15/7/2014

“Η εφαρμογή μίας IBL δραστηριότητας σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα με χρήση Geogebra.”

Δ8. ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ ΤΩΝ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΒΟΝΤΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ – Δ201325
ΖΗΣΙΜΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΙΑ - ΑΠΟΣΤΟΛΙΑ –Δ201338
ΚΟΤΤΕΑΚΟΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ – Δ201309
ΧΟΥΤΟΥ ΧΡΥΣΟΥΛΑ – Δ201205

ΠΜΣ «ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

“Η εφαρμογή μίας IBL δραστηριότητας σε ένα ρεαλιστικό πρόβλημα με χρήση Geogebra.”

Δ8. ΕΝΣΩΜΑΤΩΣΗ ΤΩΝ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΒΟΝΤΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ – Δ201325
ΖΗΣΙΜΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΙΑ - ΑΠΟΣΤΟΛΙΑ –Δ201338
ΚΟΤΤΕΑΚΟΣ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ – Δ201309
ΧΟΥΤΟΥ ΧΡΥΣΟΥΛΑ – Δ201205

Μαθηματικό Περιεχόμενο:

Η δραστηριότητα αφορά την μαθηματικοποίηση/μαθηματική μοντελοποίηση ενός πραγματικού προβλήματος από τον χώρο εργασίας των αρχιτεκτόνων/διακοσμητών εξωτερικών χώρων. Πρόκειται για μία εφαρμογή της IBL (Inquiry Based Learning - διερευνητική μάθηση) μέσω ενός packing problem στο πεδίο της Γεωμετρίας και της οπτικοποίησής του με τη βοήθεια ενός δυναμικού λογισμικού.

Στόχοι (ερευνητικοί):

Οι στόχοι είναι: Αρχικά, η μελέτη του τρόπου με τον οποίο πραγματοποιείται η μαθηματικοποίηση του προβλήματος από την πλευρά των μαθητών (εμπόδια, δυνατότητες και κατασκευή νοημάτων για τις εμπλεκόμενες μαθηματικές έννοιες). Στη συνέχεια, η μελέτη του τρόπου με τον οποίο εμφανίζεται η **διερεύνηση** αλλά και ο **χώρος εργασίας** στη δραστηριότητα των μαθητών.

Πλαίσιο δραστηριότητας (αριθμός μαθητών, τάξη, χρονική διάρκεια κ.λπ.):

Η δραστηριότητα αυτή έγινε σε 2 μαθητές (Βρασίδας, Βαρθολομαίος), οι οποίοι μόλις είχαν τελειώσει τη Β' Λυκείου, από 4 ερευνητές εκ των οποίων οι 2 ήταν απλοί παρατηρητές. Έλαβε χώρα σε εξωτερικό χώρο (καφετέρια) ώστε οι μαθητές να νιώσουν πιο οικεία και διήρκησε περίπου δύο ώρες. Οι προαπαιτούμενες γνώσεις που χρειάστηκαν οι μαθητές ήταν η γνώση του πώς να υπολογίζουν εμβαδά διαφόρων σχημάτων. Πριν τη βασική δραστηριότητα, πραγματοποιήθηκε μία εισαγωγική δραστηριότητα με σκοπό την εξοικείωση των μαθητών με τη δομή και τη λειτουργία του λογισμικού. Το λογισμικό που χρησιμοποιήθηκε ήταν το δυναμικό λογισμικό Geogebra και ο κάθε μαθητής εργάζεται στον δικό του Ηλεκτρονικό Υπολογιστή.

Συνοπτική περιγραφή δραστηριότητας – δραστηριοτήτων:

Εισαγωγική δραστηριότητα:

Αρχικά, έγινε μια εισαγωγική δραστηριότητα με σκοπό οι μαθητές να γνωρίσουν το πρόγραμμα και τις δυνατότητές του. Στη δραστηριότητα αυτή, οι μαθητές έμαθαν πώς να φτιάχνουν γραμμές, κύκλους, πολύγωνα, να ορίζουν κυκλικούς τομείς και να φτιάχνουν και εμφανίζουν ετικέτες.

