνατή μέσω της δυνατότητας να πειραματιστούν με τα εργαλεία του περιβάλλοντος.
Τελικά προέκυψαν ενδείξεις ότι οι μαθητές, καθώς εργάζονται στο συγκεκριμένο μαθησιακό περιβάλλον, έχουν την δυνατότητα να κατασκευάσουν οι ίδιοι και να διερευνήσουν τις ιδιότητες της τριγωνομετρικής συνάρτησης της εφαπτομένης έξω από το περιγραφικό, και εν πολλοίς αυθαίρετο για αυτούς, πλαίσιο διδασκαλίας που προτείνει το σχολικό βιβλίο. Η συνάρτηση απέκτησε ένα συγκεκριμένο νόημα για τους μαθητές, αυτό της αξιοποίησης ενός φυσικού εργαλείου μέτρησης.
Η έρευνα που παρουσιάστηκε θα μπορούσε να συμπληρωθεί σε δύο κατευθύνσεις. Η πρώτη αφορά στην αξιοποίηση του συγκεκριμένου εργαλείου χωρίς την χρήση του μοιρογνωμόνιου. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση μέτρησης είναι γραμμική, αφού τα μαθηματικά που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν είναι η ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων επομένως και τα ανάλογα ποσά. Η δεύτερη αφορά στην χρήση άλλου εργαλείου μέτρησης, όχι υποχρεωτικά μήκους, αλλά χρόνου. Αυτή θα είναι μία από τις επόμενες φάσεις του ερευνητικού μας project.

Βιβλιογραφία

Boyer C. B. (1949), The History of the Calculus and its Conceptual Development, Dover, New York.

Chapman M. & Lindenberger (1988), Functions, Operations, and Decalage in the Development of Transivity, *Developmental Psychology,* Vol. 24, No 4, pp 542-551.

Davidson P.M. (1992), Genevan Contribution Characterizing the Age 4 Transition, *Human Development,* 35: pp. 165-171.

Davis P. J. & Hersh R. (1981), Η Μαθηματική Εμπειρία, μετ. Αναστασιάδη, εκδόσεις Τροχαλία.

Dubinky E. & Harel G. (1992), The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy, *Mathematical Association of America (MMA).*

Evagelidou A. Spyrou P. Gagatsis, I. Elia (2004), University Student's Conception of Function, PME 28, Vol 2, pp. 251-258.

Fraenkel A. A. (1966), Abstract Set Theory, North Holland, Amsterdam.

Kalchman M. & Case R. (1988), Scienta Paedagogica Experimentalis, XXXV, 1, 1998, 7-54.

Katz V.J. (1993), A History of Mathematics, *Harper Collins College Publishers,* New York.

Keisoglou S. & Spyrou P. (2003), Processes of mathematization in a learning environment combining devices and computational tools, *Rediconti Ricerca Mathematica, 13, p. 43-57.*

Koyré A, (1943), μετάφραση Κ. Κριμπά, (1994), Γαλιλαίος και Πλάτων , *ΝΕΥΣΙΣ, Ι* σελ. 51-83.

Nielse Lobo & Da Costa Sandra Magina (1998). '' Making sense of sine and cosine functions through alternative approaches: 'Computer and experimental world' contexts'' Proceedings of the 22th Conference for the Psychology of Mathematics Education

Noble, Nemirovsky, Wright, Tierny (2001) ''Experiencing change: The mathematics of change in multiple environments'' JRME January

Sierpinska, A.: (1992), On understanding the notion of function. In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), *The Concept of Function, Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Mathematical Association of America, MAA Notes, Volume 25, 25-58.

Noble, Ricardo Nemirovsky, Paul Wagoner1, Jesse Solomon, "This is true: that's how it is. "The Bouncing Car and the Development of Complexity"
http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/TERC_AERA.pdf

1. ΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΗΜΕΙΩΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ ΚΑΙ Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥΣ ΣΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΜΑΘΗΣΗΣ

1. Εισαγωγή

Γενικά στα μαθηματικά όταν ορίζουμε ένα αντικείμενο δεν είναι εύκολο πάντα να το προσεγγίσουμε και να το καταλάβουμε, αντίθετα από άλλες επιστήμες όπως η φυσική ή η χημεία, όπου είναι δυνατό να έχουμε φυσικές αναφορές στο αντικείμενο που ορίζουμε. Όταν π.χ. ορίζουμε την έννοια της ταχύτητας όλοι μπορούμε να φέρουμε στο μυαλό μας ένα γρήγορο όχημα ή ένα ταχύτατο αεροπλάνο. Κι έτσι, διαθέτουμε μια πραγματική αναφορά η οποία μας διευκολύνει να συλλάβουμε την έννοια που ορίζουμε. Όταν όμως ορίζουμε την έννοια της συνάρτησης στα μαθηματικά, δεν μπορούμε αυθόρμητα να οδηγηθούμε σε μία φυσική αναφορά για να προσεγγίσουμε την έννοια που ορίζουμε.

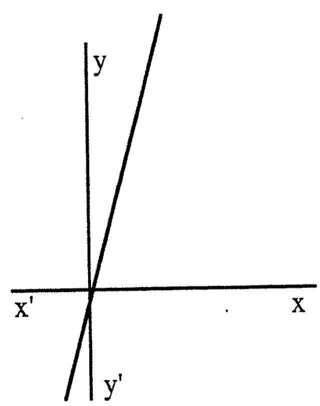
Η ιδιαιτερότητα αυτή στην εκμάθηση των μαθηματικών απαιτεί τη χρήση κι άλλων συστημάτων έκφρασης και αναπαράστασης, εκτός από τη φυσική γλώσσα ή τις εικόνες. Πράγματι, παρατηρούμε ότι υπάρχουν πολλά συστήματα σημειωτικής αναπαράστασης: ποικίλα συστήματα γραφής των αριθμών, συμβολικές επισημειώσεις για τα αντικείμενα, γραφές αλγεβρικές και λογικές, γεωμετρικά σχήματα, αναπαραστάσεις σε προοπτική, καρτεσιανά γραφήματα, δίκτυα, διαγράμματα κ.α.

Πιο συγκεκριμένα, όταν αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση μπορούμε να την εκφράσουμε με διάφορους τρόπους αναπαράστασης:

α) Στο σύστημα αναπαράστασης της συμβολικής γραφής

$$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \varphi(\chi) = 3\chi$$

β) Στο γραφικό σύστημα αναπαράστασης



γ) Στο σύστημα αναπαράστασης του πίνακα

χ	...	−1,3	−1	0	2	8/3	...
φ(χ)	...	−3,9	−3	0	6	8	...

δ) Στο σύστημα αναπαράστασης της φυσικής γλώσσας

«Σε κάθε πραγματικό αριθμό αντιστοιχούμε το τριπλάσιό του.»

Στα Μαθηματικά οι σημειωτικές αναπαραστάσεις δεν είναι μόνο απαραίτητες ως μέσο επικοινωνίας και κατανόησης, αλλά είναι αναγκαίες στην ανάπτυξη της ίδιας της μαθηματικής δραστηριότητας. Πράγματι, η δυνατότητα πραγματοποίησης επεξεργασιών εξαρτάται άμεσα από το σύστημα της σημειωτικής αναπαράστασης που χρησιμοποιείται. Στην επίλυση μιας άσκησης που αφορά τις συναρτήσεις μπορεί η απάντηση να είναι πιο άμεση και προφανής όταν δουλέψουμε π.χ. στο γραφικό σύστημα αναπαράστασης από ότι στο συμβολικό σύστημα αναπαράστασης. Όταν όμως πρόκειται για μια άσκηση όπου ζητείται να γίνουν πράξεις μεταξύ συναρτήσεων, τότε το σύστημα αναπαράστασης της συμβολικής γραφής είναι πολύ πιο λειτουργικό από οποιοδήποτε άλλο σύστημα αναπαράστασης. Η ποικιλία λοιπόν των συστημάτων σημειωτικής αναπαράστασης μας δίνει τη δυνατότητα επιλογής του πιο λειτουργικού συστήματος, ανάλογα με την περίπτωση των δεδομένων ενός προβλήματος.

Πρέπει να σημειώσουμε, από έρευνες που έχουν γίνει, ότι ο συντονισμός ανάμεσα σε αναπαραστάσεις που προέρχονται από διαφορετικά συστήματα σημειωτικής αναπαράστασης δεν έχει τίποτα το αυθόρμητο και προφανές και δεν προέρχεται αυτόματα από τις κλασσικές εκμαθήσεις που επικεντρώνονται στο περιεχόμενο της διδασκαλίας. Μια εργασία επικεντρωμένη στην ποικιλία των συστημάτων αναπαράστασης, στη χρήση των δυνατοτήτων τους, στη σύγκρισή τους βάζοντάς τα σε αντιστοιχία, και στις αμοιβαίες «μεταφράσεις» τους φαίνεται αναγκαίο για να την ευνοήσει. Όταν ένας τέτοιος τύπος εργασίας προτείνεται, διαπιστώνουμε μία καθολική αλλαγή μέσα στις πρωτοβουλίες και στις μεθόδους συλλογισμού των μαθητών για να πραγματοποιήσουν μαθηματικές επεξεργασίες, για να τις ελέγξουν, για την ταχύτητα εκτέλεσης, καθώς και για το ενδιαφέρον που αποκτά η εργασία. Δεν υπάρχει μόνο επιτυχία, αλλά και αλλαγή της ποιότητας της παραγωγής. Αυτή η ποιοτική διαφορά στην ανάπτυξη των εφοδίων φαίνεται συνδεδεμένο με το συντονισμό των σημειωτικών συστημάτων στους μαθητές.

2. Η διαφοροποίηση ανάμεσα στο αντικείμενο και μία αναπαράστασή του

Ένα μαθηματικό αντικείμενο μπορεί να παρουσιαστεί, όπως αναφέρθηκε, με τη βοήθεια αναπαραστάσεων πολύ διαφορετικών. Είναι όμως ουσιαστικό « ... να μη συγχέονται τα μαθηματικά αντικείμενα, δηλαδή οι αριθμοί, οι συναρτήσεις, οι ευθείες κ.τ.λ., με τις αναπαραστάσεις τους, δηλαδή τις δεκαδικές μορφές ή τις κλασματικές, τα σύμβολα, τα γραφήματα, ... Κάθε σύγχυση ανάμεσα στο αντικείμενο και στην αναπαράστασή του οδηγεί σε μια έλλειψη κατανόησης.» (R. Duval, 1995). Το φαινόμενο όμως αυτό, η σύγχυση δηλαδή αντικειμένου και αναπαραστάτη δεν είναι καθόλου σπάνιο, και μάλιστα εμφανίζεται σε πολλά επίπεδα εκμάθησης και σε πολλά αντικείμενα. Από έρευνες που κάναμε στο Πανεπιστήμιο του Στρασβούργου, διαπιστώσαμε ότι ένα μεγάλο ποσοστό των πρωτοετών φοιτητών συγχέουν την έννοια του διανύσματος με το βελάκι που σχεδιάζουμε στο χαρτί, δηλαδή στο επίπεδο. Είναι προφανές ότι δεν μπορεί να υπάρξει ολοκληρωμένη κατανόηση της έννοιας του διανύσματος, αλλά ούτε των παράγωγων εννοιών του, όταν δεν υπάρχει διάκριση του αντικειμένου από τον αναπαραστάτη του. Ομοίως, έχει παρατηρηθεί από έρευνες σε φοιτητές του Πανεπιστημίου της Αθήνας ότι συχνά η έννοια της συνάρτησης ταυτίζεται με την έννοια της εξίσωσης, ενώ μαθητές του γυμνασίου συχνά την ταυτίζουν με την ευθεία.

Η χρήση διαφορετικών αναπαραστάσεων ενός ορισμένου αντικειμένου μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές ή τους φοιτητές να καταλάβουν και να συγκεκριμενοποιήσουν μια έννοια που ορίστηκε αφηρημένα. Κι αυτό, είτε διότι έχουν τη συνήθεια να δουλεύουν περισσότερο με ένα τύπο αναπαράστασης από ότι με έναν άλλον, είτε διότι μια αναπαράσταση είναι πιο «ομιλητική» από μία άλλη. Πολύ συχνά συναντάμε στην εκπαιδευτική διαδικασία να παρέχεται στους μαθητές ένας μόνο τύπος αναπαράστασης ή όταν χρησιμοποιείται κι άλλος να χρησιμοποιείται ως παράδειγμα ή εφαρμογή της έννοιας που διδάσκεται. Αν δε γίνει όμως μια συστηματική δουλειά πάνω στους διαφορετικούς τύπους αναπαραστάσεων ενός μαθηματικού αντικειμένου, μπορεί να δημιουργηθούν ουσιαστικά εμπόδια στη μάθηση, όπως στη σύγχυση του μαθηματικού αντικειμένου με έναν αναπαραστάτη του. Η προσκόλληση σε μια αναφορά συγκεκριμένη, όπως διάνυσμα και βέλος, *εμποδίζει τους φοιτητές να συλλογιστούν στο αφηρημένο*. Σύμφωνα με τον R. Duval «για να μη συγχέεται ένα αντικείμενο με την αναπαράστασή του είναι αναγκαίο να διαθέτουμε πολλές αναπαραστάσεις σημειωτικά ετερογενείς αυτού του αντικειμένου και να τις συντονίζουμε.» (R. Duval, 1995). Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε πιο συγκεκριμένα τι συμβαίνει με την έννοια του διανύσματος.

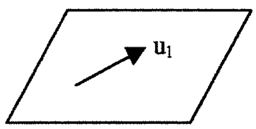
3. Τα συστήματα σημειωτικής αναπαράστασης και οι δυνατότητές τους - Η περίπτωση του διανύσματος.

