ΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΧΗΜΑ ΣΤΟ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟ: ΚΑΝΟΝΤΑΣ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ «ΤΥΦΛΟΥΣ» Η «ΕΞΕΡΕΥΝΗΤΕΣ»

Αθανάσιος Γαγάτσης
Πανεπιστήμιο Κύπρου
gagatsis@ucy.ac.cy

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο κείμενο αυτό παρουσιάζεται η μελέτη της εννοιολογικής σύλληψης γεωμετρικού σχήματος σε μαθητές Δημοτικής και Μέσης Εκπαίδευσης της Κύπρου, μέσα από τη σύνθεση δύο ερευνητικών εργασιών. Η εξέταση του συγκεκριμένου θέματος πραγματοποιείται με βάση τη θεωρία του Duval (1995), ο οποίος εισηγείται ότι υπάρχουν διαφορετικοί τρόποι για να δούμε και να προσεγγίσουμε ένα γεωμετρικό σχήμα. Οι ερευνητικές αυτές εργασίες πραγματεύονται το ίδιο γενικό θέμα μελέτης, όμως αφορούν σε διαφορετικές ηλικίες μαθητών και σε διαφορετικές εκπαιδευτικές βαθμίδες. Μέσα από τη σύνθεση, λοιπόν, προσεγγίζεται το θέμα της σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος από τις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού μέχρι το τέλος του Λυκείου. Τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών αναδεικνύουν σημαντικές διαστάσεις για τη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος στις διάφορες εκπαιδευτικές βαθμίδες, τονίζουν όμως παράλληλα την αναγκαιότητα μιας πολυδιάστατης μελέτης της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών των μαθηματικών τονίζουν τη σπουδαιότητα της γεωμετρίας τόσο ως αυτόνομου θέματος, όσο και ως μέσου για την ανάπτυξη άλλων μαθηματικών εννοιών (NCTM, 2000). Η μελέτη από τους παιδαγωγούς και η κατανόηση από τους εκπαιδευτικούς του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές οικοδομούν τις γνώσεις τους για τα θέματα που διδάσκονται αποτελούν απαραίτητες προϋποθέσεις για την επίτευξη κατανόησης εκ μέρους των μαθητών στα θέματα αυτά (Battista, 1999). Είναι αποδεκτό ότι οι μαθητές αποκτούν, μέσω των εμπειριών που έχουν κατά τη διδασκαλία θεμάτων γεωμετρίας, ορισμένες γνώσεις οι οποίες αρχικά δεν είναι συνδεδεμένες μεταξύ τους (Hejný, 2002). Εκείνο που δεν έχει διευκρινιστεί μέχρι τώρα είναι με ποιο τρόπο και σε ποιο βαθμό οι ασύνδετες αυτές γνώσεις συνδέονται μετά την πάροδο κάποιων χρόνων διδασκαλίας. Παρόλο που η οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης γενικά, και της γεωμετρικής γνώσης ειδικότερα, θεωρείται σήμερα ένα ιδιαίτερα σημαντικό θέμα, εντούτοις απουσιάζουν τα μοντέλα εκείνα που περιγράφουν τη δόμηση των γεωμετρικών γνώσεων και ικανοτήτων των μαθητών, όπως αυτές αποκτώνται μέσα από τη διαδικασία της διδασκαλίας (Gray, Pinto, Pitta, & Tall, 1999).

Στόχος, λοιπόν, του κειμένου αυτού είναι να συντεθούν τα αποτελέσματα από δύο έρευνες που εξετάζουν τον τρόπο με τον οποίο τα γεωμετρικά σχήματα χρησιμοποιούνται στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων, μέσω της μελέτης σε εύρος ηλικιών μαθητών, από το Δημοτικό μέχρι και το Λύκειο. Οι έρευνες αυτές βασίζονται στο θεωρητικό πλαίσιο του Γάλλου ερευνητή Raymond Duval, ο οποίος για την εννοιολογική σύλληψη των γεωμετρικών σχημάτων διακρίνει τέσσερις διαφορετικούς τρόπους με τους οποίους βλέπουμε και χρησιμοποιούμε τα σχήματα κατά την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων. Στην πρώτη έρευνα (Deliyianni, Elia, Gagatsis, Monoyiou & Panaoura, 2010) εξετάστηκε η σύλληψη γεωμετρικού σχήματος σε μαθητές Δημοτικού και Γυμνασίου, με βάση τις τρεις από τις τέσσερις διαστάσεις που προτείνονται, ενώ στη δεύτερη έρευνα (Michael, 2013) μελετήθηκε και η τέταρτη διάσταση, με τη συμμετοχή μαθητών από το Γυμνάσιο και το Λύκειο. Στο κείμενο παρουσιάζεται ένα μέρος των αποτελεσμάτων που έχουν προκύψει από κάθε έρευνα και συζητείται η θεωρητική και πρακτική χρησιμότητα των αποτελεσμάτων αυτών για τη μάθηση της γεωμετρίας.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Σύμφωνα με τον Fischbein (1993), όλα τα γεωμετρικά σχήματα αναπαριστούν νοερές κατασκευές, οι οποίες κατέχουν ταυτοχρόνως εννοιολογικές και σχηματικές ιδιότητες. Ένα γεωμετρικό τρίγωνο αποτελεί ένα σχήμα, μια αναπαράσταση στο χώρο και μια έννοια. Συνεπώς, αποτελεί αυτό που ο Fischbein (1993) ονομάζει εννοιολογικό σχήμα. Σε ένα εννοιολογικό σχήμα το νόημα και οι επιτρεπόμενοι μετασχηματισμοί υπαγορεύονται ολοκληρωτικά από τυπικούς περιορισμούς (ορισμούς, αξιώματα, θεωρήματα). Όταν τα σχήματα και οι έννοιες εναρμονίζονται τέλεια σε εννοιολογικό σχήμα, τότε φτάνουμε στο ψηλότερο σημείο του γεωμετρικού συλλογισμού (Fischbein & Nachlielli,1998). Τα σχήματα ενισχύουν τη γεωμετρική διαίσθηση κάνοντας αντιληπτό το σύμπλεγμα σχέσεων του οπτικού αντικειμένου (Panaoura, Gagatsis, & Lemonides, 2007). Η πολλαπλή ενεργοποίηση σχέσεων δυσκολεύει όμως τη διάκριση δεδομένων και ζητούμενων. Η οπτική ενίσχυση της διαίσθησης μπορεί να είναι τόσο ισχυρή που να αποτελέσει τροχοπέδη στην ανάπτυξη του γεωμετρικού συλλογισμού (Mesquita, 1998).