Βασική δραστηριότητα:

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε η βασική δραστηριότητα. Όπως προαναφέραμε, η δραστηριότητα αυτή αφορά την μαθηματικοποίηση ενός πραγματικού προβλήματος από τον χώρο εργασίας των αρχιτεκτόνων/διακοσμητών εξωτερικών χώρων. Η φιλοσοφία της δραστηριότητας χαρακτηρίζεται από την εφαρμογή της IBL (Inquiry Based Learning - διερευνητική μάθηση) μέσω ενός packing problem στο πεδίο της Γεωμετρίας, καθώς και μέσω της οπτικοποίησής του με τη βοήθεια ενός δυναμικού λογισμικού.

Συγκεκριμένα, οι μαθητές καλούνται να καλύψουν μια αυλή με πέτρες σε σχήμα κυκλικών δίσκων. Ο σκοπός της δραστηριότητας είναι να πετύχουν τη μέγιστη πυκνότητα κάλυψης της αυλής, δηλαδή πρέπει να βρουν με ποιο τρόπο πρέπει να διατάξουν τις πέτρες ώστε να μένει ο ελάχιστος άδειος χώρος μεταξύ των πετρών. Οι μαθητές πρέπει να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους στις ιδιότητες των πολυγώνων και των κυκλικών δίσκων, να αναγνωρίσουν μοτίβα μέσω των γραφικών του λογισμικού και μέσω της σύγκρισης των εμβαδών τους να καταλήξουν στο απαιτούμενο συμπέρασμα.

Ανάλυση της δραστηριότητας (περιεχόμενο, φύλλο εργασίας, χρήση εργαλείων, στόχοι και αναμενόμενες ενέργειες/δυσκολίες των μαθητών, στόχευση και αιτιολόγηση των σχεδιαζόμενων παρεμβάσεων των ερευνητών):

Στο σημείο αυτό θα επιδιώξουμε την περιγραφή του περιεχομένου της δραστηριότητας μέσα από την ανάλυση των ερωτημάτων του φύλλου εργασίας και της χρήσης των εργαλείων:

Ξεκινώντας στο φύλλο εργασίας, γίνεται η αρχική περιγραφή του προβλήματος μέσω της παρακάτω περιγραφής:

"Εργάζεστε σαν αρχιτέκτονας / σχεδιαστής εξωτερικού χώρου. Ο πελάτης σας έχει δύσκολο γούστο! Δεν του αρέσουν οι γωνίες, γι' αυτό θα ήθελε να πλακοστρωθεί η αυλή του με κυκλικές πέτρες. Θέλει, επίσης, οι πέτρες να καλύψουν τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια ώστε το γρασίδι που φυτρώνει ανάμεσα τους να είναι όσο το δυνατόν λιγότερο. Η δική σας δουλειά, λοιπόν, είναι να βρείτε τη διάταξη των πετρών που αφήνει τη λιγότερη δυνατή κενή επιφάνεια ανάμεσά τους."

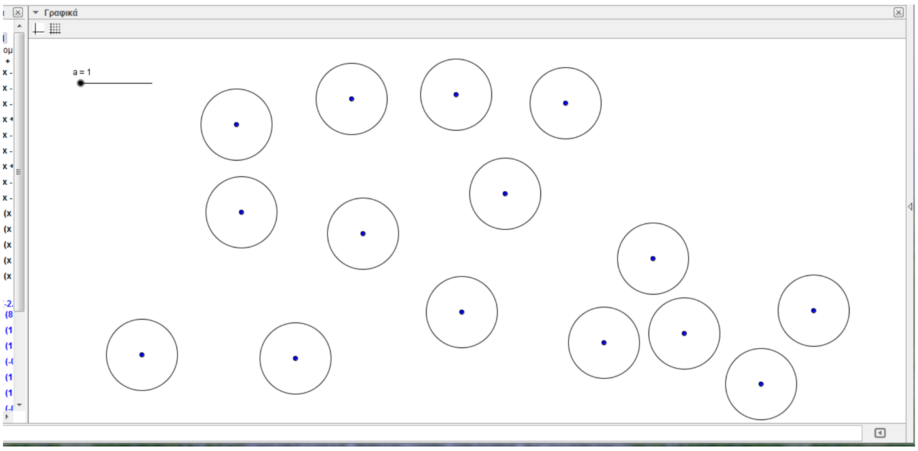
Αφού συζητηθεί η περιγραφή αυτή με τους μαθητές, στο φύλλο εργασίας διατυπώνονται τέσσερα ερωτήματα.