Στη γραμμική άλγεβρα για να αναπαραστήσουμε ένα διάνυσμα ή μία κατάσταση διανυσμάτων μέσα σε ένα διανυσματικό χώρο, ανατρέχουμε συχνά σε τρία συστήματα σημειωτικής αναπαράστασης:

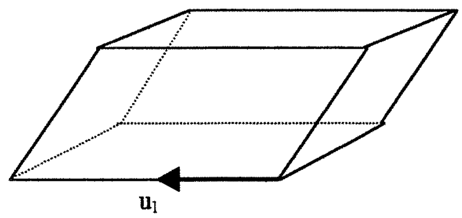
α) Το γραφικό σύστημα αναπαράστασης

όπου ένα διάνυσμα αναπαρίσταται με ένα *βέλος* σχεδιασμένο στο επίπεδο των δύο διαστάσεων ή στο χώρο των τριών διαστάσεων:

Διάνυσμα στο επίπεδο



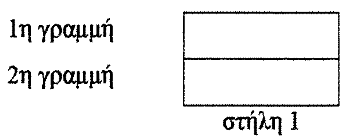
Διάνυσμα στο χώρο



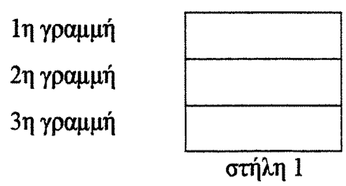
β) Το σύστημα αναπαράστασης του πίνακα

όπου ένα διάνυσμα αναπαρίσταται με μια *κολώνα*, που έχει δύο ή τρεις γραμμές, όταν πρόκειται για διάνυσμα του επιπέδου ή του χώρου αντίστοιχα:

Διάνυσμα στο επίπεδο



Διάνυσμα στο χώρο



γ) Το σύστημα αναπαράστασης της συμβολικής γραφής ή συμβολικό σύστημα αναπαράστασης

όπου χρησιμοποιούμε ένα *γράμμα* για να αναπαραστήσουμε ένα διάνυσμα είτε στο επίπεδο είτε στο χώρο, όπως φαίνεται παρακάτω:

Διάνυσμα στο επίπεδο	Διάνυσμα στο χώρο
$u \in R^2$	$u \in R^3$

Στον επόμενο πίνακα παρουσιάζουμε τις αναπαραστάσεις στα διάφορα συστήματα σημειωτικής αναπαράστασης του αντικειμένου του διανύσματος και άλλων βασικών εννοιών της γραμμικής άλγεβρας. Στην τελευταία στήλη σημειώνουμε τη συνήθη μαθηματική ορολογία του αντικειμένου που αναπαρίσταται.

Αναπαραστάσεις			Μαθηματικό αντικείμενο που μπορεί να αναπαρασταθεί
Στο γραφικό επίπεδο	Στο επίπεδο των πινάκων	Στο επίπεδο της συμβολικής γραφής	
βέλος, πιθανά συνοδευόμενο από μία ένδειξη (του συμβολικού επιπέδου συνήθως)	– κολώνα με δύο γραμμές – κολώνα με τρεις γραμμές – κολόνα με ν γραμμές	γράμμα (ή γράμματα), που σημειώνουν ένα αντικείμενο, συνήθως συνοδευόμενο(α) από ένα βελάκι	διανύσματα ή στοιχείο ενός διανυσματικού χώρου
οικογένεια βελών αναφοράς(1)	σύνολο κολώνων αναφοράς, καθεμία αποτελούμενη από ένα μοναδικό 1 και 0 στις υπόλοιπες γραμμές(2)	οικογένεια αντικειμένων αναφοράς	βάση
βέλος ίδιας διεύθυνσης με ένα βέλος αναφοράς	κολώνα η οποία έχει το πολύ ένα μη μηδενικό στοιχείο: στη θέση που αντιστοιχεί στη γραμμή όπου η κολώνα αναφοράς έχει την τιμή 1	αντικείμενο που μπορεί να γραφεί σαν πολλαπλάσιο του αντικειμένου αναφοράς	διάνυσμα συγγραμμικό σε ένα διάνυσμα της βάσης

Αναπαραστάσεις μαθηματικών αντικειμένων σε διαφορετικά επίπεδα.

(1) Ονομάζουμε βέλη αναφοράς μιας οικογένειας βελών μία υπο–οικογένεια, η οποία επιτρέπει την περιγραφή, με ένα μοναδικό τρόπο, όλων των βελών της δοσμένης οικογένειας.

(2) Αυτή η αναπαράσταση δίνει στην επιλεγμένη βάση το χαρακτήρα της κανονικής βάσης. Κρατάμε αυτόν τον τύπο, όχι για να αποκλείσουμε άλλες βάσεις, αλλά γιατί μία κλιμάκωση ανά γραμμές (ή ανά κολώνες) μάς επιτρέπει να μετατρέψουμε ένα πίνακα σε μορφή κλιμακωτή.

Είναι βέβαιο ότι η διδασκαλία της γραμμικής άλγεβρας δεν μπορεί να περιοριστεί στη χρήση ενός μόνο συστήματος σημειωτικής αναπαράστασης, διότι ένα μόνο απομονωμένο σύστημα δεν μπορεί να μας οδηγήσει στο μαθηματικό αντικείμενο. Σύμφωνα με τον R. Duval, « ...η φύση του σημειωτικού συστήματος αναπαράστασης επιβάλει μια επιλογή από τα εννοιολογικά στοιχεία ή πληροφοριακά στοιχεία του περιεχομένου που αναπαρίσταται. Αυτό σημαίνει ότι κάθε αναπαράσταση είναι γνωστικά μερική σε σχέση με αυτό που αναπαριστά, καθώς και οι αναπαραστάσεις των διαφορετικών συστημάτων δεν παρουσιάζουν τις ίδιες όψεις ενός ίδιου θεωρητικού περιεχομένου.» (R. Duval, 1995).

Οι ιδιομορφίες του κάθε συστήματος αναπαράστασης περιορίζουν τις δυνατότητες περιγραφής μιας μαθηματικής έννοιας σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις. Στην περίπτωση του διανύσματος παρατηρούμε ότι στο γραφικό σύστημα αναπαράστασης δεν μπορούμε να έχουμε εύκολα ακριβείς αναπαραστάσεις παρά μόνο ενός διανύσματος του επιπέδου ή του χώρου των τριών διαστάσεων. Επιπλέον ένας άλλος σημαντικός περιορισμός είναι ότι το μηδενικό διάνυσμα δεν μπορεί να αναπαρασταθεί στο γραφικό σύστημα αναπαράστασης.

Στο σύστημα των πινάκων έχουμε τη δυνατότητα να αναπαραστήσουμε το μηδενικό διάνυσμα χρησιμοποιώντας έναν πίνακα με μία μόνο στήλη γεμάτη με μηδέν. Σε αυτό όμως το σύστημα αναπαράστασης έχουμε έναν άλλο περιορισμό. Μπορούμε να περιγράψουμε καταστάσεις διανυσμάτων που ανήκουν σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης και όχι απείρου διάστασης.

Τέλος, στο συμβολικό σύστημα αναπαράστασης δεν έχουμε κάποιον περιορισμό και μπορούμε να περιγράψουμε ακόμα και καταστάσεις διανυσμάτων που ανήκουν σε ένα χώρο απείρου διάστασης.

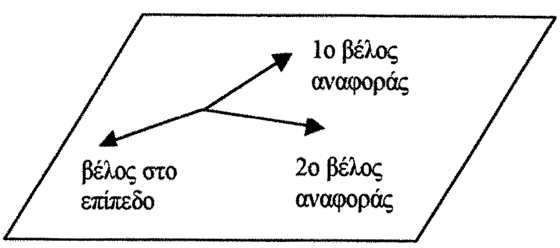
Οι παραπάνω διαπιστώσεις μας οδηγούν στη σκέψη ότι το σύστημα της συμβολικής γραφής είναι το πιο ισχυρό αφού επιτρέπει την αναπαράσταση μεγαλύτερης ποικιλίας καταστάσεων. Γιατί λοιπόν να μην κάνουμε μια διδασκαλία της γραμμικής άλγεβρας βασισμένοι μόνο στη συμβολική γραφή; Η απάντηση κρύβεται στο *κόστος των επεξεργασιών* το οποίο είναι ιδιαίτερο σε κάθε σύστημα αναπαράστασης. Ένα σύστημα μπορεί να έχει πράγματι πιο πολλές δυνατότητες αναπαράστασης σε σχέση με τα υπόλοιπα, αλλά υπάρχουν περιπτώσεις όπου η χρήση μιας επεξεργασίας μέσα σε ένα άλλο σύστημα να αποβεί πιο λειτουργική και οικονομική και να μας οδηγήσει στο ίδιο αποτέλεσμα πιο σύντομα. Για παράδειγμα, για να αποδείξουμε ότι δεν ισχύει μία πρόταση που αφορά τα διανύσματα, είναι συνήθως πιο σύντομο να δώσουμε ένα αντιπαράδειγμα στο γραφικό σύστημα ή στο σύστημα των πινάκων, παρά να αναπτύξουμε μια μακροσκελή απόδειξη στο σύστημα της συμβολικής γραφής. Είναι επομένως *ουσιαστικό να μπορέσουμε να κινητοποιήσουμε πολλά συστήματα σημειωτικής αναπαράστασης*. « … Η αναδρομή σε πολλά συστήματα φαίνεται να είναι μια αναγκαία συνθήκη για να μη συγχέονται τα μαθηματικά αντικείμενα με τις αναπαραστάσεις τους και για να αναγνωρίζονται μέσα σε καθεμία από τις αναπαραστάσεις τους. Αυτό υποδεικνύει ότι ο συντονισμός πολλών συστημάτων σημειωτικής αναπαράστασης είναι θεμελιώδης για την αντιληπτική κατανόηση των αντικειμένων.» (R. Duval, 1995).

4. Αλλαγή συστήματος αναπαράστασης

Μια διδασκαλία της γραμμικής άλγεβρας θα πρέπει να προσανατολιστεί στο συντονισμό των τριών συστημάτων αναπαράστασης που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αντικειμένου που μπορούμε να αποκτήσουμε στα διαφορετικά συστήματα, δεν πρέπει να χρησιμοποιούνται μόνο σαν χώρος εφαρμογής του ορισμένου αντικειμένου .Πρέπει να αποτελούν επίσης μια προσέγγιση προς τη θεωρητικοποίηση του μαθηματικού αντικειμένου. Και στη θεωρητικοποίηση, το πέρασμα από ανάμεσα στα διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης παίζει έναν ουσιαστικό ρόλο.

Όταν μιλάμε για πέρασμα από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο πρόκειται για τη μετατροπή μιας δοσμένης αναπαράστασης σε ένα συγκεκριμένο σύστημα, σε μια αναπαράσταση σε ένα άλλο σύστημα η οποία περιγράφει ακριβώς την ίδια κατάσταση. Στο επόμενο σχήμα δίνεται η αναπαράσταση μιας οικογένειας διανυσμάτων στο γραφικό σύστημα. Το πέρασμα προς το σύστημα των πινάκων σημαίνει ότι θα περιγράψουμε την ίδια ακριβώς κατάσταση με το δεδομένο σχήμα στη μορφή ενός πίνακα, χωρίς καμία απώλεια πληροφορίας, χρησιμοποιώντας τους κανόνες μετατροπής (βέλη στο επίπεδο → δύο γραμμές, τρία βέλη → τρεις στήλες, κ.τ.λ., βλ. K. Pavlopoulou, 1993).

Γραφικό σύστημα



Σύστημα πινάκων

	1η στ. αναφ.	2η στ. αναφ.	άλλη στήλη
1η γραμμή	1	0	κ
2η γραμμή	0	1	μ

Ομοίως όταν πρόκειται για ένα πέρασμα από το σύστημα των πινάκων στο σύστημα της συμβολικής γραφής, περιγράφουμε με στοιχεία συμβολικής γραφής την κατάσταση που είναι δοσμένη σε μορφή πίνακα, όπως στο παρακάτω παράδειγμα.

Σύστημα πινάκων

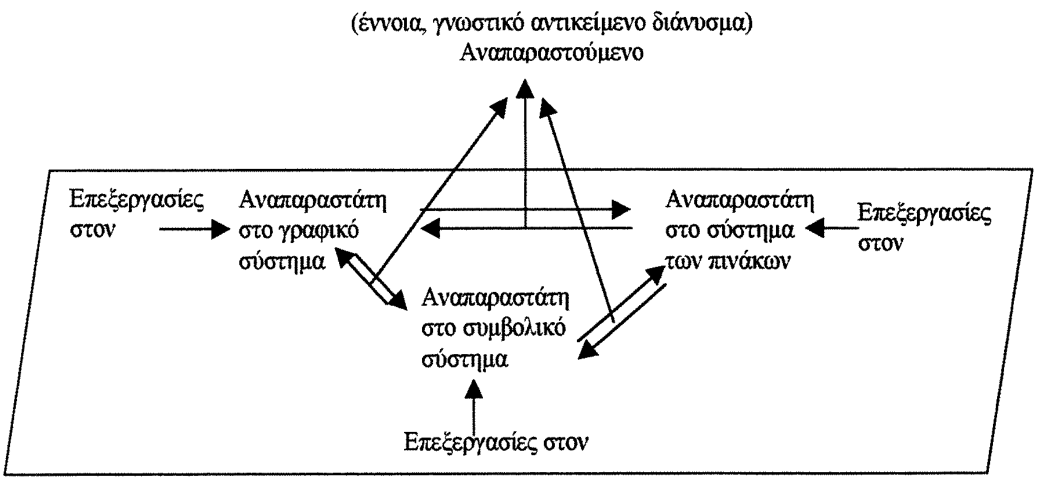
1	0	0	k
0	1	0	0
0	0	1	m

Σύστημα συμβολικής γραφής

$$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$$

$$u_1 = \mathbf{1}u_1 + \mathbf{0}u_2 + \mathbf{0}u_3$$
$$u_2 = \mathbf{0}u_1 + \mathbf{1}u_2 + \mathbf{0}u_3$$
$$u_3 = \mathbf{0}u_1 + \mathbf{0}u_2 + \mathbf{1}u_3$$
$$u_4 = \mathbf{k}u_1 + \mathbf{0}u_2 + \mathbf{m}u_3$$

Μέσα στη διδασκαλία της γραμμικής άλγεβρας, η προσέγγιση που προτείνουμε για να φτάσουμε στη θεωρητικοποίηση του αντικειμένου διάνυσμα, αναπαρίσταται με το παρακάτω σχήμα το οποίο έχει κατασκευαστεί σύμφωνα με το γνωστικό μοντέλο αναπαράστασης που προτείνει ο R. Duval.



Τοποθετήσαμε σε ένα ίδιο επίπεδο τους αναπαραστάτες του αντικειμένου διάνυσμα μέσα στα τρία συστήματα αναπαράστασης που εμπλέκονται στη γραμμική άλγεβρα, για να φανούν καλύτερα οι σχέσεις αναστρεψιμότητας ανάμεσα στους αναπαραστάτες.

Τα βέλη που φτάνουν σε κάθε αναπαραστάτη αντιστοιχούν στους εσωτερικούς μετασχηματισμούς της αναπαράστασης μέσα σε ένα σύστημα αναπαράστασης. Πρόκειται για τις *επεξεργασίες κάθε επιπέδου*, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να μετασχηματίσουμε μία αναπαράσταση σε μία άλλη του ίδιου συστήματος αναπαράστασης. Π. χ. α) στο σύστημα της συμβολικής γραφής μπορούμε να μετασχηματίσουμε μία έκφραση με διανύσματα σε μία άλλη, χρησιμοποιώντας κανόνες πράξεων των διανυσμάτων ή αντικαθιστώντας ένα διάνυσμα με μια ισοδύναμη έκφραση, β) στο σύστημα αναπαράστασης των πινάκων ένας πίνακας μπορεί να μετασχηματιστεί σε έναν άλλον χρησιμοποιώντας τους κανόνες κλιμάκωσης ενός πίνακα. Είναι προφανές ότι κάνοντας έναν τέτοιο μετασχηματισμό *δεν αλλάζουμε σύστημα αναπαράστασης*.