Η χρησιμότητα του γεωμετρικού σχήματος κατά την ανάλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος θεωρείται αναμφισβήτητη, αφού παρέχει μια διαισθητική παρουσίαση των συνιστωσών και σχέσεων σε μια γεωμετρική κατάσταση (Duval, 1995). Παρόλα αυτά, συχνά οι μαθητές παρουσιάζονται να μη βοηθιούνται από το σχήμα, ώστε να κατευθυνθούν προς τη λύση του προβλήματος. Μέσα από τη γνωστική και αντιληπτική προσέγγιση της γεωμετρίας που επιχειρείται από τον Duval (1995) παρουσιάζεται ένα λεπτομερές πλαίσιο ανάλυσης των γεωμετρικών εικόνων, με βάση το οποίο εντοπίζονται τέσσερις τύποι γνωστικής σύλληψης. Το κάθε είδος σύλληψης έχει συγκεκριμένους νόμους οργάνωσης και επεξεργασίας του οπτικού ερεθίσματος.

Συγκεκριμένα, η *αντιληπτική σύλληψη (perceptual apprehension)* σχετίζεται με την αναγνώριση του σχήματος με την πρώτη ματιά. Συνίσταται στην κατανόηση της συνολικής μορφής του σχήματος και στη διάκριση των υποσχημάτων του, με τρόπο όμως που δεν επιτρέπει περαιτέρω επεξεργασία του. Η *ακολουθιακή σύλληψη (sequential apprehension)* απαιτείται κατά την κατασκευή ή την περιγραφή της κατασκευής ενός σχήματος. Η *λεκτική σύλληψη (discursive apprehension* συνδέεται με την αδυναμία προσδιορισμού των μαθηματικών σχέσεων σε ένα σχήμα μόνο από την αντιληπτική σύλληψη, αφού απαιτείται και λεκτική περιγραφή του. Η *λειτουργική σύλληψη (operative apprehension)* μας εξασφαλίζει πρόσβαση στη λύση του προβλήματος, μέσα από διάφορους μετασχηματισμούς που μπορούν να εφαρμοστούν στο σχήμα. Οι διάφορες αυτές λειτουργίες μπορούν να εκτελεστούν είτε νοερά, είτε φυσικά. Συνθέτουν μια συγκεκριμένη επεξεργασία του σχήματος, η οποία του προσδίδει μια χειριστική λειτουργία.

Συγκεκριμένα αναφέρονται από τον Duval τρία είδη τροποποιήσεων ενός γεωμετρικού σχήματος. Οι *μερεολογικές (mereologic) τροποποιήσεις* αφορούν στη διάσπαση του ολόκληρου σχήματος σε διάφορα υποσχήματα, στον συνδυασμό των υποσχημάτων αυτών σε ένα άλλο ενιαίο σχήμα και στην εμφάνιση νέων υποσχημάτων (reconfiguration). Οι *οπτικές (optic)* επιτρέπουν τη σμίκρυνση ή μεγέθυνση του σχήματος ή το να εμφανίζεται λοξό, σαν να γίνεται χρήση φακών. Με τον τρόπο αυτό, τα σχήματα αποκτούν τη δυνατότητα να εμφανίζονται διαφορετικά, χωρίς να έχουν υποστεί οποιαδήποτε αλλαγή. Οι τροποποιήσεις *αλλαγή θέσης (place way)* αλλάζουν τον προσανατολισμό του σχήματος στο επίπεδο της εικόνας.

ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ[1]

Με βάση τα πιο πάνω θεωρητικά στοιχεία, στο μέρος αυτό παρουσιάζεται ο πρακτικός τρόπος εφαρμογής τους μέσα από την επίλυση δύο γεωμετρικών προβλημάτων. Συγκεκριμένα επεξηγείται ο τρόπος με τον οποίο τα διάφορα είδη σύλληψης σχημάτων παρεμβαίνουν διαδικασία επίλυσης των προβλημάτων και με ποια συγκεκριμένα βήματά της σχετίζονται.

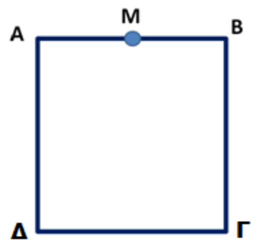
Πρόβλημα 1

Να χωρίσετε το τετράγωνο ΑΒΓΔ σε τρία ισοδύναμα μέρη με βάση το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ.

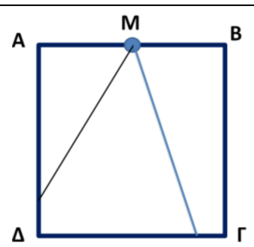
Για να χωριστεί το σχήμα 1 χρειάζεται αρχικά αντιληπτική ικανότητα, ώστε ο μαθητής να μπορεί να σκεφτεί διάφορα υποσχήματα που μπορούν να δημιουργηθούν σε αυτό το τετράγωνο. Συνεπώς ο μαθητής που είναι σε θέση να προσεγγίσει αντιληπτικά το σχήμα θα μπορούσε να δώσει την λύση που φαίνεται στο σχήμα 2. Στη λύση αυτή ο μαθητής χρησιμοποιεί το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ για να χωρίσει

[1] Το μέρος αυτό παρουσιάστηκε από τον Α. Γαγάτση στο Συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρίας (Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας) με τίτλο «5η Διεθνής Μαθηματική Εβδομάδα» (Θεσσαλονίκη, 6-10 Μαρτίου 2013).

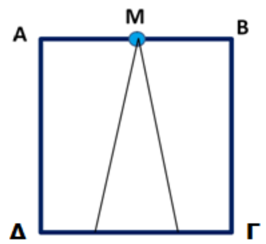
το σχήμα, χωρίς όμως να λαμβάνει υπόψη του ότι το σημείο Μ πρέπει να χρησιμοποιηθεί ώστε να επιτευχθεί ο χωρισμός σε τρία ίσα μέρη και όχι τυχαία. Συνεπώς απαιτείται και κάποιο άλλο είδος σύλληψης του σχήματος, πέρα της αντιληπτικής, ώστε να επιτρέψει στο μαθητή να φέρει τις ορθές βοηθητικές γραμμές, ώστε το σχήμα να χωριστεί με τον κατάλληλο τρόπο. Ειδικότερα, η ικανότητα ενός ατόμου να σκεφτεί ή να σχεδιάσει κάποιες επιπρόσθετες μονάδες σε ένα δοσμένο σχήμα προκύπτει μέσα από την ενεργοποίηση της λειτουργικής σύλληψης. Οπότε ο μαθητής που δε θα περιοριστεί μόνο στην αντιληπτική αναγνώριση, αλλά θα εμπλέξει και τη λειτουργική σύλληψη, θα προσεγγίσει το σχήμα ως ένα ευρετικό εργαλείο και θα είναι σε θέση να κάνει διάφορες αναδιοργανώσεις στο δοσμένο σχήμα και να καταλήξει σε διαχωρισμούς όπως δείχνουν τα σχήματα 3 και 4.