<u>Στο πρώτο ερώτημα:</u>

1. Ανοίξτε το πρώτο φύλλο Geogebra που σας δίνεται με το όνομα "arxiko". Με ποιο τρόπο θα μπορούσε ο αρχιτέκτονας να διατάξει τις κυκλικές πέτρες; Πειραματιστείτε.

Το φύλλο Geogebra "arxiko" περιέχει ήδη κατασκευασμένους κύκλους, των οποίων η ακτίνα μπορεί να μεταβληθεί με ένα δρομέα ορισμένο με τιμή k. <u>Σε πρώτη φάση</u>, ο δρομέας είναι κρυμμένος.

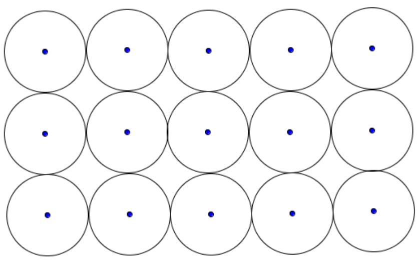
Στόχοι και αναμενόμενες ενέργειες/δυσκολίες:

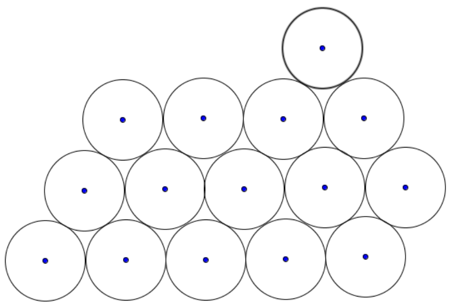


Από τους μαθητές ζητείται να πειραματιστούν με το σχεδιασμένο περιβάλλον που τους δίνεται, έτσι ώστε διαισθητικά και μέσω συζήτησης να καταλήξουν στη βέλτιστη διάταξη. Αναμένεται πληθώρα διατάξεων από τους μαθητές, επηρεασμένες κατά πολύ μεγάλο μέρος από την πραγματική διάσταση του προβλήματος (να σχεδιάσουν μία αυλή όπως θα μπορούσε να είναι στην πραγματικότητα, πχ με παρτέρια, λιμνούλες δρομάκια κ.α.).

Στόχευση και αιτιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων των ερευνητών:

Εδώ, οι καθηγητές που θα εκτελέσουν την δραστηριότητα θα πρέπει να καθοδηγήσουν τους μαθητές στις δύο επιθυμητές διατάξεις:

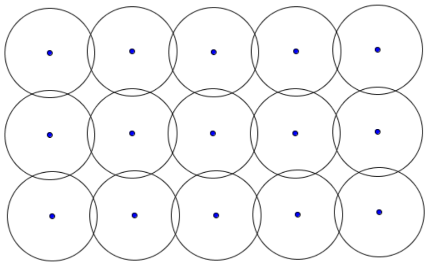


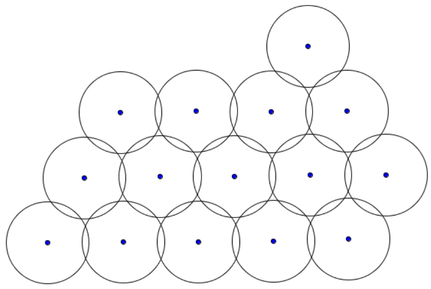


<u>Σε δεύτερη φάση</u>, τους εμφανίζουμε το δρομέα και τους ζητάμε να πειραματιστούν.