Τα βέλη ανάμεσα στους αναπαραστάτες δύο διαφορετικών επιπέδων αντιστοιχούν σε μετατροπή από αλλαγή συστημάτων αναπαράστασης. «Η μετατροπή είναι ο μετασχηματισμός της αναπαράστασης ενός αντικειμένου, μιας κατάστασης ή μιας δοσμένης πληροφορίας σε ένα σύστημα, σε μία άλλη αναπαράσταση αυτού του ίδιου αντικειμένου, αυτής της ίδιας πληροφορίας σε ένα άλλο σύστημα αναπαράστασης. ... Η μετατροπή είναι λοιπόν ένας εξωτερικός μετασχηματισμός ως προς το σύστημα από το οποίο ξεκινάμε.» (R. Duval, 1995).

Και για να πραγματοποιηθεί η μετατροπή πρέπει να «επεξεργαστούμε συστηματικά όλες τις δυνατές μεταβολές μιας αναπαράστασης σε ένα σύστημα και να προβλέψουμε ή να παρατηρήσουμε τις αντίστοιχες μεταβολές των αναπαραστάσεων σε ένα άλλο σύστημα αναπαράστασης.» (R. Duval, 1995). Πιο συγκεκριμένα, μεταβάλλουμε κάθε φορά ένα μόνο στοιχείο της αναπαράστασης, κρατώντας σταθερά όλα τα υπόλοιπα, και παρατηρούμε τη μεταβολή που προκαλεί στην αντίστοιχη αναπαράσταση στο άλλο σύστημα. Αυτή είναι και η βασική αρχή στην οποία στηρίξαμε τη διδασκαλία μας (για περισσότερες λεπτομέρειες πάνω στη διδασκαλία βλ. Β. Δαγδιλέλης, Κ. Παυλοπούλου, Π. Τρίγγα 1998 και K. Pavlopoulou, 1994).

Οι κανόνες μετατροπής από το ένα σύστημα στο άλλο μπορεί να φαίνονται απλοί, αλλά το πέρασμα από τη μία αναπαράσταση στην άλλη αποδεικνύεται πολύ γρήγορα μια πολύπλοκη διαδικασία. Ένας παράγοντας πολύ σημαντικός στη διαδικασία μετατροπής είναι η *φορά της μετατροπής*. Το πέρασμα από ένα σύστημα σε ένα άλλο και το αντίστροφο πέρασμα δεν είναι δύο ισοδύναμες διαδικασίες, διότι οι κανόνες μετατροπής δεν είναι οι ίδιοι. Η ικανότητα πραγματοποίησης μιας μετατροπής κατά τη μία φορά δεν εξασφαλίζει την επιτυχία κατά την αντίστροφη μετατροπή. Στο μάθημα της γραμμικής Άλγεβρας των πρωτοετών φοιτητών του Πανεπιστημίου παρατηρήθηκε διαφορά επιτυχίας ανάμεσα σε δύο περάσματα αντίστροφης φοράς, η οποία γίνεται θεαματική όταν παρεμβαίνει το σύστημα της συμβολικής γραφής. Από αυτό προκύπτει και πάλι η αναγκαιότητα να πραγματοποιούνται όλα τα περάσματα σε όλες τις διαφορετικές κατευθύνσεις, κατά τη διάρκεια μιας διδασκαλίας. Αυτό είναι σημειωμένο στο παραπάνω σχήμα με δύο βέλη αντίθετης φοράς ανάμεσα σε δύο αναπαραστάτες διαφορετικών συστημάτων.

Η μεγάλη σημασία της μετατροπής αναπαραστάσεων είναι ότι είναι αναγκαία για να οδηγηθούμε στο περιεχόμενο που αναπαριστάται. Η έννοια είναι ανεξάρτητη από τα συστήματα αναπαράστασης και η διεργασία της μετατροπής βοηθάει στη διάκριση αναπαραστάτη και ανααπαραστούμενου. Μια διδασκαλία λοιπόν της γραμμικής άλγεβρας βασισμένη στην ποικιλία συστημάτων σημειωτικής αναπαράστασης, δίνοντας προτεραιότητα στη διεργασία της μετατροπής αναπαραστάσεων από το ένα σύστημα στο άλλο, προσφέρει στους φοιτητές τα επόμενα εφόδια:

α) τη *διάκριση ανάμεσα σε αναπαραστάτη και αναπαραστούμενου*, το οποίο επιτρέπει να μη συγχέουν ένα ορισμένο αντικείμενο με τους αναπαραστάτες του,

β) τη *δυνατότητα να επιλέγουν* εκείνο το επίπεδο αναπαράστασης που τους φαίνεται πιο οικονομικό ως προς την επεξεργασία και τις δυνατότητες αναπαράστασης,

γ) ένα *μέσο ελέγχου*, γιατί μπορούν να επαληθεύσουν την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων που έλαβαν από την επεξεργασία μέσα σε ένα σύστημα αναπαράστασης, συγκρίνοντας με εκείνα που λαμβάνουν με την επεξεργασία σε ένα άλλο σύστημα αναπαράστασης.

5. Οι δυσκολίες της μετατροπής αναπαραστάσεων

Συνήθως οι διδάσκοντες θεωρούν ότι το πέρασμα από τη μία αναπαράσταση στην άλλη είναι προφανές στους διδασκόμενους. Επίσης, θεωρούν ότι αν κάποιος μπορεί να πραγματοποιήσει μια αναπαράσταση σε ένα σύστημα, θα μπορεί χωρίς πρόβλημα να πραγματοποιήσει και οποιοδήποτε άλλο πέρασμα προς οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Πραγματοποιήσαμε μια έρευνα στο Πανεπιστήμιο Louis Pasteur του Στρασβούργου, μοιράζοντας ερωτηματολόγια, στους πρωτοετείς φοιτητές, που αφορούσαν την έννοια του διανύσματος. Η έρευνα αυτή έφερε στο φως ένα μεγάλο σύνολο δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι φοιτητές του πρώτου έτους. Τα ποσοστά επιτυχίας κυμαίνονται από 6% ως 80%, γεγονός που φανερώνει ότι το πέρασμα από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο δεν είναι προφανές.

Στο σχετικό ερωτηματολόγιο της έρευνας δώσαμε μια αναπαράσταση μιας οικογένειας διανυσμάτων σε ένα σύστημα αναπαράστασης, το οποίο ονομάζουμε σύστημα αφετηρίας και ζητάμε από τους φοιτητές να κατασκευάσουν οι ίδιοι την αντίστοιχη αναπαράσταση σε ένα άλλο σύστημα, το οποίο ονομάζουμε σύστημα άφιξης.

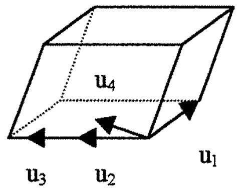
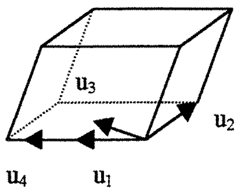
Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια τα αποτελέσματα σε τρεις κατηγορίες για να γίνει φανερό το μεγάλο φάσμα δυσκολιών που συναντούν οι φοιτητές στο πέρασμα από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο.

α) Η φορά του περάσματος

Οι δυσκολίες που συναντούν οι φοιτητές στο πέρασμα από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο δεν εξαρτώνται μόνο από τα συστήματα που βάζουμε σε αντιστοιχία, αλλά και από τη φορά του περάσματος. Η ικανότητα δηλαδή του περάσματος από ένα συγκεκριμένο σύστημα αναπαράστασης σε ένα άλλο, δε συνεπάγεται την ικανότητα του αντίστροφου περάσματος. Κι αυτό μπορεί να γίνει φανερό στους επόμενους πίνακες, όπου δίνουμε αναλυτικά τα αποτελέσματα που αφορούν 144 φοιτητές του πρώτου έτους.

i) Συμβολικό σύστημα αναπαράστασης – Γραφικό σύστημα αναπαράστασης

Δώσαμε μια κατάσταση διανυσμάτων στο συμβολικό σύστημα αναπαράστασης και ζητήσαμε την αναπαράσταση της ίδιας κατάστασης στο γραφικό σύστημα. Το 40% του πληθυσμού απάντησε επιτυχώς. Το αντίστροφο όμως πέρασμα από το γραφικό προς το συμβολικό είχε μόνο 5% επιτυχία, γεγονός που φανερώνει μια αδυναμία σε σχέση με το πέρασμα προς το συμβολικό σύστημα αναπαράστασης.

<table>
<tr><th>Σύστημα αφετηρίας</th><th>Σύστημα άφιξης</th><th>Ποσοστά επιτυχίας</th></tr>
<tr><td>$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$
$u_1 = 1u_1 + 0u_2$
$u_2 = 0u_1 + 1u_2$
$u_3 = 0u_1 + ku_2, k \in R$
$u_4 = au_1 + bu_2, a \in R, b \in R$</td><td></td><td>39,58%</td></tr>
<tr><td></td><td>$u_1 \in R^3, u_2 \in R^3, u_3 \in R^3, u_4 \in R^3$
$u_1 = 1u_1 + 0u_2$
$u_2 = 0u_1 + 1u_2$
$u_3 = ku_1 + mu_2, k \in R, m \in R$
$u_4 = nu_1 + 0u_2, n \in R$</td><td>4,86%</td></tr>
</table>

Πίνακας 1

ii) Συμβολικό σύστημα αναπαράστασης – Σύστημα πινάκων

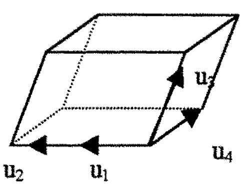
Την ίδια δυσκολία στο πέρασμα προς το συμβολικό σύστημα αναπαράστασης συναντάμε επίσης και όταν έχουμε ως σύστημα αφετηρίας το σύστημα των πινάκων.

<table>
<tr><th>Σύστημα αφετηρίας</th><th>Σύστημα άφιξης</th><th>Ποσοστά επιτυχίας</th></tr>
<tr><td>$u_1 \in R^2, u_2 \in R^2, u_3 \in R^2, u_4 \in R^2$
$u_1 = 1u_1 + 0u_3$
$u_2 = ku_1 + 0u_3, k \in R$
$u_3 = 0u_1 + 1u_3$
$u_4 = au_1 + bu_3, a \in R, b \in R$</td><td><table><tr><td>1</td><td>k</td><td>0</td><td>a</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>b</td></tr></table></td><td>72,22%</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>1</td><td>0</td><td>k</td><td>p</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>m</td><td>0</td></tr></table></td><td>$u_1 \in R^2, u_2 \in R^2, u_3 \in R^2, u_4 \in R^2$
$u_1 = 1u_1 + 0u_2$
$u_2 = 0u_1 + 1u_2$
$u_3 = ku_1 + mu_2$
$u_4 = pu_1 + 0u_2$</td><td>6,95%</td></tr>
</table>

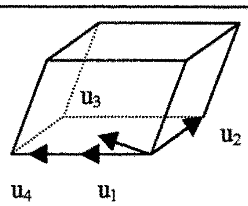
Πίνακας 2

β) Ίδιο σύστημα αφετηρίας και ίδιο σύστημα άφιξης

Ας πάρουμε δύο αναπαραστάσεις διανυσμάτων στο χώρο στο γραφικό σύστημα αναπαράστασης, όπως παρουσιάζονται στην πρώτη κολώνα του επόμενου πίνακα. Και στις δύο περιπτώσεις ζητήσαμε από τους φοιτητές να πραγματοποιήσουν το πέρασμα στο σύστημα των πινάκων. Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι αφού βάζουμε σε αντιστοιχία τα ίδια συστήματα αναπαράστασης, δε θα υπάρχει καμία διαφορά στα ποσοστά επιτυχίας ανάμεσα στις δύο δοσμένες καταστάσεις διανυσμάτων. Όμως, μέσα στο ίδιο πέρασμα υπάρχουν καταστάσεις που παρουσιάζουν μεγαλύτερη πολυπλοκότητα σε σχέση με άλλες, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε και στον ακόλουθο πίνακα.

<table>
<tr><th>Γραφικό σύστημα</th><th>Σύστημα πινάκων</th><th>Ποσοστά επιτυχίας (Γ→Π)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline\end{array}$$

</td><td>64%</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & m & k \\ \hline 0 & 1 & n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline\end{array}$$

</td><td>10%</td></tr>
</table>

Πίνακας 3

Στο πρώτο πέρασμα παραπάνω από τους μισούς φοιτητές απάντησαν σωστά, ενώ αντίθετα στο δεύτερο πέρασμα μόνο το ένα δέκατο του πληθυσμού κατάφερε να δώσει τη σωστή απάντηση. Η διαφορά των δύο καταστάσεων που περιγράφουμε στο γραφικό σύστημα, είναι ότι στη μία δίνουμε και τα τρία διανύσματα βάσης στο χώρο, ενώ στη δεύτερη μόνο τα δύο από τα τρία διανύσματα βάσης, με αποτέλεσμα να λάβουμε πολλές απαντήσεις όπου η τρίτη γραμμή του πίνακα δεν εμφανίζεται:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & m & k \\ \hline 0 & 1 & n & 0 \\ \hline\end{array}$$

Κι αυτές οι απαντήσεις βασίζονται στα ακόλουθα επιχειρήματα των φοιτητών:

αφού τα τέσσερα διανύσματα είναι συνεπίπεδα τα θεωρούν διανύσματα του επιπέδου, ακόμα κι αν τα διανύσματα είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου των τριών διαστάσεων.

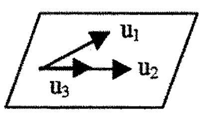
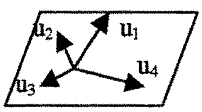
Αφού δεν έχει δοθεί το τρίτο διάνυσμα βάσης, σημαίνει ότι η τρίτη διάσταση του χώρου δεν ορίζεται, άρα η τρίτη γραμμή δε χρειάζεται.

Με λίγα λόγια υπάρχει σύγχυση μεταξύ των δύο επόμενων πινάκων:

1	0	m	k
0	1	n	0
0	0	0	0

1	0	m	k
0	1	n	0

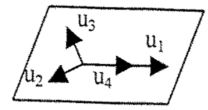
Η μεγάλη διαφορά στα ποσοστά επιτυχίας δεν αφορά μόνο αναπαραστάσεις διανυσμάτων στο χώρο, οι οποίες πιθανόν να θεωρούνται πιο πολύπλοκες, αλλά ακόμα και αναπαραστάσεις διανυσμάτων στο επίπεδο:

<table>
<tr><th>Γραφικό σύστημα</th><th>Σύστημα πινάκων</th><th>Ποσοστά επιτυχίας (Γ→Π)</th></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>k</td></tr></table></td><td>54%</td></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>1</td><td>0</td><td>a</td><td>c</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>b</td><td>d</td></tr></table></td><td>25%</td></tr>
</table>

Πίνακας 4

γ) Ίδιο σύστημα αφετηρίας και διαφορετικό σύστημα άφιξης

Στον επόμενο πίνακα βλέπουμε για ακόμα μια φορά την αδυναμία των φοιτητών στο πέρασμα προς τη συμβολική γραφή.