Σχήμα 1

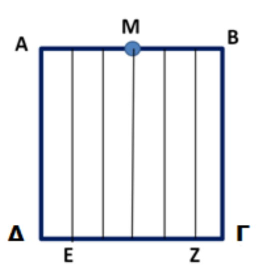


Σχήμα 2

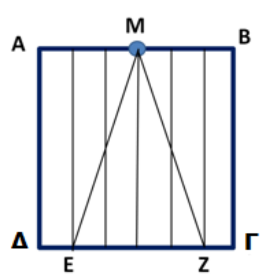


Σχήμα 3

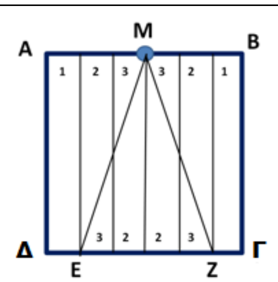
Στο σχήμα 3 ο μαθητής βρίσκει τον τρόπο που θα φέρει δύο ευθείες από το σημείο Μ, ώστε να χωρίσει το σχήμα σε τρία ίσα μέρη. Ακολούθως όμως πρέπει να αποδείξει ότι όντως ο χωρισμός αυτός είναι σωστός. Στην περίπτωση αυτή παρεμβαίνει η λειτουργική σύλληψη του σχήματος, η οποία θα επιτρέψει στο μαθητή να κάνει μια νέα μερεολογική τροποποίηση στο σχήμα, κατά συνέπεια και ένα νέο διαχωρισμό (Σχήμα 4). Με βάση το συνδυασμό των δύο μερεολογικών τροποποιήσεων που πραγματοποιήθηκαν στο σχήμα, ο μαθητής είναι πλέον σε θέση να φτάσει στο διαχωρισμό του, όπως φαίνεται στο σχήμα 5, και ακολούθως να ονομάσει τα ίσα υποσχήματα που δημιουργούνται (Σχήμα 6), ώστε να αποδείξει ότι ο διαχωρισμός του είναι ορθός. Για το σωστό διαχωρισμό εμπλέκεται, επίσης, και η ακολουθιακή σύλληψη του σχήματος, μέσω της οποίας επιτυγχάνεται η ορθή κατασκευή των βοηθητικών γραμμών με βάση τα σωστά σημεία πάνω στο σχήμα



Σχήμα 4



Σχήμα 5

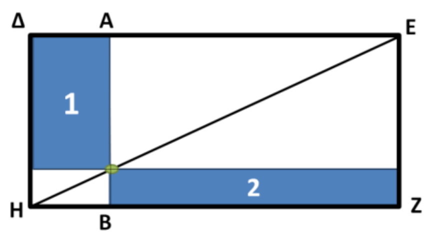


Σχήμα 6

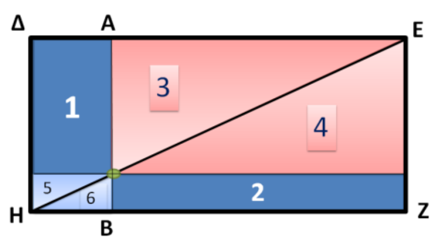
Πρόβλημα 2

Πρόβλημα του Ευκλείδη: Να δείξετε ότι το μέρος 1 είναι ισοδύναμο με το μέρος 2 και είναι ανεξάρτητο από τη θέση του σημείου της διαγωνίου ΕΗ.

Για την επίλυση του προβλήματος αυτού είναι αρχικά απαραίτητη η αναγνώριση των υποσχημάτων που περιλαμβάνονται στο δοσμένο σχήμα 7. Ο μαθητής θα πρέπει να είναι σε θέση να διακρίνει ότι μέσα στο ορθογώνιο ΔΕΖΗ περιλαμβάνονται δύο μεγάλα ορθογώνια τρίγωνα, δύο μικρά ορθογώνια τρίγωνα και δύο ορθογώνια. Η διάκριση των διαφόρων υποσχημάτων επιτυγχάνεται μέσω της εμπλοκής της αντιληπτικής σύλληψης, μέσω της οποίας αναγνωρίζονται τα υποσχήματα αυτά με την πρώτη ματιά στο σχήμα, χωρίς να γίνει περαιτέρω επεξεργασία του. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 8, η επίλυση του προβλήματος απαιτεί την αφαίρεση ίσων σχημάτων από τα τρίγωνα ΔΕΗ και ΕΖΗ. Για να επιτευχθεί ο συλλογισμός αυτός απαιτείται ο εντοπισμός των σχέσεων μεταξύ των διαφόρων υποσχημάτων. Ο λύτης θα πρέπει, δηλαδή, να εντοπίσει την ισότητα μεταξύ των τριγώνων 3 και 4, καθώς και την ισότητα μεταξύ των τριγώνων 5 και 6. Για να γίνει, όμως, εφικτή η συσχέτιση των διαφόρων υποσχημάτων απαιτείται μια αναδιοργάνωση του σχήματος, ώστε να γίνει αντιληπτό στο λύτη πως τα τρίγωνα 3 – 4 και 5 – 6 προκύπτουν από δύο ορθογώνια, τα οποία διχοτομούνται από τη διαγώνιο ΕΗ. Με βάση και πάλι την διαγώνιο ΕΗ, ο λύτης θα πρέπει ακολούθως να κάνει μια νέα αναδιοργάνωση στο δοσμένο σχήμα και να το δει ως ένα ορθογώνιο ΔΕΖΗ το οποίο διχοτομείται από τη διαγώνιο ΕΗ. Συνδυάζοντας αυτούς τους δύο συλλογισμούς, με βάση τις δύο αναδιοργανώσεις στο σχήμα, ο λύτης μπορεί να διακρίνει τελικά ότι από τα δύο ίσα τρίγωνα ΔΕΗ και ΕΖΗ αφαιρούνται ίσα μέρη, οπότε το μέρος που απομένει από κάθε τρίγωνο είναι επίσης ίσο (δηλαδή τα σκιασμένα σχήματα 1 και 2).



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Το είδος σύλληψης, λοιπόν, που επιτρέπει τις πολλαπλές αναδιοργανώσεις στο σχήμα είναι η λειτουργική, η οποία μας παρέχει τη δυνατότητα να εκτελέσουμε διάφορες αναδιαμορφώσεις στο σχήμα, με βάση τα υποσχήματα που το αποτελούν. Επιπλέον, για την επιτυχή επίλυση του προβλήματος αυτού παρεμβαίνει και η λεκτική σύλληψη, μέσα από την οποία θα προκύψει ο εντοπισμός και η χρήση της ιδιότητας της διαγωνίου.