Στόχοι και αναμενόμενες ενέργειες/δυσκολίες:

Στόχος, εδώ, είναι να συνειδητοποιήσουν ότι αφού οι κύκλοι αντιπροσωπεύουν πέτρες, δεν μπορεί να μπει ο ένας κύκλος μέσα στον άλλο. Είναι ένα σημείο στο οποίο ουσιαστικά θέλουμε να μαθηματικοποιήσουν το πρόβλημα έτσι ώστε να επιτευχθεί η οριζόντια μαθηματικοποίηση.





Ένας άλλος σκοπός της συγκεκριμένης λειτουργίας είναι τα παιδιά να προβληματιστούν γύρω από το κατά πόσον το μέγεθος των κυκλικών δίσκων επηρεάζει τον βέλτιστο τρόπο τοποθέτησης των δίσκων.

Τέλος, θέλουμε να μας σχολιάσουν τα περιθώρια της οθόνης και τη γενίκευση των μοτίβων προς το άπειρο: Το πλήθος των σχεδιασμένων κυκλικών δίσκων είναι τέτοιο ώστε να μην υπάρχει η δυνατότητα κάλυψης όλης της οθόνης. Με αυτόν τον τρόπο, γίνεται μια πρώτη προσπάθεια ώστε τα παιδιά να αναγνωρίσουν το μοτίβο ως μικρογραφία του άπειρου επιπέδου.

Στόχευση και αιτιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων των ερευνητών:

Εδώ, οι καθηγητές πρέπει να βοηθήσουν τα παιδιά να καταλάβουν τον περιορισμό ότι δεν μπορούν να κόψουν τις πέτρες, συνεπώς αν κουνήσουν τον δρομέα και μεγαλώσει η ακτίνα, θα πρέπει να επαναδιατάξουν τις πέτρες.

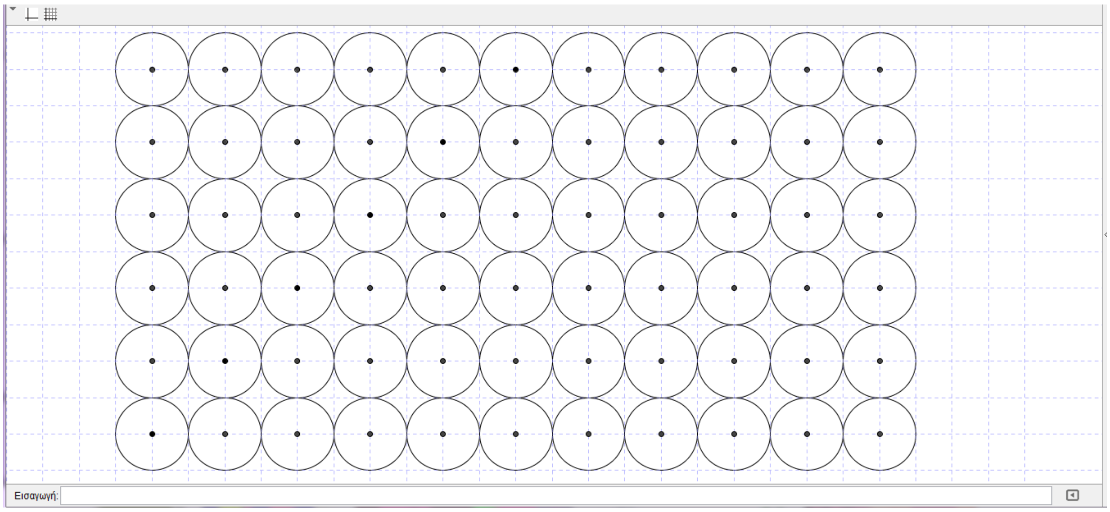
Επίσης, θα πρέπει να ενισχύσουν την πειραματική διάθεση των μαθητών ως προς τη διερεύνηση του ρόλου που παίζει η ακτίνα και τη διατύπωση μιας εικασίας.