Σύστημα πινάκων	Σύστημα άφιξης	Ποσοστά Επιτυχίας
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline 1 & 0 & k & p \\ \hline 0 & 1 & m & 0 \\ \hline \end{array}$		82,64%
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|} \hline 1 & 0 & k & p \\ \hline 0 & 1 & m & 0 \\ \hline \end{array}$	$u_1 \in R^2, u_2 \in R^2, u_3 \in R^2, u_4 \in R^2$ $u_1 = 1u_1 + 0u_2$ $u_2 = 0u_1 + 1u_2$ $u_3 = ku_1 + mu_2$ $u_4 = pu_1 + 0u_2$	6,95%

Πίνακας 5

Τα αποτελέσματα που παρουσιάσαμε προηγουμένως δηλώνουν ότι πρέπει να λάβουμε υπόψη μας τους ακόλουθους δύο σημαντικούς παράγοντες σε σχέση με το πέρασμα από το ένα σύστημα αναπαράστασης στο άλλο:

1) *Δεν μπορούμε να απονείμουμε τον ίδιο βαθμό δυσκολίας σε δύο περάσματα, τα οποία έχουν το ίδιο σύστημα αφετηρίας.* Πιο συγκεκριμένα, όταν το πέρασμα γίνεται προς το σύστημα της συμβολικής γραφής, τα ποσοστά επιτυχίας αυτόματα ελαττώνονται και πέφτουν σε πολύ χαμηλά επίπεδα.

2) Οι κανόνες του περάσματος από μια αναπαράσταση στην άλλη δεν είναι οι ίδιοι σε σχέση με τη φορά του περάσματος.

Λαμβάνοντας υπόψη τους δυο παραπάνω παράγοντες, μπορούμε να αντιληφθούμε ότι για να επιτευχθούν καλά αποτελέσματα στη διαδικασία της αλλαγής συστήματος αναπαράστασης, χρειάζεται μια συστηματική δουλειά και όχι μια απλή παρουσίαση μερικών μόνο παραδειγμάτων. Μια διδασκαλία λοιπόν βασισμένη στα διάφορα συστήματα σημειωτικής αναπαράστασης πρέπει να οργανωθεί κατάλληλα, λαμβάνοντας υπόψη της τα στοιχεία που απορρέουν από τις παραπάνω έρευνες.

2. ΕΝΑΣ ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ ΙΔΙΑΙΤΕΡΑ ΣΗΜΑΝΤΙΚΟΣ: ΦΥΣΙΚΗ ΓΛΩΣΣΑ ΚΑΙ ΣΥΜΒΟΛΙΚΗ ΓΡΑΦΗ

1. Εισαγωγή

Στα μαθηματικά χειριζόμαστε και επεξεργαζόμαστε κάποια μαθηματικά αντικείμενα που έχουμε ορίσει, όπως η συνάρτηση, το διάνυσμα κ.α. Η καλή αφομοίωση των αντικειμένων που ορίζουμε είναι σίγουρα μια αναγκαία συνθήκη για την εκμάθηση και κατανόηση της θεωρίας, αλλά δεν είναι αρκετή. Είναι οι σχέσεις ανάμεσα στα αντικείμενα και οι ιδιότητές τους οι οποίες κατασκευάζουν τη γενική θεωρία. Ας δούμε λοιπόν πώς περιγράφουμε τις σχέσεις μεταξύ των μαθηματικών αντικειμένων. Για να περιγράψουμε στα μαθηματικά τις σχέσεις μεταξύ των αντικειμένων που έχουμε ορίσει έχουμε ανάγκη από δύο γλώσσες: **τη «φυσική» γλώσσα και την «τυπική» γλώσσα**. Θα αναφερθούμε σε ένα παράδειγμα από τη γραμμική άλγεβρα για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι. Για να δώσουμε ένα κριτήριο συγγραμμικότητας δύο μη μηδενικών διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου E, υπάρχουν τρεις δυνατότητες παρουσίασης:

(1) «Λέμε ότι ένα μη μηδενικό διάνυσμα ενός διανυσματικού χώρου $\mathbb{E}$ είναι συγγραμμικό με ένα άλλο μη μηδενικό αν μπορεί να γραφεί ως πολλαπλάσιο αυτού.»

(2) «$u \in \mathbb{E} - \{0_{\mathbb{E}}\}, v \in \mathbb{E} - \{0_{\mathbb{E}}\} \ \exists \lambda \in \mathbb{R}: u = \lambda v$»

(3) «Έστω u και v δύο μη μηδενικά διανύσματα, στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου $\mathbb{E}$. Λέμε ότι το u είναι συγγραμμικό με το v αν υπάρχει λ μέσα στο $\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε το u να είναι ίσο με λ v.»

Η πρώτη αναπαράσταση (1) είναι μία έκφραση μέσα στο **επίπεδο της «φυσικής» γλώσσας**. Με τη φυσική γλώσσα μπορούμε να περιγράψουμε καταστάσεις, διαδικασίες, να δώσουμε κριτίρια ... και πιο γενικά να περιγράφουμε αυτό που κάνουμε.

Η δεύτερη αναπαράσταση (2) είναι μία έκφραση μέσα στο **επίπεδο της συμβολικής γραφής** (ή «τυπικής» γλώσσας). Αυτό το επίπεδο σημειωτικής αναπαράστασης χρησιμοποιεί στοιχεία από τη λογική για να καλύ-

Σημείωση: Στις σελίδες 19-34, όταν το κείμενο αναφέρεται σε «επίπεδα σημειωτικών αναπαραστάσεων» εννοεί «συστήματα σημειωτικών αναπαραστάσεων» (registres de représentation sémiotique, σύμφωνα με την ορολογία του R. Duval) ψει τις γλωσσικές λειτουργίες και για να θεωρηθεί ως μια γλώσσα. Χρησιμοποιούμε γράμματα για να συμβολίσουμε ένα αντικείμενο, ποσοδείκτες, σύμβολα πράξεων, σύμβολα για να σημειώσουμε μία ισοδυναμία, μια συνεπαγωγή, ... Με τη βοήθεια όλων αυτών μπορούμε να γράψουμε ορισμούς, να γενικεύσουμε ιδιότητες, να εκφωνήσουμε θεωρήματα.

Η τρίτη παρουσίαση (3) είναι μια **«μικτή έκφραση»** κατά την έννοια του R. Duval (Duval R. 1996). Οι «μικτές» εκφράσεις είναι εκφράσεις γραμμένες στη φυσική γλώσσα οι οποίες μοιάζουν να είναι μια ανάγνωση της έκφρασης γραμμένης στη συμβολική γραφή, αναμιγνύοντας χαρακτηριστικά της φυσικής γλώσσας και άλλα της συμβολικής γραφής. Αυτή η ανάμιξη γίνεται «παίρνοντας τα ονόματα των συμβόλων ή των εκφράσεων που τα κωδικοποιούν, και αριθμώντας έτσι την ακολουθία των συμβόλων, σεβόμενοι φυσικά τους συντακτικούς κανόνες της φυσικής γλώσσας. Αποκτούμε κατά αυτόν τον τρόπο μια εκφώνηση που μοιάζει με μία εκφώνηση στη φυσική γλώσσα» (Duval R., 1996). Αυτός ο τύπος εκφράσεων δεν αποτελεί ένα ξεχωριστό επίπεδο σημειωτικής αναπαράστασης. Η φράση κωδικοποιεί με τη βοήθεια λέξεων τις μονάδες που αποτελούν την έκφραση σε συμβολική γραφή, διατηρώντας μάλιστα τη σειρά διαδοχής τους στη συμβολική γραφή. Δεν πρόκειται ούτε για μια εκφώνηση γραμμένη στη φυσική γλώσσα.

Κοιτώντας το παράδειγμα της συγγραμικότητας παρουσιασμένο μέσα στο επίπεδο της φυσικής γλώσσας και στο επίπεδο της συμβολικής γραφής, μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι οι δυο τύποι της γλώσσας δεν έχουν καθόλου την ίδια μορφή. Αντίθετα, η λειτουργία των δυο αυτών επιπέδων σημειωτικής αναπαράστασης ως προς την περιγραφή και την επεξεργασία των διαφορετικών καταστάσεων δεν είναι η ίδια. Θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια μερικές διαφορές ανάμεσα στη «φυσική» γλώσσα και στην «τυπική» γλώσσα.

2. Σύγκριση δύο Λεκτικών Λειτουργειών στη «Φυσική» Γλώσσα και στην «Τυπική» Γλώσσα

Α. Ορισμός των μαθηματικών αντικειμένων

• Το επίπεδο της φυσικής γλώσσας διαθέτει μια μεγάλη ποικιλία λέξεων και επιθέτων που μας επιτρέπει να δώσουμε ένα *διαφορετικό* *όνομα σε κάθε αντικείμενο που ορίζουμε.* Αντίθετα, μέσα στο επίπεδο της συμβολικής γραφής ο αριθμός των συμβόλων που διαθέτουμε για να καταδείξουμε τα μαθηματικά αντικείμενα είναι *πιο περιορισμένος*. Δεν υπάρχει ένα διαφορετικό σύμβολο για κάθε ορισμένο αντικείμενο. Κατά συνέπεια για να περιγράψουμε μέσα στο επίπεδο της συμβολικής γραφής ένα καινούργιο αντικείμενο πρέπει να παρουσιάσουμε επεξηγηματικά όλες τις βασικές του ιδιότητες.

Ο επόμενος πίνακας περιγράφει με τη βοήθεια ενός παραδείγματος αυτή τη διαφορά.

Επίπεδο της φυσικής γλώσσας	Επίπεδο της συμβολικής γραφής
«Έστω Ε ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια **εσωτερική** πράξη»	«$(\mathbb{E}, +)$: $+ : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{E}$»
«Έστω Ε ένα σύνολο εφοδιασμένο με μια **εσωτερική προσεταιριστική** πράξη»	«$(\mathbb{E}, +)$: $+ : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to E$ $\forall u \in \mathbb{E}, \forall v \in \mathbb{E}, \forall w \in \mathbb{E}$ $(u + v) + w = u + (v + w)$»

Παρατηρούμε ότι με την προσθήκη ενός μόνο επιθέτου («προσεταιριστική») μέσα σε μια φράση γραμμένη στη φυσική γλώσσα ορίζουμε ένα καινούργιο αντικείμενο. Γενικά, στο επίπεδο της συμβολικής γραφής δε διαθέτουμε σύμβολο αποκλειστικό για τον ορισμό αυτού του νέου αντικειμένου και επομένως πρέπει να γράψουμε αναλυτικά την ιδιότητα που αντιστοιχεί στο επίπεδο που προσθέσαμε, δηλαδή στο «προσεταιριστική» («$\forall u \in \mathbb{E}, \forall v \in \mathbb{E}, \forall w \in \mathbb{E}$ $(u + v) + w = u + (v + w)$»).

- Επίσης, όταν θέλουμε να περιγράψουμε μια κατάσταση σε συμβολική γραφή πρέπει να καθορίσουμε ένα–ένα τα αντικείμενα στα οποία αναφερόμαστε. Όπως για παράδειγμα για να ορίσουμε μια οικογένεια διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου $\mathbb{E}$, πρέπει να *εξατομικεύσουμε* τα αντικείμενα που ορίζουμε δίνοντας ένα όνομα στο καθένα από αυτά, όπως πιο κάτω:

$$« x_1 \in \mathbb{E}, x_2 \in \mathbb{E}, \ldots x_n \in \mathbb{E}, n \in \mathbb{N} »$$

Αντίθετα, στη φυσική γλώσσα μπορούμε να *ομαδοποιήσουμε* δίχως να επαναλάβουμε, ένα - ένα τα ονόματα όλων των ορισμένων αντικείμενων:

«Θεωρούμε μια πεπερασμένη οικογένεια διανυσμάτων
ενός διανυσματικού χώρου».

Β. Επεξεργασία της εκφώνησης

Μια άλλη διαφορά ανάμεσα στα δυο επίπεδα σημειωτικής αναπαράστασης εμφανίζεται μέσα στην *επεξεργασία της αντικατάστασης*. Αυτό δε λειτουργεί κατά τον ίδιο τρόπο και στα δύο επίπεδα. Στη συμβολική γραφή έχουμε το δικαίωμα να χρησιμοποιούμε τη λειτουργία της *αντικατάστασης κατά εκφράσεις*, το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε σε μια κατάσταση που περιγράφουμε σε συμβολική γραφή να αντικαθιστούμε μια έκφραση με μια άλλη ισοδύναμη της, χωρίς να αλλάξει το νόημα της κατάστασης που αρχικά περιγράφαμε. Με τη βοήθεια αυτής της λειτουργίας αλλάζουμε μόνο τη φόρμα της παρουσίασης των δεδομένων πληροφοριών για να τις προσαρμόσουμε καλύτερα στο πρόβλημα που επεξεργαζόμαστε.

Στη φυσική γλώσσα η *αντικατάσταση* δεν γίνεται σε απομονωμένες εκφράσεις, αλλά σε *ολόκληρες φράσεις*. Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για να εξηγήσουμε καλύτερα την επεξεργασία της αντικατάστασης στο κάθε επίπεδο:

– Στο επίπεδο της φυσικής γλώσσας:

«Δίνονται δύο συγγραμμικά διανύσματα. Υποθέτουμε ότι το ένα από τα δύο είναι συγγραμμικό με ένα τρίτο διάνυσμα. Το άλλο είναι επίσης συγγραμμικό με το τρίτο διάνυσμα.»