Καταληκτικές παρατηρήσεις

Με βάση τα δύο παραδείγματα προβλημάτων που αναλύθηκαν πιο πάνω καταφαίνεται ότι ο κάθε τύπος σύλληψης των γεωμετρικών σχημάτων καθίσταται σημαντικός για την επίλυση γεωμετρικών έργων. Ο κάθε τύπος σύλληψης συμβάλλει με ξεχωριστό τρόπο, ανάλογα με τα εκάστοτε χαρακτηριστικά του, όμως η αλληλεπίδραση μεταξύ τους είναι αυτή που αποδεικνύεται να είναι τελικά καθοριστική για την επιτυχή έκβαση μιας πορείας λύσης ενός γεωμετρικού προβλήματος.

ΟΙ ΕΡΕΥΝΕΣ

Πρώτη Έρευνα

Η πρώτη έρευνα αποτέλεσε μέρος μιας ευρύτερης ερευνητικής προσπάθειας, στα πλαίσια ερευνητικού προγράμματος μεσαίου μεγέθους του Πανεπιστημίου Κύπρου MED19 με τίτλο «The functioning of representations in mathematics education with respect to the shift from elementary to secondary education». Βασικός στόχος του προγράμματος ήταν η αποσαφήνιση ορισμένων δυσκολιών των μαθητών σε σχέση με τα μαθηματικά κατά τη μετάβαση τους από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Ειδικότερα, η μελέτη αυτή πραγματοποιήθηκε στα κλάσματα, στους δεκαδικούς αριθμούς και στη γεωμετρία. Το δείγμα της πρώτης έρευνας αποτέλεσαν 1086 μαθητές σχολείων της Κύπρου: 250 μαθητές Ε΄ Δημοτικού, 278 μαθητές Στ΄ Δημοτικού, 230 μαθητές Α΄ Γυμνασίου και 328 μαθητές Β΄ Γυμνασίου. Για τη συλλογή των δεδομένων κατασκευάστηκε δοκίμιο με έργα γεωμετρίας, χωρισμένα σε τρεις ομάδες, με βάση τα τρία από τα τέσσερα είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος (βλ. Παράρτημα 1). Η πρώτη ομάδα περιλάμβανε έργα αντιληπτικής σύλληψης που εξετάζουν την ικανότητα των μαθητών να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν γεωμετρικά σχήματα (Pe). Η δεύτερη ομάδα περιλάμβανε έργα που αφορούν στη λειτουργική σύλληψη του σχήματος των μαθητών, με βάση τα τρία είδη τροποποιήσεων των σχημάτων (Op). Η τρίτη ομάδα περιείχε λεκτικά προβλήματα για την εξέταση της λεκτικής σύλληψης (Ve). Στο δοκίμιο δεν εντάχθηκαν έργα ακολουθιακής σύλληψης, λόγω της περιορισμένης έμφασης που δίνεται σε δεξιότητες κατασκευής στο κυπριακό αναλυτικό πρόγραμμα πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Ο πίνακας 1 παρουσιάζει το ποσοστά επιτυχίας των μαθητών στα έργα του δοκιμίου. Με βάση τα ποσοστά αυτά προκύπτει ότι η επίδοση των μαθητών Γυμνασίου είναι ψηλότερη από την επίδοση των μαθητών Δημοτικού, για την πλειοψηφία των έργων της έρευνας. Παρόλα αυτά παρατηρείται διαφοροποίηση των επιδόσεων αυτών σε δύο έργα λεκτικής σύλληψης. Συγκεκριμένα στο έργο Ve10 οι επιδόσεις των δύο ομάδων μαθητών βρίσκονται σχεδόν στο ίδιο επίπεδο. Ένα σύνηθες λάθος κατά την επίλυση του συγκεκριμένου έργου ήταν ότι $4 \div ½ = 2$. Συνεπώς, το γεγονός ότι η επίδοση των μαθητών Γυμνασίου στο έργο αυτό δεν είναι ψηλότερη από τους μαθητές Δημοτικού, όπως και στα υπόλοιπα έργα, ενδέχεται να οφείλεται στην τάση των μαθητών να χειρίζονται τους κλασματικούς αριθμούς με τον ίδιο τρόπο που χειρίζονται και τους φυσικούς αριθμούς, λόγω της επίδρασης του επιστημολογικού εμποδίου σχετικά με την κατανόηση των ρητών αριθμών. Αυτό γίνεται εμφανές και στο έργο Ve11, στο οποίο οι μαθητές Δημοτικού έχουν καλύτερες επιδόσεις από τους μαθητές του Γυμνασίου. Στο έργο αυτό μια τυπική λανθασμένη απάντηση ήταν ότι 0,3 x 0,2 = 0,6 γεγονός που πιθανότατα προκύπτει από την επιρροή του ίδιου επιστημολογικού εμποδίου στην κατανόηση των μαθητών.

Πίνακας 1

Ποσοστά Επιτυχίας των Μαθητών στα Έργα του Δοκιμίου ανά Εκπαιδευτική Βαθμίδα

	Δημοτικό (%)	Γυμνάσιο (%)
Pe1a	42	65
Pe1b	42	65
Pe1c	41	63
Pe1d	40	63
Pe1e	56	77
Pe1f	57	78
Pe1g	34	49
Pe2a	83	88
Pe2b	85	86
Pe2c	43	59
Pe2d	12	29
Pe2e	75	82
Pe2f	73	86
Op3	50	62
Op4	29	47
Op5	17	38
Op6a	37	51
Op6b	38	54
Op6c	18	31
Ve7	30	53
Ve8	45	73
Ve9	5	15
Ve10	38	37