– Στο επίπεδο της συμβολικής γραφής:

«$u_2 = \mu\, u_1$

$u_1 = \varkappa\, u_3$

$u_2 = \mu\, u_1 = \mu\, (\varkappa\, u_3) = \mu\, \varkappa\, u_3$ »

αντικατάσταση έκφρασης

Γ. Προβληματισμός

Η πλειοψηφία των μαθηματικών εγχειριδίων χρησιμοποιεί συχνά «μικτές» εκφράσεις. Το γεγονός αυτό οδηγεί τους φοιτητές (και τους μαθητές) σε κακό χειρισμό των δυο επιπέδων λόγου (φυσικής γλώσσας και συμβολικής γραφής). Από τη μία κάθε φοιτητής ερμηνεύει τα διάφορα σύμβολα με το δικό του τρόπο, και από την άλλη δεν τα χρησιμοποιεί σωστά και δεν τηρεί τους κανόνες σύνταξης στον κάθε τύπο γλώσσας. Επίσης, ένας ορισμός ή μια ιδιότητα γραμμένη σε γλώσσα συμβολικής γραφής είναι αδύνατον να διαβαστεί ή να κατανοηθεί από ένα φοιτητή. Έτσι για τους φοιτητές τα περισσότερα αντικείμενα που ορίζουμε έχουν μια όψη πολύ πιο περιορισμένη από αυτή που ο επίσημος ορισμός απονέμει στο ορισμένο αντικείμενο. Επιπλέον μπορούμε να διαπιστώσουμε μεγάλες δυσκολίες στο πέρασμα από μια εκφώνηση άσκησης γραμμένη σε φυσική γλώσσα στη «μετάφραση» της σε συμβολική γραφή. Αλλά αυτό το πέρασμα είναι αναγκαίο στις πιο πολλές από τις ασκήσεις και τα θεωρήματα.

Η ιδιομορφία αυτού του περάσματος βασίζεται στο γεγονός ότι ένα από τα δύο επίπεδα είναι η φυσική γλώσσα η οποία αποτελεί ένα ξεχωριστό επίπεδο ως προς τα άλλα επίπεδα σημειωτικής αναπαράστασης (Duval R., 1996). Υπάρχουν μεταβολές που μπορούμε να κάνουμε σε εκφράσεις γραμμένες στη φυσική γλώσσα οι οποίες δεν προκαλούν καμία μεταβολή στην αντίστοιχη έκφραση γραμμένη στο επίπεδο της συμβολικής γραφής. Πράγματι, υπάρχουν πολλοί τρόποι για να περιγράψουμε την ίδια κατάσταση στο επίπεδο της φυσικής γλώσσας. Όταν οι μορφές των εκφωνήσεων σε φυσική γλώσσα είναι παρόμοιες ή μοιάζουν πολύ, δεν υπάρχουν καθαροί ή σταθεροί δείκτες για να προσδιορίσουν με ποια μορφή έκφρασης μπορούμε να τις περιγράφουμε σε τυπική γλώσσα. Επομένως, κατά τη διάρκεια του περάσματος από το επίπεδο της φυσικής γλώσσας στο επίπεδο της συμβολικής γραφής, πρέπει να διαλέξουμε τις κατάλληλες μεταβολές που θα εκτελέσουμε.

3. Διδασκαλία

Α. Σκοπός – Οργάνωση διδασκαλίας

Οργανώσαμε μια πειραματική διδασκαλία στο Πανεπιστήμιο του Στρασβούργου για τους πρωτοετείς φοιτητές, στα πλαίσια του μαθήματος της γραμμικής άλγεβρας. Η διδασκαλία πραγματοποιήθηκε την άνοιξη του 1993 και είχε διάρκεια περίπου 8 ωρών.

Ο σκοπός αυτής της διδασκαλίας ήταν διπλός:

1) Θέλαμε να εξετάσουμε αν είναι δυνατόν να πραγματοποιήσουμε μια **εκμάθηση της μετατροπής αναπαραστάσεων**,

2) και στην περίπτωση που μια τέτοια εκμάθηση πετύχει, να δούμε αν **διευκολύνει την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και αντικειμένων που ορίζουμε.**

Η διδασκαλία στηρίχτηκε στη χρήση των διαφόρων επιπέδων σημειωτικής αναπαράστασης και στη μετατροπή μιας αναπαράστασης από το ένα επίπεδο στο άλλο, *προς όλες τις κατευθύνσεις*. Και στην περίπτωση του διανύσματος, αφού χρησιμοποιούμε τρία διαφορετικά επίπεδα αναπαράστασης, διαθέτουμε μια μεγάλη ποικιλία περασμάτων:

- από το γραφικό στο επίπεδο των πινάκων,
- από το επίπεδο των πινάκων στο γραφικό,
- από το γραφικό στο επίπεδο της συμβολικής γραφής,
- και αντιστρόφως,
- από το επίπεδο των πινάκων στο επίπεδο της συμβολικής γραφής,
- και αντιστρόφως.

Πιο συγκεκριμένα βασιστήκαμε στην εξής αρχή:
Ερευνήσαμε συστηματικά πώς οι μεταβολές ορισμένων στοιχείων μιας αναπαράστασης σε ένα δεδομένο επίπεδο επηρεάζουν την αντίστοιχη αναπαράσταση σε ένα άλλο επίπεδο, δηλαδή ποιες μεταβολές προκαλούν σε αυτήν.

Έτσι, αφού παρουσιάσαμε στους φοιτητές τα τρία επίπεδα και τους κανόνες μετάβασης από το ένα στο άλλο, τους δίναμε κάθε φορά ένα φύλλο ασκήσεων με πολλές αναπαραστάσεις καταστάσεων διανυσμάτων σε ένα δεδομένο επίπεδο αφετηρίας και τους ζητούσαμε να πραγματοποιήσουν την αντίστοιχη αναπαράσταση σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο άφιξης. Φροντίζαμε στις αναπαραστάσεις που δίναμε να *κρατάμε ορισμένα στοιχεία σταθερά και να μεταβάλλουμε κάθε φορά ένα*, με σκοπό να παρατηρήσουν οι ίδιοι οι φοιτητές τις μεταβολές που προκαλούνται στις αναπαραστάσεις στο επίπεδο άφιξης.[1]

Αυτή η συστηματική εργασία εφαρμόστηκε για όλα τα περάσματα που προαναφέραμε, προς όλες τις κατευθύνσεις.

Στη συνέχεια, ασχοληθήκαμε με το επίπεδο της γλώσσας. Πρόκειται, όπως αναφέραμε για τον τρόπο με τον

[1] Στη σελ. 35 παρουσιάζονται ορισμένα φύλλα εργασίας που χρησιμοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, για να γίνει πιο φανερή η συστηματική μελέτη της αλλαγής ενός στοιχείου στην αναπαράσταση του συστήματος αφετηρίας, κρατώντας τα υπόλοιπα σταθερά, και η ταυτόχρονη παρατήρηση της αλλαγής της αναπαράστασης στο σύστημα άφιξης.

οποίο περιγράφουμε με λόγια μια κατάσταση διανυσμάτων, όπως π.χ. η έκφραση

$$«u \in \mathbb{R}^3»$$

στο επίπεδο της γλώσσας μπορεί να αναπαρασταθεί ως

«Ένα διάνυσμα στο χώρο των τριών διαστάσεων.»

Δίνοντας αυτή τη φορά απλές εκφράσεις ή πολύπλοκους ορισμούς, θεωρήματα ή και εκφωνήσεις ασκήσεων στο επίπεδο της γλώσσας, ζητούσαμε από τους φοιτητές να δώσουν την αντίστοιχη αναπαράσταση στο επίπεδο της συμβολικής γραφής.

Β. Παρουσίαση της φυσικής γλώσσας και της συμβολικής γραφής

Κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας μας φροντίσαμε να αποφύγουμε τη χρήση μικτών εκφράσεων (βλ. παράγραφο 5.5.) Χρησιμοποιήσαμε εκφράσεις ολοκληρωτικά γραμμένες σε φυσική γλώσσα ή τυπική γλώσσα, χωρίς να ανακατεύουμε εκφράσεις στις δυο γλώσσες. Πιο συγκεκριμένα, τις ώρες της διδασκαλίας ασχοληθήκαμε μόνο με το πέρασμα από εκφωνήσεις γραμμένες στη φυσική γλώσσα σε εκφωνήσεις γραμμένες σε τυπική γλώσσα, μελετήσαμε δηλαδή συστηματικά το πέρασμα φυσική γλώσσα → συμβολική γραφή. Το πέρασμα αντίθετης φοράς (συμβολική γραφή → φυσική γλώσσα), το οποίο δεν πρέπει να συγχέεται με τις μικτές εκφράσεις, δηλαδή τη λεκτική κωδικοποίηση, έχει ενδιαφέρον για την κατανόηση, αλλά όχι για την επεξεργασία. Στη διδασκαλία μας δεν αναφερθήκαμε καθόλου σε αυτό το πέρασμα.

Η διαδικασία του περάσματος από το ένα επίπεδο αναπαράστασης στο άλλο πραγματοποιήθηκε κάνοντας συστηματικές μεταβολές σε ένα από τα δύο επίπεδα σημειωτικής αναπαράστασης και παρατηρώντας τις αντίστοιχες μεταβολές μέσα στο άλλο επίπεδο. Στηριχτήκαμε δηλαδή στην ίδια ακριβώς αρχή που χρησιμοποιήσαμε για τα περάσματα ανάμεσα στα άλλα τρία επίπεδα σημειωτικής αναπαράστασης που συναντάμε στη γραμμική άλγεβρα (βλ. Pavlopoulou K., 1993).

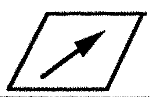
Η προσέγγιση του επιπέδου της γλώσσας, οργανώθηκε σε δυο στάδια:

Πρώτο στάδιο (διάρκεια: 1 ώρα)

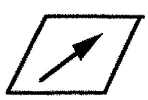
Μια πρώτη μαθηματική κατηγοριοποίηση, ένα πρώτο βήμα προς τη φυσική γλώσσα:

Αφού οι φοιτητές είχαν εξοικειωθεί με τις διαφορετικές αναπαραστάσεις μέσα στα τρία επίπεδα (γραφικό, πίνακας, συμβολικό) και με τις μετατροπές τους από το ένα επίπεδο στο άλλο, προχωρήσαμε στην εισαγωγή του επιπέδου της φυσικής γλώσσας και τη σχέση του με τα προηγούμενα επίπεδα. Ομαδοποιήσαμε τις αναπαραστάσεις που είχαν κοινές ιδιότητες (π.χ. τη γραμμική εξάρτηση τριών διανυσμάτων) και απονείμαμε στις ιδιότητες αυτές ένα όνομα, την αντίστοιχη μαθηματική ορολογία. Έτσι, πριν δώσουμε τον επίσημο ορισμό μιας ιδιότητας, ο φοιτητής διέθετε πολλές αναπαραστάσεις αυτής της ιδιότητας μέσα σε διαφορετικά επίπεδα.

Δουλέψαμε μαζί με τους φοιτητές επεξεργάζοντας ένα φύλλο εργασίας, όπως θα δούμε στον παρακάτω πίνακα. Ξεκινήσαμε από την αναπαράσταση ενός διανύσματος πάνω στο επίπεδο και μέσα στο χώρο και μέσα σε χώρους πιο μεγάλης διάστασης. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα στο επίπεδο:

Διάνυσμα	Συμβολική γραφή	Πίνακας	Γραφικό
στο επίπεδο	$u \in \mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	

Το ενδιαφέρον αυτού του φύλλου εργασίας ήταν διπλό:

- από τη μια να δείξουμε στους φοιτητές τις διαφορετικές δυνατότητες αναπαράστασης που διαθέτει το κάθε επίπεδο αναπαράστασης (περιορισμός σε διάσταση 2 και 3 στο γραφικό επίπεδο, περιορισμός στην πεπερασμένη διάσταση στο επίπεδο των πινάκων),
- και από την άλλη μεριά να συνδέσουμε μια έκφραση σε φυσική γλώσσα με αναπαραστάσεις στα άλλα τρία επίπεδα σημειωτικής αναπαράστασης («διάνυσμα στο επίπεδο», «$u \in \mathbb{R}^2$», $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,  .)

Στη συνέχεια, ζητήσαμε από τους φοιτητές να κάνουν την ίδια εργασία και για άλλες μαθηματικές έννοιες όπως η βάση, η γραμμική ανεξαρτησία και εξάρτηση, η συγγραμμικότητα.

Δεύτερο στάδιο (διάρκεια: 2 ώρες)

Φυσική και τυπική γλώσσα:

Αυτό το στάδιο ήταν αφιερωμένο στο πέρασμα φυσική γλώσσα → τυπική γλώσσα. Δεν έγινε καμία παρουσίαση των κανόνων του περάσματος από το ένα επίπεδο στο άλλο. Μοιράσαμε ένα φύλλο εργασίας στους φοιτητές. Περιείχε είκοσι εκφράσεις σε φυσική γλώσσα για να «μεταφραστούν» σε συμβολική γραφή. Οι πρώτες εκφράσεις ήταν πολύ απλές, όπως π.χ. «ένα διάνυσμα του επιπέδου» που ήδη εμφανιζόταν στο προηγούμενο φύλλο εργασίας. Αλλά αυτή τη φορά, παρουσιαζόταν σαν μια ολόκληρη φράση σε φυσική γλώσσα και ζητούσαμε τη διαδικασία της μετατροπής της στο συμβολικό επίπεδο. Στη συνέχεια εισάγαμε συστηματικές μεταβολές των δεδομένων εκφράσεων,

- είτε προσθέτοντας ένα *επίθετο* (π.χ. «πεπερασμένη οικογένεια» και «πεπερασμένη μη κενή οικογένεια»)
- είτε προσθέτοντας μια *άλλη έκφραση* (π.χ. «επίπεδο» και «επίπεδο εφοδιασμένο με μια βάση (e_1, e_2)»).

Αφού οι φοιτητές ολοκλήρωσαν τη συμπλήρωση του φύλλου αυτού, όλα τα φύλλα εργασίας συγκεντρώθηκαν και μοιράστηκαν πάλι σε αυτούς, έτσι ώστε κανένας φοιτητής να μη διορθώσει το δικό του γραπτό.

Κατά τη διάρκεια της δεύτερης διδακτικής ώρας εξηγήσαμε αναλυτικά το πέρασμα από το επίπεδο της γλώσσας στο επίπεδο της συμβολικής γραφής παρουσιάζοντας ως παράδειγμα τον ορισμό του διανυσματικού υποχώρου. Ξεκινήσαμε από ένα κείμενο και το «μεταφράσαμε» σε συμβολική γραφή.

Παράδειγμα περάσματος από επίπεδο της φυσικής γλώσσας στο επίπεδο της συμβολικής γραφής: ορισμός του διανυσματικού υποχώρου

Έστω V ένα $\boxed{\text{μη κενό}}$ υποσύνολο ενός δ.χ.Ε. → $V \subset E$

μη κενό → $V \neq \varnothing$

Λέμε ότι ο V είναι ένας διανυσματικός υποχώρος του Ε

αν είναι σταθερός ως προς τους γραμμικούς συνδυασμούς → $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \mu \in \mathbf{R}, \forall x \in V, \forall y \in V$
$\lambda x + \mu y \in V$

Στη συνέχεια μοιράσαμε ένα άλλο φύλλο εργασίας στους φοιτητές για να πραγματοποιήσουν οι ίδιοι μόνοι τους το πέρασμα από τη φυσική γλώσσα στην τυπική, για την περίπτωση του ορισμού του γραμμικού συνδυασμού.