Ve11	30	23

Για τη διερεύνηση της δομής της σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων πραγματοποιήθηκε η επιβεβαιωτική παραγοντική ανάλυση, με τη χρήση του προγράμματος EQS (Bentler, 1995). Το Διάγραμμα 1 παρουσιάζει το μοντέλο δόμησης της σύλληψης γεωμετρικών σχημάτων., το οποίο είχε την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα της έρευνας για το σύνολο των μαθητών [X^2 (220)=436.86, CFI=0.99, RMSEA=0.03 με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA: 0.026-0.034]. Το μοντέλο περιλαμβάνει έξι παράγοντες πρώτης τάξης, τρεις παράγοντες δεύτερης τάξης και ένα παράγοντα τρίτης τάξης. Οι τρεις παράγοντες δεύτερης τάξης, οι οποίοι αναφέρονται στην αντιληπτική (PEA), στη λειτουργική (OPA) και στη λεκτική σύλληψη του σχήματος (DIA), αποτελούν συνιστώσες του παράγοντα τρίτης τάξης, ο οποίος αναφέρεται στη σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος (GFU). Ο κάθε παράγοντας δεύτερης τάξης συνίσταται από δύο παράγοντες πρώτης τάξης. Συγκεκριμένα ο παράγοντας αντιληπτική σύλληψη (PEA) συνίσταται από αντιληπτικά έργα (F1) και έργα αναγνώρισης (F2). Ο παράγοντας λειτουργική σύλληψη (OPA) συνίσταται από έργα που απαιτούν αναδιοργάνωση του σχήματος (F3) και έργα που απαιτούν αλλαγή στη θέση και τον προσανατολισμό σχημάτων (F4). Επιπλέον, ο παράγοντας αυτός εμφανίζει την υψηλότερη φόρτιση στον παράγοντα τρίτης τάξης. Ο τρίτος παράγοντας δεύτερης τάξης (DIA) συνίσταται από λεκτικά προβλήματα που απαιτούν αυξημένη αντιληπτική ικανότητα των γεωμετρικών σχέσεων και βασικό γεωμετρικό συλλογισμό (F5), καθώς και λεκτικά προβλήματα περιμέτρου ή εμβαδού (F6). Η εξέταση πολλαπλών ομάδων έδειξε, ακόμη, ότι η συγκεκριμένη δομή παραμένει η ίδια για τους μαθητές του δημοτικού και του γυμνασίου [$x^2(485) = 903.78$, CFI= 0.97, RMSEA= 0.04, με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA = 0.036, 0.044].

Δεύτερη Ερεύνα

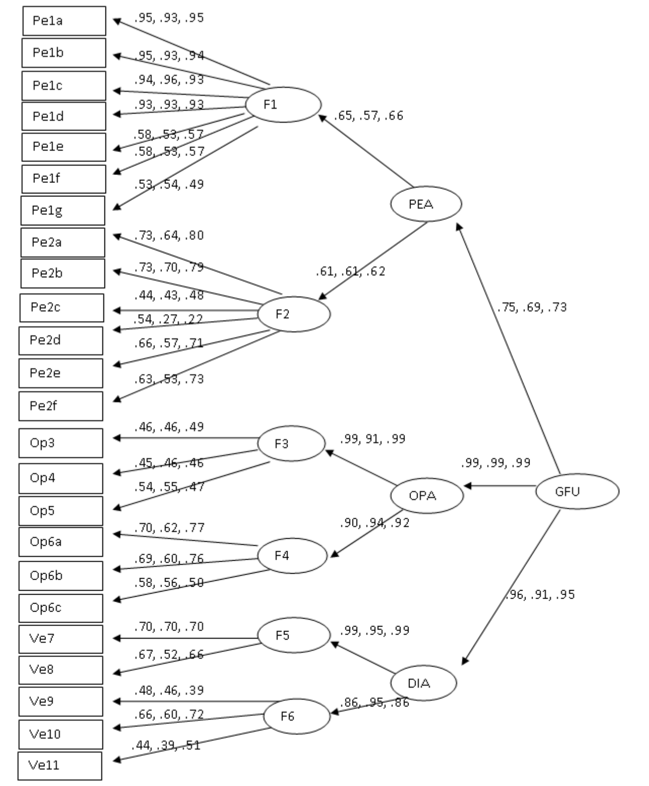
Η δεύτερη έρευνα προέρχεται επίσης από μια ευρύτερη ερευνητική προσπάθεια, η οποία πραγματοποιήθηκε στα πλαίσια ερευνητικού προγράμματος του Ιδρύματος Προώθησης Έρευνας με τίτλο «Ικανότητα χρήσης πολλαπλών αναπαραστάσεων συναρτήσεων και γεωμετρίας: η μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο» και αποτέλεσε ταυτόχρονα το θέμα της διδακτορικής διατριβής της Δρ. Παρασκευής Μιχαήλ (Michael, 2013). Συνεπώς, σκοπός της έρευνας αυτής ήταν ο εντοπισμός ορισμένων δυσκολιών που προκαλούνται στους μαθητές κατά τη μετάβαση τους από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Η μελέτη των δυσκολιών και προβλημάτων αυτών προσανατολίζεται στη Γεωμετρία και στις Συναρτήσεις, με έμφαση στη χρήση των αναπαραστάσεων στις έννοιες αυτές.

Η δεύτερη έρευνα αποτέλεσε ουσιαστικά μια συνέχεια της πρώτης έρευνας που αναφέρθηκε προηγουμένως. Στη έρευνα μελετήθηκε και η ακολουθιακή σύλληψη, λόγω του πραγματοποιήθηκε με τη συμμετοχή μεγαλύτερων μαθητών από το

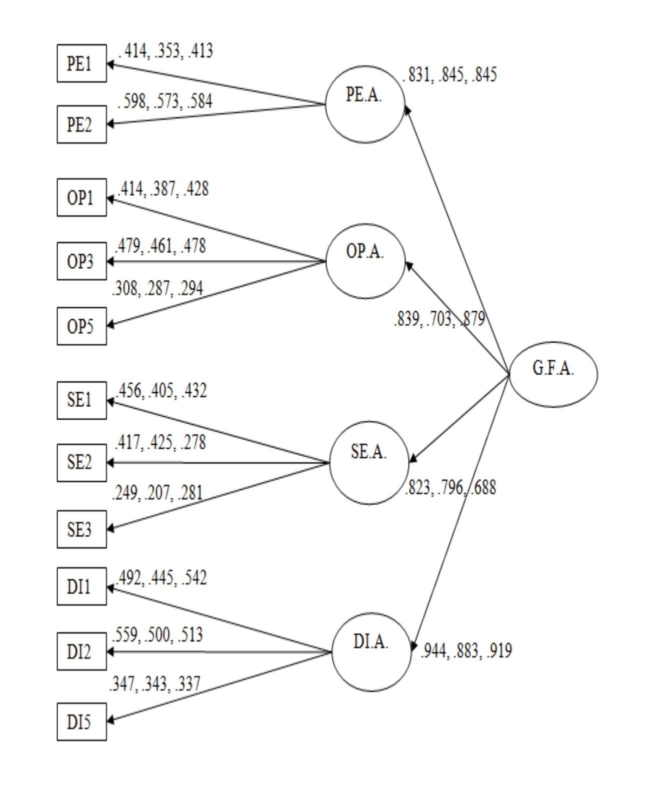
Γυμνάσιο, αλλά και το Λύκειο, οι οποίοι έχουν επαφή με έργα γεωμετρικών κατασκευών κατά τη διδασκαλία τους. Το δείγμα αποτέλεσαν 881 μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου στην Κύπρο. Συγκεκριμένα συμμετείχαν 312 μαθητές Γ΄ Γυμνασίου, 304 μαθητές Α΄ Λυκείου, 125 μαθητές Β΄ Λυκείου – κοινού κορμού και 140 μαθητές Β΄ Λυκείου – μαθηματικά κατεύθυνσης. Η κατασκευή του δοκιμίου στηρίχθηκε και στα τέσσερα διαφορετικά είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Για να ανταποκρίνεται το δοκίμιο στην ύλη την οποία διδάσκονται οι μαθητές που συμμετείχαν, προηγήθηκε η εξέταση της σχετικής διδακτέας ύλης. Επιπλέον, έγινε η ανάλυση των αντίστοιχων σχολικών εγχειριδίων (Michael, Gagatsis, Deliyianni, Monoyiou, & Philippou, 2009) στην οποία εντοπίστηκαν, στα παραδείγματα και στα έργα που περιλαμβάνονται σε αυτά, τα διάφορα είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος. Έτσι, αναπτύχθηκε ένα δοκίμιο το οποίο περιλαμβάνει τέσσερις ομάδες έργων (βλ. Παράρτημα 2), οι οποίες αντιστοιχούν στα τέσσερα είδη σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος.

Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει έργα που εξετάζουν την αντιληπτική σύλληψη ενός γεωμετρικού σχήματος (PE1, PE2). Έργα δηλαδή που εξετάζουν την ικανότητα των μαθητών να εντοπίζουν, να αναγνωρίζουν και να ονομάζουν σχήματα σε ένα σύνθετο σχήμα. Η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει έργα που εξετάζουν τη λειτουργική σύλληψη ενός γεωμετρικού σχήματος (OP1, OP2, OP3, OP4, OP5). Συγκεκριμένα τα έργα αυτά απαιτούν κυρίως την αναδιοργάνωση ενός σχήματος (μερεολογική τροποποίηση) για να λυθούν. Η τρίτη ομάδα συνίσταται από έργα που εξετάζουν την ακολουθιακή σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος (SE1, SE2, SE3). Τα έργα αυτά αφορούν στην κατασκευή σχημάτων και στην περιγραφή της διαδικασίας που ακολουθήθηκε. Η τέταρτη ομάδα έργων περιλαμβάνει έργα γεωμετρικής απόδειξης που μελετούν τη λεκτική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος από τους μαθητές. Σε αυτή την ομάδα υπάρχουν έργα που εξετάζουν τόσο την ικανότητα των μαθητών για παραγωγή μιας απόδειξης (DI1, DI2, DI5 και DI6), αλλά και την ικανότητα τους στην αναγνώριση μιας τυπικής απόδειξης (DI3 και DI4).

Στο μέρος αυτό παρουσιάζονται μόνο τα αποτελέσματα της επιβεβαιωτικής παραγοντικής ανάλυσης. Το Διάγραμμα 2 παρουσιάζει το μοντέλο δόμησης της σύλληψης των γεωμετρικών σχημάτων, το οποίο είχε την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα της έρευνας για το σύνολο των μαθητών [$X^2(83)= 119.505$, CFI=0.940, RMSEA=0.031με 90% διάστημα εμπιστοσύνης για το RMSEA: 0.018 – 0.043]. Στο μοντέλο περιλαμβάνονται τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης και ένας παράγοντας δεύτερης τάξης. Οι τέσσερις παράγοντες πρώτης τάξης, οι οποίοι αντιστοιχούν στην αντιληπτική (PE.A.), στη λειτουργική (OP.A.), στην ακολουθιακή (SE.A.) και στη λεκτική σύλληψη του σχήματος (DI.A.), αποτελούν συνιστώσες του παράγοντα δεύτερης τάξης, ο οποίος αναφέρεται στη σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος (G.F.A.). Όπως και στην πρώτη έρευνα, η δομή της σύλληψης γεωμετρικού σχήματος παραμένει αναλλοίωτη για τους μαθητές των δυο εκπαιδευτικών βαθμίδων [x^2 (83) = 119.505, CFI= 0.940, RMSEA= 0.31]. Οι φορτίσεις των παραγόντων δεύτερης τάξης στον παράγοντα πρώτης τάξης εμφανίζονται αρκετά υψηλές, τόσο για το σύνολο των μαθητών, όσο και για τους μαθητές της κάθε βαθμίδας ξεχωριστά. Παρόλα αυτά, οι υψηλότερες φορτίσεις προκύπτουν για τους παράγοντες δεύτερης τάξης που αφορούν στη λεκτική και τη λειτουργική σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος αντίστοιχα.



Διάγραμμα 1. Μοντέλο δόμησης της σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος της 1ης έρευνας[2]



Διάγραμμα 2. Μοντέλο δόμησης της σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος της 2ης έρευνας[3]

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η σύνθεση των αποτελεσμάτων των δύο ερευνητικών εργασιών έγινε με σκοπό την ανάδειξη των διαφόρων συνιστωσών που συνθέτουν τη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος, όπως προτείνεται από τον Duval (1995, 1999). Μέσα από την εξέταση του θέματος σε μαθητές διαφορετικών ηλικιών και εκπαιδευτικών βαθμίδων, προέκυψαν αποτελέσματα που επιβεβαιώνουν εμπειρικά τη διάκριση των συνιστωσών αυτών.

Με βάση τα αποτελέσματα της πρώτης έρευνας (Deliyianni et al., 2009), επιβεβαιώθηκε ότι η αντιληπτική, η λειτουργική και η λεκτική σύλληψη συνθέτουν τη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος των μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου. Στη δεύτερη έρευνα (Michael, 2013), στην οποία μελετήθηκε και η ακολουθιακή σύλληψη του γεωμετρικού σχήματος, το μοντέλο που επιβεβαιώθηκε δείχνει ότι οι

[2]Οι τρεις αριθμοί δηλώνουν τις φορτίσεις για το συνολικό δείγμα, το Δημοτικό και το Γυμνάσιο, αντίστοιχα.

[3]Οι τρεις αριθμοί δηλώνουν τις φορτίσεις για το συνολικό δείγμα, το Γυμνάσιο και το Λύκειο, αντίστοιχα.

τέσσερις τύποι σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος αποτελούν συνιστώσες της σύλληψης γεωμετρικού σχήματος των μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου. Τα ευρήματα αυτά ενισχύουν το γεγονός ότι η επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων απαιτεί πολύ συχνά αλληλεπιδράσεις μεταξύ των τεσσάρων τύπων σύλληψης, αλλά και η διάκριση μεταξύ του κρίνεται επίσης αναγκαία (Duval, 1988).