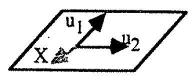
Φύλλο εργασίας Νο 9: ορισμός γραμμικού συνδυασμού

Σας δίνεται ο ορισμός του γραμμικού συνδυασμού σε μορφή κειμένου. Να γίνει η «μετάφραση» σε συμβολική γραφή:

Κείμενο	Συμβολική γραφή
Έστω Χ ένα διάνυσμα ενός χώρου Ε. Λέμε ότι το Χ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός μιας πεπερασμένης οικογένειας διανυσμάτων του Ε, αν μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα διανυσμάτων συγγραμμικών προς τα διανύσματα αυτής της οικογένειας.	

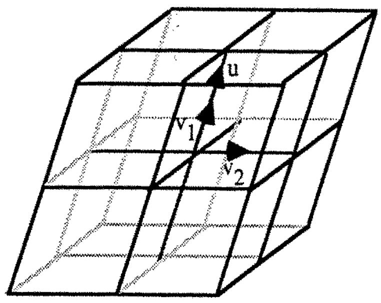
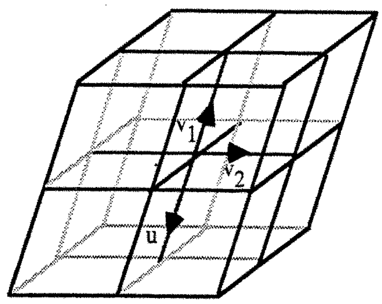
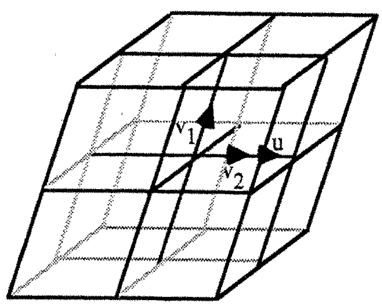
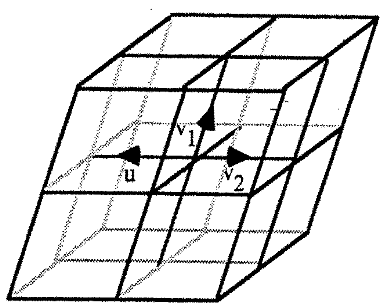
Για τη «μετάφραση» του κειμένου του παραπάνω φύλλου εργασίας χρησιμοποιήσαμε «μεταφράσεις» που είχαμε πραγματοποιήσει στο προηγούμενο φύλλο εργασίας. Δουλέψαμε μαζί με τους φοιτητές για να φτάσουν στη σωστή «μετάφραση».

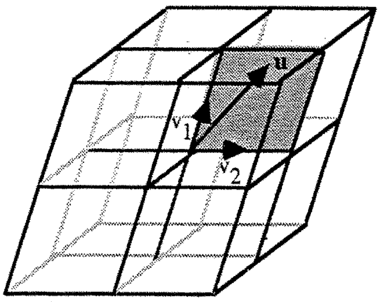
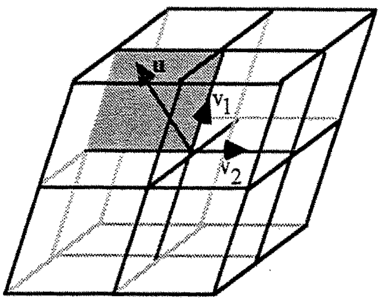
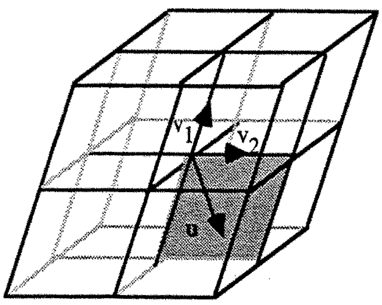
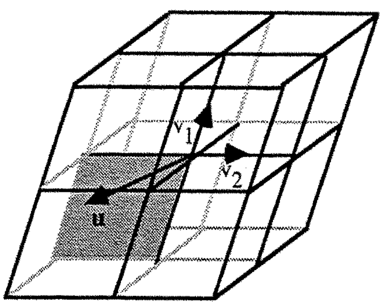
Στο επόμενο φύλλο εργασίας συσχετίσαμε τα τέσσερα επίπεδα σημειωτικής αναπαράστασης: φυσική γλώσσα, συμβολική γραφή, επίπεδο του πίνακα και γραφικό επίπεδο. Ζητήσαμε να μας δώσουν τον ορισμό μιας συγκεκριμένης περίπτωσης του γραμμικού συνδυασμού στη φυσική γλώσσα, να πραγματοποιήσουν το πέρασμα προς τη συμβολική γραφή, καθώς και να δώσουν, όπου είναι δυνατόν, αναπαραστάσεις στα άλλα επίπεδα. Παρουσιάζουμε στη συνέχεια ένα παράδειγμα από αυτό το φύλλο εργασίας για να εικονογραφήσουμε καλύτερα τη σχέση ανάμεσα σε όλα τα επίπεδα σημειωτικής αναπαράστασης.

Γραμμικός συνδυασμός	Φυσική γλώσσα	Συμβολική γραφή	Πίνακας	Γραφικό επίπεδο
... δυο διανυσμάτων του επιπέδου	Έστω X ένα διάνυσμα του επιπέδου. Λέμε ότι το X είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των δυο διανυσμάτων υ_1, u_2 του επιπέδου, αν μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα διανυσμάτων συγγραμμικών σε αυτά τα διανύσματα	$X \in \mathbb{R}^2$, $u_1 \in \mathbb{R}^2$, $u_2 \in \mathbb{R}^2$ $\exists\, \lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\exists\, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ $X = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$,	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|} \hline 1 & 0 & \lambda_1 \\ \hline 0 & 1 & \lambda_2 \\ \hline \end{array}$	

4. Αξιολόγηση – Συμπεράσματα από τη Διδασκαλία

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε δυο γραφικές παραστάσεις οι οποίες περιγράφουν τα αποτελέσματα δυο αξιολογήσεων που κάναμε στους πρωτοετείς φοιτητές. Ο πληθυσμός είχε χωριστεί σε δυο ομάδες: την *πειραματική ομάδα* και την *ομάδα ελέγχου*. Η πειραματική ομάδα παρακολούθησε την οκτάωρη πειραματική διδασκαλία ενώ η ομάδα ελέγχου παρακολούθησε το κλασικό πρόγραμμα που ακολουθείται στο

<table>
<tr><th>Registre graphique</th><th>Registre des tableaux</th></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>1</td><td>0</td><td>k (k positif)</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>1</td><td>0</td><td>k (k négatif)</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>k (k positif)</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>k (k négatif)</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Registre graphique</th><th>Registre des tableaux</th></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>1</td><td>0</td><td>k (k positif)</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>m (m positif)</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>1</td><td>0</td><td>k (k positif)</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>m (m négatif)</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>1</td><td>0</td><td>k (k négatif)</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>m (m positif)</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>
</td><td><table><tr><td>1</td><td>0</td><td>k (k négatif)</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>m (m négatif)</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
</table>

Registre des tableaux	Registre de l'écriture symbolique
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 & k \\ \hline 0 & 1 & 0 & m \\ \hline 0 & 0 & 1 & n \\ \hline\end{array}$	$u_1 \in \mathbb{R}^3, u_2 \in \mathbb{R}^3, u_3 \in \mathbb{R}^3, u_4 \in \mathbb{R}^3$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2 + 0\,u_3$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2 + 0\,u_3$ $u_3 = 0\,u_1 + 0\,u_2 + 1\,u_3$ $u_4 = k\,u_1 + m\,u_2 + n\,u_3$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 & k \\ \hline 0 & 1 & 0 & m \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$	$u_1 \in \mathbb{R}^3, u_2 \in \mathbb{R}^3, u_3 \in \mathbb{R}^3, u_4 \in \mathbb{R}^3$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2 + 0\,u_3$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2 + 0\,u_3$ $u_3 = 0\,u_1 + 0\,u_2 + 1\,u_3$ $u_4 = k\,u_1 + m\,u_2 + 0\,u_3$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 & k \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & n \\ \hline\end{array}$	$u_1 \in \mathbb{R}^3, u_2 \in \mathbb{R}^3, u_3 \in \mathbb{R}^3, u_4 \in \mathbb{R}^3$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2 + 0\,u_3$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2 + 0\,u_3$ $u_3 = 0\,u_1 + 0\,u_2 + 1\,u_3$ $u_4 = k\,u_1 + 0\,u_2 + n\,u_3$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & m \\ \hline 0 & 0 & 1 & n \\ \hline\end{array}$	$u_1 \in \mathbb{R}^3, u_2 \in \mathbb{R}^3, u_3 \in \mathbb{R}^3, u_4 \in \mathbb{R}^3$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2 + 0\,u_3$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2 + 0\,u_3$ $u_3 = 0\,u_1 + 0\,u_2 + 1\,u_3$ $u_4 = 0\,u_1 + m\,u_2 + n\,u_3$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 & k \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$	$u_1 \in \mathbb{R}^3, u_2 \in \mathbb{R}^3, u_3 \in \mathbb{R}^3, u_4 \in \mathbb{R}^3$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2 + 0\,u_3$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2 + 0\,u_3$ $u_3 = 0\,u_1 + 0\,u_2 + 1\,u_3$ $u_4 = k\,u_1 + 0\,u_2 + 0\,u_3$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & m \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}$	$u_1 \in \mathbb{R}^3, u_2 \in \mathbb{R}^3, u_3 \in \mathbb{R}^3, u_4 \in \mathbb{R}^3$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2 + 0\,u_3$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2 + 0\,u_3$ $u_3 = 0\,u_1 + 0\,u_2 + 1\,u_3$ $u_4 = 0\,u_1 + m\,u_2 + 0\,u_3$
$\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & n \\ \hline\end{array}$	$u_1 \in \mathbb{R}^3, u_2 \in \mathbb{R}^3, u_3 \in \mathbb{R}^3, u_4 \in \mathbb{R}^3$ $u_1 = 1\,u_1 + 0\,u_2 + 0\,u_3$ $u_2 = 0\,u_1 + 1\,u_2 + 0\,u_3$ $u_3 = 0\,u_1 + 0\,u_2 + 1\,u_3$ $u_4 = 0\,u_1 + 0\,u_2 + n\,u_3$

Fiche de travail N° 9 (corrigé) **mai 1993**

Nom : **Prénom :** **Filière :**

Groupe :

On vous donne la définition de la combinaison linéaire sous forme de texte. Faites la “traduction” en écriture symbolique :

Soit X un vecteur d'un e.v. E. →	$X \in E$
d'une famille $\boxed{\text{finie}}$ de vecteurs de E, →	$a_1 \in E, \ldots, a_k \in E$
finie →	$k \in \mathbb{N}$
s'il peut s'écrire comme la somme de vecteurs colinéaires aux vecteurs de cette famille. →	$\exists\ \lambda_1 \in \mathbb{R},\ \exists\ \lambda_2 \in \mathbb{R}, \ldots,\ \exists\ \lambda_k \in \mathbb{R}$ $X = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k$

Συγγραφή εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων

Σκοπός της εργασίας είναι η αξιοποίηση των βασικών θεωρητικών προσεγγίσεων που αφορούν τις διδακτικές καταστάσεις (Brousseau, 1997) στο σχεδιασμό εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων με τη μορφή σχεδίων μαθήματος για μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται στα σχολικά μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Ως ***εκπαιδευτική δραστηριότητα*** εννοούμε την περιγραφή μιας διδασκαλίας με εστιασμένο γνωστικό(ά) αντικείμενο(α), συγκεκριμένους εκπαιδευτικούς στόχους, διδακτικές αρχές και σχολικές πρακτικές.

Μια εκπαιδευτική δραστηριότητα περιγράφει μια ***διδακτική κατάσταση*** και υλοποιείται μέσα από μια σειρά ***σχεδίων μαθήματος.***

Η δομή μιας δραστηριότητας

Η ανάπτυξη και η περιγραφή μιας δραστηριότητας για μια έννοια (ή για περισσότερες έννοιες) των μαθηματικών πρέπει να αναπτύσσεται με βάση τους παρακάτω άξονες:

1. **Τίτλος** της εργασίας.
2. **Ταυτότητα** της δραστηριότητας: Περιγράφει στα βασικά χαρακτηριστικά της δραστηριότητας, όπως τον συγγραφέα, τη γνωστική περιοχή καθώς και το θέμα που διαπραγματεύεται. Επίσης, αναφέρεται η ηλικία και η τάξη των μαθητών στους οποίους αναφέρεται.
3. **Σκεπτικό** του σχεδιασμού της δραστηριότητας: Περιγράφει τους λόγους για τους οποίους δημιουργήθηκε η δραστηριότητα για τη μελέτη μιας συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας, όπως και με ποιο τρόπο επιδιώκει να τα επιλύσει.
4. **Πλαίσιο εφαρμογής**. Περιγράφει σε ποιους απευθύνεται η δραστηριότητα, ποιες προϋποθέσεις απαιτούνται για την εφαρμογή της και ποιοι είναι οι διδακτικοί της στόχοι.
5. **Ανάλυση της δραστηριότητας** σε Σχέδια Μαθήματος. Περιγράφει την λεπτομερή παρουσίαση της εφαρμογής της δραστηριότητας μέσα από Σχέδια Μαθήματος.
6. **Κριτική της δραστηριότητας**. Περιγράφει (α) τα πλεονεκτήματα της δραστηριότητας σε σχέση με άλλες διαδικασίες διδασκαλίας και μάθησης, (β) μια κριτική αναφορά στις δυνατότητες επέκτασης της δραστηριότητας από διαφορετικούς εκπαιδευτικούς και (γ) κριτική των πλεονεκτημάτων και μειονεκτημάτων της δραστηριότητας ως προς τις προσδοκώμενες διδακτικές και μαθησιακές διαδικασίες.
7. **Βιβλιογραφία.**

Το κείμενο της εργασίας των φοιτητών

Το κείμενο της εργασίας θα ακολουθεί την ακόλουθη δομή:

1. **Τίτλος της εργασίας** (συνοδευόμενος από τα ονόματα των μελών κάθε ομάδας και αντίστοιχους Α.Μ., το μάθημα στο οποίο εκπονήθηκε η εργασία κ.λ.π.).

2. **Ταυτότητα της δραστηριότητας.**

- **Συγγραφέας (είς).**
- **Γνωστική περιοχή των μαθηματικών:** Διακρίνουμε ως τέτοιες περιοχές την Άλγεβρα, τη Γεωμετρία, τη Στατιστική και τις Πιθανότητες.
- **Θέμα (τα)**. Περιγράφεται το θέμα ή τα θέματα που αφορούν τις μαθηματικές έννοιες τις οποίες η δραστηριότητα διαπραγματεύεται. Π.χ. μελέτη των γραμμικών συναρτήσεων της μορφής y=αx+β.
- **Βασική ιδέα**. Περιγράφεται συνοπτικά -με μία ή δύο φράσεις- η ιδέα πάνω στην οποία έχει στηριχτεί ο σχεδιασμός της δραστηριότητας.

3. **Σκεπτικό της δραστηριότητας.** Περιγράφει:

- **Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα** που αφορούν τη μελέτη μιας συγκεκριμένης μαθηματικής έννοιας με αναφορές στην υπάρχουσα έρευνα σχετικά με την έννοια αυτή (π.χ. πορίσματα ερευνών από το χώρο της διδακτικής των μαθηματικών).
- **Θεωρητικό πλαίσιο.** Περιγράφεται το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο βασίζεται η δραστηριότητα. Για παράδειγμα, θα πρέπει να είναι ευκρινής η επιλογή του θεωρητικού πλαισίου που αφορά στην φύση της μαθηματικής γνώσης, την αξία της και στον τρόπο απόκτησή της (π.χ. κονστρουκτιβιστικό ή κοινωνικό – πολιτιστικό πλαίσιο).

4. **Πλαίσιο εφαρμογής.** Περιγράφει σε ποιους απευθύνεται η δραστηριότητα, ποιες προϋποθέσεις απαιτούνται για την εφαρμογή της, και ποιοι είναι οι διδακτικοί στόχοι στους οποίους στοχεύει.

- **Σε ποιους απευθύνεται.** Περιγράφεται η ηλικία ή η τάξη των μαθητών στους οποίους απευθύνεται.
- **Χρόνος υλοποίησης.** Αναφέρεται πόσες διδακτικές ώρες απαιτούνται για την υλοποίηση της δραστηριότητας.
- **Χώρος υλοποίησης.** Αναφέρεται αν οι μαθητές θα εργαστούν εξ' ολοκλήρου στην αίθουσα διδασκαλίας ή και σε άλλο χώρο (π.χ. εργαστήριο υπολογιστών).
- **Προαπαιτούμενες γνώσεις των μαθητών**. Περιγράφεται το απαιτούμενο υπόβαθρο των μαθητών ώστε να μπορούν να διεξάγουν τις προτεινόμενες δράσεις της δραστηριότητας προκειμένου να συντελεστεί η διαδικασία μάθησης που προβλέπεται.
- **Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία**. Περιγράφονται τα υλικά εργαλεία (π.χ. γεωμετρικά όργανα) και τα άλλα βοηθητικά μέσα (π.χ. φύλλα εργασίας, οδηγίες, ιστοσελίδες) που απαιτούνται για τη διεξαγωγή της δραστηριότητας.

- **Ασκήσεις προτεινόμενες.** Για κάθε ενότητα δίδονται στους μαθητές και ένας αριθμός ασκήσεων για εμπέδωση του αντικειμένου.
- **Κοινωνική ενορχήστρωση της τάξης.** Αναφέρεται αν οι μαθητές θα εργαστούν ή όχι σε ομάδες και ποιοι θα είναι οι ρόλοι μαθητών και διδάσκοντα.
- **Στόχοι της δραστηριότητας**. Γίνεται αναφορά στην εξειδίκευση των διδακτικών στόχων που αφορούν το γνωστικό αντικείμενο, δηλαδή τις μαθηματικές έννοιες με τις οποίες θα εμπλακούν οι μαθητές, και τους οποίους εξυπηρετεί η προτεινόμενη δραστηριότητα.

Για παράδειγμα, μια εργασία που σχετίζεται με τη μελέτη της έννοιας της συνάρτησης θα πρέπει να τεκμηριώνει τις πτυχές της έννοιας που καλύπτει η πρόταση όπως και το τι αναμένεται από την εφαρμογή της. Έτσι για μια δραστηριότητα που αφορά τη διδασκαλία της γραμμικής συνάρτησης y=αx+β σε μαθητές Β' Γυμνασίου μέσα από την επίλυση πραγματικών προβλημάτων μοντελοποίησης οι στόχοι μπορεί να είναι ενδεικτικά:

- η εμπλοκή των μαθητών σε προβληματικές καταστάσεις μέσα από τις οποίες προκύπτει η συναρτησιακή συσχέτιση δύο μεγεθών,
- η συμβολική έκφραση συναρτησιακών σχέσεων,
- η δυνατότητα πειραματισμού και διερεύνησης με διαφορετικές αναπαραστάσεις της γραμμικής συνάρτησης (γραφική, συμβολική, σε μορφή πίνακα κ.λπ.)

5. **Ανάλυση της δραστηριότητας.** Στην ενότητα αυτή περιγράφεται με λεπτομέρεια η διαδικασία εφαρμογής της δραστηριότητας μέσα από την παρουσίαση Σχεδίων Μαθήματος και την ανάλυση της αναμενόμενης διδακτικής και μαθησιακής πορείας σε καθένα από αυτά. Δηλαδή, παρουσιάζονται με τη σειρά τα αντίστοιχα Φύλλα Εργασίας και ακολουθεί η ανάλυση της αναμενόμενης διδακτικής και μαθησιακής πορείας. Θα αναφερθούν οι ενδεχόμενες απαντήσεις αλλά και δυσκολίες που αναμένεται να συναντήσουν οι μαθητές όπως και ο τρόπος που θα αντιμετωπιστούν από το διδάσκοντα. Γίνεται επίσης αναφορά στις δράσεις που αναμένεται να ανακινήσει η εφαρμογή της δραστηριότητας στην πράξη όπως αυτές περιγράφονται στο θεωρητικό μέρος του μαθήματος και προέκυψαν με βάση τη Θεωρία Διδακτικών Καταστάσεων (Δράσης, Διατύπωσης, Επικύρωσης, Θεσμοποίησης).

6. **Κριτική της δραστηριότητας**. Η παράγραφος αυτή θα αποτελέσει τη σύνοψη όλης της εργασίας συμπεριλαμβάνοντας αν είναι δυνατόν προτάσεις για τη μελλοντική αξιοποίησή της στο πλαίσιο ενός μαθήματος στην τάξη, την περαιτέρω επέκτασή της κ.λπ.

7. **Βιβλιογραφία.** Εδώ θα αναφερθούν οι βιβλιογραφικές αναφορές που χρησιμοποιήθηκαν.

ΚΕΪΣΟΓΛΟΥ ΣΤΕΦΑΝΟΣ
Μαθηματικός M.ed
Υποψήφιος Διδάκτωρ του Παν/μίου της Αθήνας

ΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΟ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Ένα βασικό ερώτημα της διδακτικής των μαθηματικών αφορά στους τρόπους διδασκαλίας ώστε να εξασφαλιστεί η κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων από τους μαθητές.
Προφανώς δεν μπορεί να δημιουργηθεί ένα τέλειο σύστημα διδασκαλίας αφού η διδακτική των μαθηματικών αποτελεί έναν ερευνητικό χώρο στον οποίο είναι δυνατόν να αναπτυχθούν μόνο προσεγγίσεις και διδακτικά μοντέλα.
Ένα μοντέλο διδασκαλίας το οποίο τοποθετεί τον μαθητή στο κέντρο της μαθησιακής διαδικασίας θα μπορούσε να υλοποιηθεί σε 5 αλληλοσυμπληρούμενες φάσεις.

1. Η φάση της αρχικής, της ***βασικής μαθηματικής δραστηριότητας*** κατά την οποία οι μαθητές εμπλέκονται με ένα πραγματικό ή καθαρά μαθηματικό πρόβλημα. Το πρόβλημα, ή το ερώτημα, είναι κατάλληλα επιλεγμένο ώστε αφενός να πληροφορεί τους μαθητές με σαφήνεια για τους επιδιωκόμενους στόχους ενώ συγχρόνως να δημιουργεί κινητοποίηση.

2. Η φάση της ***διαπραγμάτευσης***, κατά την οποία οι μαθητές διαπραγματεύονται και επικοινωνούν τις ιδέες τους και τα αποτελέσματα της αρχικής τους δραστηριότητας με τους άλλους μαθητές και τον διδάσκοντα. Η διαπραγμάτευση προφανώς συνεχίζεται σε όλη την διάρκεια της δραστηριότητας αλλά στην συγκεκριμένη φάση θα πρέπει να οδηγήσει στην διατύπωση μιας μαθηματικής σχέσης, ενός κανόνα, μιας κανονικότητας.

3. Η φάση της ***διατύπωσης***, κατά την οποία διατυπώνουν με μαθηματική ορολογία τα συμπεράσματά τους που έχουν προκύψει από τις προηγούμενες φάσεις. Στην φάση αυτή οι μαθητές έχουν εντοπίσει πιθανές σχέσεις και κανόνες και τους διατυπώνουν κάνοντας χρήση της φυσικής γλώσσας. Συχνά οι διατυπώσεις δεν είναι αυστηρές και απαιτείται περαιτέρω διαπραγμάτευση ώστε να αποδοθούν με την απαιτούμενη μαθηματική ορολογία.

4. Η φάση της ***τυποποίησης***. Εδώ οι μαθητές προσπαθούν να εκφράσουν τα συμπεράσματά τους κάνοντας χρήση αυστηρού μαθηματικού συμβολισμού και υλοποιώντας αποδείξεις ώστε τα μαθηματικά που έχουν προκύψει να αποκτήσουν την απαιτούμενη εγκυρότητα. Στην φάση αυτή δίνεται στον διδάσκοντα η ευκαιρία να υπογραμμίσει στους μαθητές την αξία της γενίκευσης, της χρήσης συμβόλων και της τυπικής απόδειξης ως το μόνο μέσον μαθηματικής εγκυρότητας και βεβαιότητας.

5. Η φάση της ***εφαρμογής***. Κατά την φάση αυτή οι μαθητές κάνουν απλές εφαρμογές των μαθηματικών εννοιών και προτάσεων ώστε αυτές να γίνουν μαθηματικά εργαλεία με τα οποία θα μπορούν να υλοποιούν νέες μαθηματικές δραστηριότητες. Τι εφαρμογές έχει προετοιμάσει ο διδάσκων και καλό θα είναι να κλιμακώνονται από πολύ απλές σε περισσότερο σύνθετες. Το πλήθος προφανώς δεν μπορεί να είναι μεγάλο ενώ ο διδάσκων προτείνει στους μαθητές να τις ολοκληρώσουν ως κατ οίκον εργασία.

Είναι σημαντικό να υπογραμμιστεί ότι οι παραπάνω φάσεις δεν εντάσσονται σε μία γραμμική διαδικασία αλλά μπορεί να επανεμφανίζονται με έναν δυναμικό τρόπο ή να υλοποιούνται συγχρόνως κατά την διάρκεια της διδασκαλίας.

ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Γενική περιγραφή της διδασκαλίας ταυτοτήτων

Το σχέδιο μαθήματος που ακολουθεί είναι ενδεικτικό και επομένως θα πρέπει να θεωρηθεί ως μία από τις πολλές προσεγγίσεις που μπορεί να πραγματοποιηθούν στην διδασκαλία των ταυτοτήτων.

Η γενική μέθοδος που ακολουθείται είναι η κατευθυνόμενη ανακάλυψη και η πορεία από το μερικό προς το γενικό. Συγκεκριμένα οι μαθητές θα πρέπει να κάνουν πράξεις συμπληρώνοντας έναν κατάλληλο πίνακα και από εκεί να παρατηρήσουν την ύπαρξη ενός κανόνα, μιας σχέσης που φαίνεται να ισχύει ανεξάρτητα από την επιλογή των ειδικών περιπτώσεων. Ο κανόνας αυτός είναι $(α+β)^2-(α^2+β^2)=2αβ$ και ο μετασχηματισμός της συγκεκριμένης σχέσης θα οδηγήσει στην διατύπωση της γνωστής ταυτότητας του τετραγώνου του αθροίσματος δύο αριθμών.

Θα ακολουθήσει η απόδειξη του κανόνα αυτού μέσα από την εφαρμογή της επιμεριστικής ιδιότητας $(α+β)^2=(α+β).(α+β)$

Τέλος θα ζητηθεί από τους μαθητές να υλοποιήσουν μερικές εφαρμογές της συγκεκριμένης ταυτότητα με στόχο την μετατροπή της σχέσης σε ένα μαθηματικό εργαλείο με το οποίο θα μπορούν να μετασχηματίζουν αλγεβρικές παραστάσεις που περιέχουν τετράγωνα.

Η διδακτική πορεία θα καθοριστεί από το φύλλο εργασίας με το οποίο θα εφοδιαστούν οι μαθητές και το οποίο έχει ετοιμάσει ο διδάσκων. Το φύλλο εργασίας είναι ένα σύνολο από ερωτήσεις κατάλληλα σχεδιασμένες και διατυπωμένες με τις οποίες ο διδάσκων θα οδηγήσει σταδιακά τους μαθητές στην κατασκευή και εφαρμογής μιας νέας μαθηματικής γνώσης.

Φύλλο εργασίας.

Θέλουμε να εξετάσουμε την σχέση που μπορεί να έχουν δύο ποσότητες, η $(α+β)^2$ και η $α^2 + β^2$. Επειδή πολλές φορές θεωρούμε αυθόρμητα ότι οι ποσότητες αυτές είναι ίσες, καλύτερα να εξετάσουμε την σχέση τους σε πολλές περιπτώσεις ώστε ο κανόνας που θα βγάλουμε να είναι σωστός.

1) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα. (Βασική δραστηριότητα)

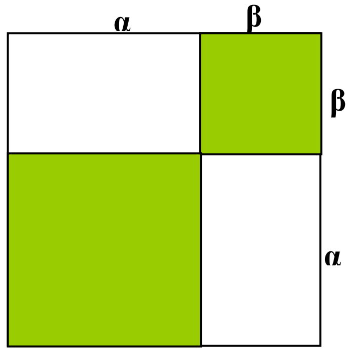
α	**β**	$(α+β)^2$	$α^2$	$β^2$	$α^2+β^2$	$(α+β)^2-(α^2+β^2)$	**2αβ**
3	5						
3	-5						
-3	5						
-3	-5						
3	0						
4	-6						

Τι παρατηρείτε; Να διατυπώσετε έναν κανόνα. (Διατύπωση)

2) Χρησιμοποιώντας τα σύμβολα α και β να γράψετε μία σχέση με βάση τον κανόνα που έχετε διατυπώσει. (Τυποποίηση)

3) Είναι γνωστό ότι $κ^2$=κ.κ. Να εφαρμόσετε την σχέση αυτή στην παράσταση $(α+β)^2$ και στην συνέχεια να εφαρμόσετε την επιμεριστική ιδιότητα. Να συνδέσετε το αποτέλεσμα με τον κανόνα που έχετε διατυπώσει στην προηγούμενη ερώτηση. (Τυποποίηση)

4) Με βάση το παρακάτω σχήμα να εξηγήσετε τον κανόνα που ήδη έχετε ανακαλύψει. (Σύνδεση αλγεβρικού και γεωμετρικού πλαισίου)



Εφαρμογές: α) Να αναπτύξετε την ταυτότητα $(3κ+1)^2$

β) Να συμπληρώσετε τα κενά στην παρακάτω ισότητα:

(…..+ $α^2$) = 16 +……..+ …..