Η δομή των μοντέλων που πρόεκυψαν, τόσο από την πρώτη, όσο και από τη δεύτερη έρευνα, φάνηκε να διατηρείται αναλλοίωτη σε κάθε διαφορετική βαθμίδα που εξετάστηκε. Το αποτέλεσμα αυτό καταδεικνύει ότι ένα χαρακτηριστικό της ανάπτυξης της γεωμετρικής σκέψης από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και από το Γυμνάσιο στο Λύκειο είναι η δημιουργία «αναλλοίωτων εννοιών». Ως «αναλλοίωτο» ορίζεται το σύνολο των έργων για τα οποία ισχύει ότι οι μεταξύ τους σχέσεις παραμένουν ίδιες στους μαθητές διαφορετικών ηλικιών (Panaoura & Gagatsis, 2008).

Τα αποτελέσματα φανερώνουν, επίσης, ότι η λειτουργική σύλληψη είναι εκείνη που συμβάλει περισσότερο στη σύλληψη γεωμετρικού σχήματος για τους μαθητές Δημοτικού και Γυμνασίου. Λαμβάνοντας υπόψη ότι η οπτικοποίηση αποτελείται μόνο από τη λειτουργική σύλληψη (Duval, 1995), ο σημαντικός ρόλος αυτού του είδους σύλληψης επιβεβαιώνεται εμπειρικά πως δεν υπάρχει εννοιολογική σύλληψη στη Γεωμετρία χωρίς οπτικοποίηση (Duval, 1999). Επιπρόσθετα, πέρα από τη λειτουργική σύλληψη, από το μοντέλο για τους μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου προκύπτει ότι και η λεκτική σύλληψη είναι καθοριστική στο επίπεδο αυτό για τη γεωμετρική σκέψη των μαθητών. Συνεπώς, τα ευρήματα από τις δύο έρευνες δείχνουν ότι η οπτικοποίηση διαδραματίζει πολύ σημαντικό ρόλο για την επίλυση γεωμετρικών έργων, ειδικότερα σε χαμηλότερες εκπαιδευτικές βαθμίδες, ενώ καθώς οι μαθητές μετακινούνται σε μια υψηλότερη εκπαιδευτική βαθμίδα, φαίνεται επίσης να βασίζονται πολύ στη χρήση μαθηματικών ιδιοτήτων και σε αποδεικτικές διαδικασίες. Η σημασία της λειτουργικής και λεκτικής σύλληψης τονίστηκε και από τον Duval (1995), αφού η λειτουργική σύλληψη προσδίδει την ευρετική λειτουργία των σχημάτων, ενώ η λεκτική σύλληψη αντιστοιχεί στη θεώρηση του σχήματος μέσα από τις δοσμένες ιδιότητες προκειμένου να συμπεράνουμε νέες ιδιότητες. Αυτό όμως είναι κάτι που προϋποθέτει πάντα μια αναδιοργάνωση του δοσμένου σχήματος.

Η περαιτέρω ανάλυση των αποτελεσμάτων της δεύτερης έρευνας έχει καταδείξει επιπλέον ότι το ίδιο δοσμένο σχήμα σε ένα γεωμετρικό έργο μπορεί να προσεγγιστεί με διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με τον τύπο σύλληψης που ενεργοποιείται. Στην ενεργοποίηση των διαφόρων τύπων σύλληψης παρεμβαίνουν όμως και άλλοι παράγοντες, όπως διάφορες διδακτικές μεταβλητές (Michael-Chrysanthou, in press). Μια μεταβλητή που παρουσιάστηκε, μέσα από την πρώτη έρευνα, είναι η επίδραση του επιστημολογικού εμπόδιο στην κατανόηση των ρητών αριθμών, η οποία φάνηκε να επηρεάζει τις επιδόσεις των μαθητών. Τα αποτελέσματα αυτά ενισχύουν τα ευρήματα των Gagatsis, Deliyianni, Elia, Monoyiou και Panaoura (2009), κατά τα οποία οι επιδόσεις των μαθητών σε έργα κλασματικών και δεκαδικών αριθμών κυρίως μειώνονται ή σταθεροποιούνται κατά τη μετάβαση των μαθητών από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο.

Καταλήγοντας, από τη σύνθεση των δύο ερευνών φαίνεται ότι η σύλληψη των γεωμετρικών σχημάτων δεν αποτελεί μοναδιαία οντότητα. Οπότε πρέπει να δίνεται έμφαση σε όλες τις διαστάσεις της σύλληψης γεωμετρικού σχήματος κατά τη διδασκαλία και μάθηση της Γεωμετρίας. Τα αποτελέσματα των ερευνών αυτών παρέχουν αρκετές πληροφορίες για το σχεδιασμό αναλυτικών προγραμμάτων, αλλά και για τους εκπαιδευτικούς, από το Δημοτικό μέχρι το Λύκειο. Τα μοντέλα που διαμορφώθηκαν προσφέρουν στους εκπαιδευτικούς ένα πλαίσιο για τους συλλογισμούς των μαθητών, καθώς επιλύουν ένα ευρύ φάσμα από γεωμετρικά έργα, εντός και μεταξύ των διαφόρων εκπαιδευτικών επιπέδων. Ως εκ τούτου, το προτεινόμενο πλαίσιο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ένα εργαλείο για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας και για το σχεδιασμό γεωμετρικών έργων, από το Δημοτικό μέχρι το Λύκειο.

Πρέπει, συνεπώς, να λαμβάνεται υπόψη το γεγονός ότι ακόμη και αν απαιτείται συντονισμός μεταξύ κάθε τύπου σύλληψης του γεωμετρικού σχήματος, κάθε ένας είναι διακριτός από τους υπόλοιπους (Duval, 1999). Η ενεργοποίηση των κατάλληλων τύπων σύλληψης και ο συνδυασμός τους είναι αυτά που θα φέρουν τους μαθητές σε θέση να προσεγγίζουν και να βλέπουν τα γεωμετρικά σχήματα με ευελιξία, ώστε να γίνουν «εξερευνητές» σε γεωμετρικές προκλήσεις. Αντιθέτως, στην περίπτωση που οι μαθητές δεν επιτυγχάνουν αυτή την πολλαπλή ενεργοποίηση και την ευρετική προσέγγιση, παραμένουν «τυφλοί» και ανίκανοι να εντοπίσουν σχέσεις και τροποποιήσεις που θα τους ανοίξουν το δρόμο για την επίλυση των γεωμετρικών προβλημάτων.

ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Battista, M. T. (1999). The importance of spatial structuring in geometric reasoning. *Teaching Children Mathematics, 6*(3), 170-177.

Bentler, M. P. (1995). *EQS Structural equations program manual*. Encino, CA: Multivariate Software Inc.

Deliyianni, E., Elia, I., Gagatsis, A., Monoyiou, A., & Panaoura, A. (2010). A theoretical model of students’ geometrical figure understanding. *Proceedings of the 6th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 5, Geometrical Thinking* (pp.696-705), Lyon, France: ERME.