Ανάλυση της δραστηριότητας

Καταρχήν απαιτείται προσεκτικός σχεδιασμός της πρώτης ερώτησης η οποία θα αποτελέσει και το κομβικό σημείο της δραστηριότητας. Οι αριθμοί που τοποθετούμε στην 1η στήλη είναι κατάλληλα επιλεγμένοι ώστε να οδηγούν τους μαθητές στην κατεύθυνση της γενίκευσης. Συγκεκριμένα τα 4 πρώτα ζεύγη είναι συνδυασμοί των αριθμών 3 και 5 με τα πρόσημα + και – ώστε να διαπιστώσουν οι μαθητές ότι ο κανόνας που ανακάλυψαν δεν εξαρτάται από τα πρόσημα. Στην συνέχεια υπάρχει ζεύγος αριθμών με το 0 ώστε να διαπιστώσουν ότι υπάρχει και μία περίπτωση κατά την οποία $\mathbf{(α+β)^2=α^2+β^2}$ όταν ο ένας από τους δυο αριθμούς είναι 0.
Ο διδάσκων δίνει ένα φύλλο εργασίας σε κάθε θρανίο ώστε τα ερωτήματά του να αποτελέσουν πυρήνες διαπραγμάτευσης μεταξύ των μαθητών.

1. Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές αναμένεται να συμπληρώσουν τον πίνακα και στην συνέχεια, με την βοήθεια του διδάσκοντα θα διατυπώσουν έναν άτυπο κανόνα ο οποίος καλό θα είναι να αναφέρεται σαφώς στην σταθερή σχέση των αποτελεσμάτων των δύο στηλών, το ότι δηλαδή αυτά είναι ίσα.

2. Ο στόχος της επόμενης ερώτησης είναι να προχωρήσουν οι μαθητές στην πρώτη φάση τυποποίησης, δηλαδή να κάνουν χρήση συμβόλων και να σημειώσουν ότι $\mathbf{(α+β)^2-(α^2+β^2)=2αβ}$.

3. Στην τρίτη ερώτηση θα ολοκληρωθεί η τυποποίηση, δηλαδή η εικασία των μαθητών θα αποκτήσει εγκυρότητα μέσω της απόδειξης. Η απόδειξη θα γίνει από τους μαθητές μέσω της υπόδειξης του διδάσκοντα να αναλύσουν την παράσταση $\mathbf{(α+β)^2}$ σε **(α+β).(α+β)** και να εκτελέσουν τις πράξεις, δηλαδή να εφαρμόσουν την επιμεριστική ιδιότητα. Καλό θα είναι πριν από την δραστηριότητα αυτή να συζητήσει ο διδάσκων για το αν μπορούν οι

περιορισμένες τιμές του πίνακα να μας εξασφαλίσουν ότι η σχέση που έχουν βρει οι μαθητές ισχύει για κάθε αριθμό.

4. Ο στόχος της 4[ης] ερώτησης είναι να μεταφράσουν οι μαθητές την αλγεβρική έκφραση της ταυτότητας σε ένα γεωμετρικό περιβάλλον. Οι μαθητές αναμένεται να παρατηρήσουν ότι το μεγάλο τετράγωνο έχει εμβαδόν $(α+β)^2$ και διαιρείται σε 4 περιοχές, σε 2 τετράγωνα με συνολικό εμβαδόν $α^2+β^2$ και σε δύο ορθογώνια κάθε ένα από τα οποία έχει εμβαδόν ίσο με α.β και επομένως και τα δύο μαζί 2α.β.

Οι εφαρμογές που ακολουθούν έχουν στόχο να δημιουργήσουν τις προϋποθέσεις ώστε η ταυτότητα να γίνει ένα νέο εργαλείο με το οποίο οι μαθητές θα μπορούν να μετασχηματίζουν ή να συμπληρώνουν κατάλληλα αλγεβρικές εκφράσεις.

ΣΧΕΔΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Γενική περιγραφή της διδασκαλίας αποδείξεων στην Γεωμετρία.

Η γεωμετρία στο Λύκειο στηρίζεται κατ εξοχήν στην έννοια της απόδειξης και επομένως θα χρειαστεί να προσαρμόσουμε το μοντέλο μας στην κατεύθυνση της διδασκαλίας μίας απόδειξης.

Στην συνήθη πρακτική και στο Ελληνικό σχολικό περιβάλλον η απόδειξη μιας πρότασης συνήθως υλοποιείται από μία παρουσίαση του διδάσκοντα στον πίνακα. Στην περίπτωση αυτή ο μαθητής θα πρέπει να αποστηθίσει την απόδειξη ως ένα κείμενο το οποίο θα πρέπει να αναπαραχθεί κατά την εξέταση.

Ένας εναλλακτικός τρόπος διδασκαλίας, μέσα στα πλαίσια της χρήσης φύλλου εργασίας, μπορεί να στηριχτεί στην ανάλυση της απόδειξης σε συγκεκριμένα βήματα (φάσεις). Συγκεκριμένα ο διδάσκων προσδιορίζει την δομή της απόδειξης, διακρίνει τα βασικά της συστατικά και οδηγεί τους μαθητές στην σταδιακή ανασύνθεσή της. Είναι σημαντικό να υπογραμμιστεί σε αυτό το σημείο η σημασία της χρήσης γνωστών προτάσεων και θεωρημάτων τα οποία ο διδάσκων προτείνει στους μαθητές να θεωρούνται ως μαθηματικά εργαλεία με τα οποία θα κατασκευάσουν την νέα μαθηματική γνώση.

Εδώ και πάλι καλό θα είναι η διδασκαλία να αρχίζει με ένα πρόβλημα το οποίου την λύση θα επιχειρήσουν οι μαθητές μέσα από τα ερωτήματα του φύλλου εργασίας.

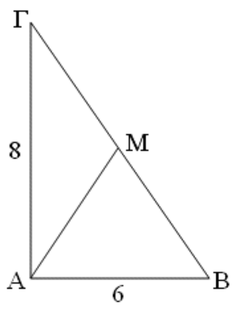
Τα θεωρήματα των διαμέσων.

Φύλλο εργασίας

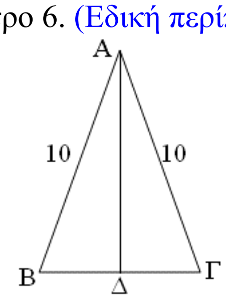
Η Γεωμετρία έχει στόχο να βρίσκει τρόπους μέτρησης ευθυγράμμων τμημάτων, κύκλων, εμβαδών κ.λ.π. Έχετε σκεφτεί πως είναι δυνατόν να υπολογίσουμε την διάμεσο ενός τριγώνου όταν είναι γνωστές οι πλευρές;

(Κινητοποίηση, διαπραγμάτευση)

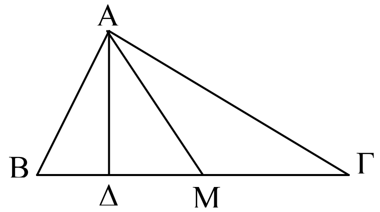
1. Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ. (Ειδική περίπτωση)



2. Στο παρακάτω ισοσκελές τρίγωνο να υπολογίσετε την διάμεσο ΑΔ αν είναι γνωστό ότι η βάση έχει μέτρο 6. (Ειδική περίπτωση)



3. Στα δύο προηγούμενα ερωτήματα ασχοληθήκαμε με ειδικές περιπτώσεις. Θα επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε τώρα την διάμεσο σε ένα τυχόν τρίγωνο.
   Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές α, β, γ και διάμεσο ΑΜ= μ_α ενώ ΑΔ είναι το ύψος του.



α) Να υπολογίσετε το β^2 στο τρίγωνο ΑΜΓ.
β^2=……………………..

β) Να υπολογίσετε το γ^2 στο τρίγωνο ΑΜΒ.
γ^2=……………………..

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα.
β^2+γ^2=…………………….
Να διατυπώσετε σε μία πρόταση την σχέση που προέκυψε και στην συνέχεια να υπολογίσετε την διάμεσο μ_α από τις πλευρές α, β, γ του τριγώνου. (Διαπραγμάτευση, διατύπωση, τυποποίηση)

4. Να υπολογίσετε την διαφορά.
   β^2- γ^2=……………………

Να διατυπώσετε σε μία πρόταση την σχέση που προέκυψε. (Διαπραγμάτευση, διατύπωση, τυποποίηση)

5. Να υπολογίσετε την διάμεσο μ_α με βάση τις πλευρές α, β, γ του τριγώνου.

Εφαρμογές:

- Να υπολογίσετε την πλευρά ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ όταν ΑΒ=6, ΑΓ=10 και η διάμεσος ΑΜ είναι ίση με 6.

- Κάνοντας χρήση των συμπερασμάτων της τρίτης ερώτησης να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος προς την υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Ανάλυση της δραστηριότητας

Ο γενικός στόχος της δραστηριότητας δεν είναι μόνο η διδασκαλία της συγκεκριμένης σχέσης μεταξύ των πλευρών και της διαμέσου ενός τριγώνου, αλλά και η κατανόηση από την μεριά των μαθητών ότι κάθε απόδειξη διαθέτει μία δομή η οποία έχει ως βάση τις προηγούμενες γνώσεις τους.
Το κείμενο που βρίσκεται στην αρχή του φύλλου εργασίας έχει στόχο αφενός να βάλλει τους μαθητές μέσα στο πλαίσιο του προβλήματος, που πρόκειται να μελετήσουν, ενώ συγχρόνως να δημιουργήσει κινητοποίηση.

1. Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές θα ανακαλέσουν μία πρόταση που αφορά στα ορθογώνια τρίγωνα και σύμφωνα με την οποία η διάμεσος είναι ίση με

το μισό της υποτείνουσας. Προφανώς θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουν την υποτείνουσα με την βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος.

2. Στο δεύτερο ερώτημα οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν την ιδιότητα του ισοσκελούς τριγώνου κατά την οποία η διάμεσος προς την βάση του είναι και ύψος. Οι μαθητές θα πρέπει και πάλι να εφαρμόσουν το Πυθαγόρειο θεώρημα σε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα 10 και μία κάθετη ίση με 3. Εδώ ο στόχος και των δύο ερωτήσεων είναι να διατυπώσουν οι μαθητές το συμπέρασμα ότι σε μερικές ειδικές περιπτώσεις ο υπολογισμός της διαμέσου μπορεί να γίνει μέσα από την χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος. Συγχρόνως ο διδάσκων τους επισημαίνει ότι είναι πλέον ανάγκη να λύσουν το πρόβλημα του υπολογισμού της διαμέσου με ένα γενικό τρόπο.

3. Στο τρίτο ερώτημα οι μαθητές οδηγούνται σταδιακά με κατάλληλα ερωτήματα στην κατασκευή ενός τύπου που συνδέει τις πλευρές του τριγώνου με την διάμεσο. Στην ουσία οι μαθητές υλοποιούν και μία απόδειξη του θεωρήματος των διαμέσων καθώς χρησιμοποιούν τις προηγούμενες γνώσεις τους (γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος).
Στο α) υποερώτημα οι μαθητές θα υπολογίσουν το τετράγωνο της πλευράς β δηλαδή $β^2=ΑΜ^2+ΜΓ^2+2ΜΓ.ΑΔ$ που προκύπτει από την εφαρμογή του γενικευμένου Πυθαγορείου θεωρήματος στο αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΜΓ.
Στο β) υποερώτημα οι μαθητές θα εργαστούν όμοια στο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΜΒ και θα γράψουν $γ^2=ΑΜ^2+ΜΒ^2-2ΜΒ.ΑΔ$
Στο γ) υποερώτημα οι μαθητές αναμένεται να καταλήξουν στην έκφραση $β^2+γ^2=2μ_α^2+α^2/2$. Τώρα το σημαντικό είναι να διατυπώσουν, σε αυστηρά μαθηματική ορολογία, την σχέση αυτή, δηλαδή «Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι ίσο με διπλάσιο τετράγωνο της μεταξύ τους διαμέσου συν το μισό τετράγωνο της τρίτης πλευράς.»

4. Στην τέταρτη ερώτηση οι μαθητές αφαιρώντας τα δύο τετράγωνα των πλευρών θα φτάσουν στην έκφραση του δεύτερου θεωρήματος των διαμέσων $β^2-γ^2=2α.ΜΔ$ και θα διατυπώσουν την αντίστοιχη πρόταση.

5. Στο πέμπτο ερώτημα ο διδάσκων διαπραγματεύεται με τους μαθητές τρόπους υπολογισμού της διαμέσου με την βοήθεια των νέων σχέσεων τις οποίες έχουν κατασκευάσει. Απευθύνει στους μαθητές ερωτήσεις της μορφής: «Πως μπορούμε να λύσουμε το αρχικό πρόβλημα με τις νέες μαθηματικές σχέσεις που έχουν προκύψει;»
Οι μαθητές αναμένεται να επιλύσουν τον τύπο που αντιστοιχεί στο 1ο θεώρημα των διαμέσων ως προς την διάμεσο και να καταλήξουν ότι τελικά $\mu_\alpha{}^2 = \dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$. Εδώ είναι χρήσιμο να ζητήσει ο διδάσκων από τους μαθητές να κατασκευάσουν τους τύπους των δύο άλλων διαμέσων με βάση τον τύπο που μόλις έχουν κατασκευάσει με κυκλική εναλλαγή των συμβόλων.

Οι εφαρμογές έχουν και πάλι στόχο να γίνει το πρώτο θεώρημα των διαμέσων εργαλείο υπολογισμού πλευρών ή διαμέσου τριγώνου. Ιδιαίτερα η δεύτερη εφαρμογή θα επιτρέψει στους μαθητές να αποδείξουν μία πρόταση της γεωμετρίας με νέο τρόπο κάνοντας χρήση τόσο του τύπου που υπολογίζει την διάμεσο όσο και του Πυθαγορείου θεωρήματος. Συγκεκριμένα οι μαθητές θα κάνουν χρήση του τύπου $\mu_\alpha{}^2 = \dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$ τον οποίο θα μετασχηματίσουν σε $\mu_\alpha{}^2 = \dfrac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{4}$

Και κάνοντας χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος θα γράψουν

$\mu_\alpha{}^2 = \dfrac{2\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \dfrac{\alpha^2}{4}$ από όπου θα προκύψει $\mu_\alpha = \dfrac{\alpha}{2}$.