Demetriou, A. (2004). Mind, intelligence, and development: A general cognitive, differential, and developmental theory of the mind. In A. Demetriou & A. Raftopoulos (Eds.), *Developmental change: Theories, models and measurement* (pp. 21-73). Cambridge: Cambridge University Press.

Duval, R. (1999). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for learning.* Retrieved from ERIC ED 466 379.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142- 157). Berlin: Springer-Verlag.

Duval, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *1*, 57 – 74.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162.

Gagatsis, A., Deliyianni, E., Elia, I., Monoyiou, A., & Panaoura, A. (2009). *Experimental Didactics of Mathematics: Concepts-Methods-Researches*. Nicosia: University of Cyprus, School of Social Sciences and Sciences of Education (in Greek).

Gray, E., Pinto, M., Pitta, D., & Tall, D. (1999). Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *38*, 111-133.

Hejný, M. (2002). Creating mathematical structure. In J. Novotná (Ed.), *Proceedings of CERME 2* (pp. 14-24). Prague, Czech Republic.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of mathematical behavior*, *17*(2), 183-195.

Michael, P. (2013). *Geometrical Figure Apprehension: Cognitive Processes and Structure*. Unpublished thesis.

Michael–Chrysanthou, P., Gagatsis, A. (in press). Ambiguity in the way of looking at a geometrical figure. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – Relime*.

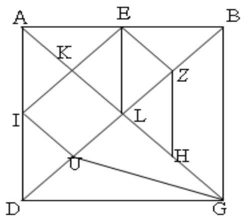
National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Panaoura, G., Gagatsis, A., & Lemonides, C. (2007). Spatial abilities in relation to performance in geometry tasks. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education: Working Group 7, Geometrical Thinking* (pp. 1062-1072). Larnaca, Cyprus: ERME, http://www.cyprusisland.com/cerme.

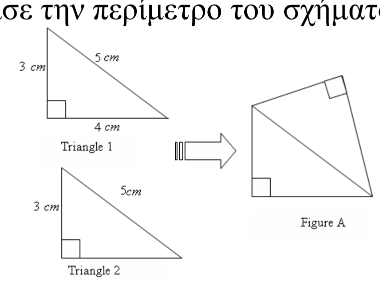
Panaoura, G., & Gagatsis, A. (2008). Spatial abilities in relation to performance in items involving net-representations of geometrical solids. In A. Gagatsis (Ed.), *Research in Mathematics Education* (pp. 101-114). Nicosia: University of Cyprus.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: Πρώτη έρευνα

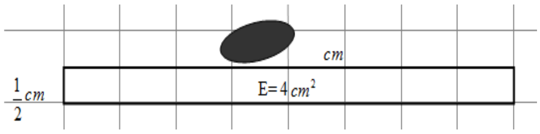
Αναγνωρίστε τα σχήματα: KEZL, IEZU, EZHL, IKGU, LGU, BIL **(Pe2)**



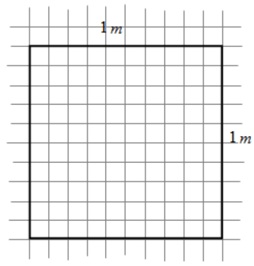
Ο Πέτρος ένωσε το τρίγωνο 1 και το τρίγωνο 2. Υπολόγισε την περίμετρο του σχήματος Α. **(OP6)**.



Η Μαρία προσπαθούσε να εξηγήσει τον τρόπο που υπολόγισε το εμβαδόν του ορθογωνίου. Μόλις έγραψε τα μήκη των πλευρών, το στυλό της έσπασε και το μελάνι κάλυψε το μήκος της μιας πλευράς του σχήματος. Μπορείς να βρεις το μήκος της πλευράς που έχει καλυφθεί; *(Ve10)*



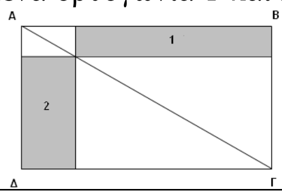
Η νίκη αγόρασε αυτό το τετράγωνο κομμάτι υφάσματος με πλευρά 1μ. Χρειάζεται μόνο ένα μέρος από αυτό με πλευρές 0,2μ and 0,3μ. Τι εμβαδό έχει το κομμάτι που χρειάζεται; *(Ve11)*



ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: Δεύτερη έρευνα

Στην πιο κάτω εικόνα, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. Παρατήρησε τα σκιασμένα ορθογώνια 1 και 2. Βάλε σε κύκλο τη σωστή πρόταση και αιτιολόγησε την απάντησή σου.

α. Το ορθογώνιο 1 έχει μεγαλύτερο εμβαδόν από το ορθογώνιο 2.
β. Το ορθογώνιο 1 έχει ίσο εμβαδόν με το ορθογώνιο 2.
γ. Το ορθογώνιο 1 έχει μικρότερο εμβαδόν από το ορθογώνιο 2. **(OP5)**



Διάβασε τις ακόλουθες εξηγήσεις των τριών μαθητών, οι οποίοι εξηγούν γιατί το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι 180 μοίρες.

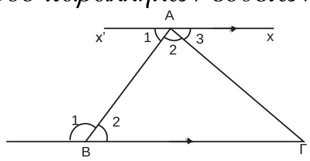
Μαθητής Α: *Μέτρησα και τις τρεις γωνίες και είναι 50°, 53° και 77°. 50°+53°+77°=180°. Άρα, το άθροισμα (των γωνιών ενός τριγώνου) είναι 180°.*

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Α ως απόδειξη; **Ναι/Όχι ....**

Μαθητής Β: *Σχημάτισα ένα τρίγωνο και έκοψα κάθε γωνία και τις έβαλα μαζί. Σχημάτιζαν μια ευθεία γραμμή. Άρα, το άθροισμα τους είναι 180°.*

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Β ως απόδειξη; **Ναι/Όχι ....**

Μαθητής Γ: *Επεξήγηση με τη χρήση δύο παράλληλων ευθειών.*



$$xx' \parallel \mathrm{B\Gamma} \Rightarrow \hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2 \text{ και } \hat{\mathrm{A}}_3 = \hat{\Gamma} \Rightarrow \hat{\mathrm{A}}_1 + \hat{\mathrm{A}}_2 + \hat{\mathrm{A}}_3 = 180^\circ \Rightarrow \hat{\mathrm{B}}_2 + \hat{\mathrm{A}}_2 + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

- Αποδέχεσαι την εξήγηση του μαθητή Γ ως απόδειξη; **Ναι / Όχι** **(DI3)**

Τα σημεία Μ, Ν και Ρ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξεις ότι τα τετράπλευρα ΑΡΜΝ, ΒΜΝΡ, και ΓΝΡΜ είναι παραλληλόγραμμα.**(DI5)**