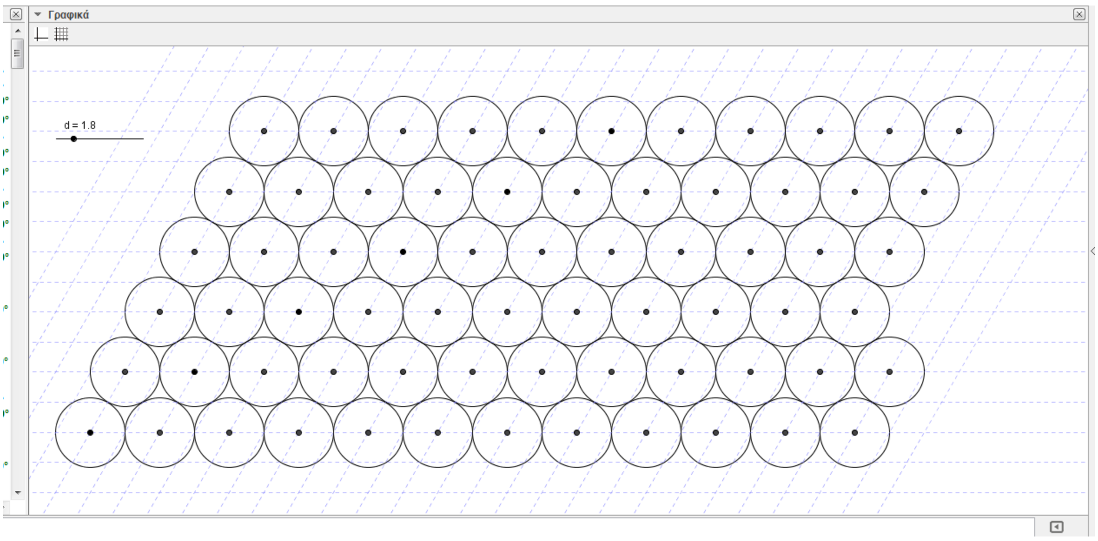
Στο δεύτερο ερώτημα:

2. Ανοίξτε το δεύτερο και το τρίτο φύλλο Geogebra που σας δίνεται με τα ονόματα "basiko1" και "basiko2".

a. Εστιάστε στα κέντρα των νομισμάτων. Για κάθε μία από τις διατάξεις που σας δίνονται, σχεδιάστε επαναλαμβανόμενα πολύγωνα με τα οποία να καλύψετε όλη την επιφάνεια.
b. Για κάθε διάταξη βρείτε το μικρότερο επαναλαμβανόμενο πολύγωνο που δημιουργείται, με βάση το υποερώτημα 1.

Τα φύλλα Geogebra με τους τίτλους “basiko1”, “basiko2” περιέχουν τις δύο επιθυμητές διατάξεις, όπως φαίνονται παρακάτω:



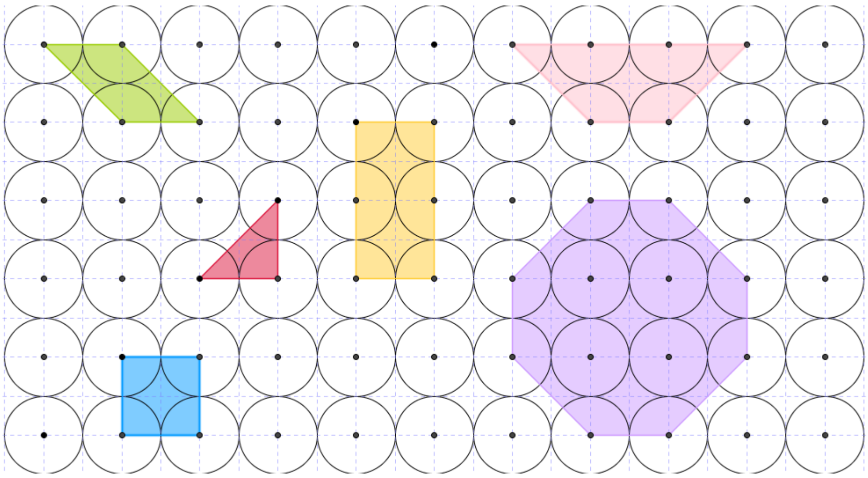


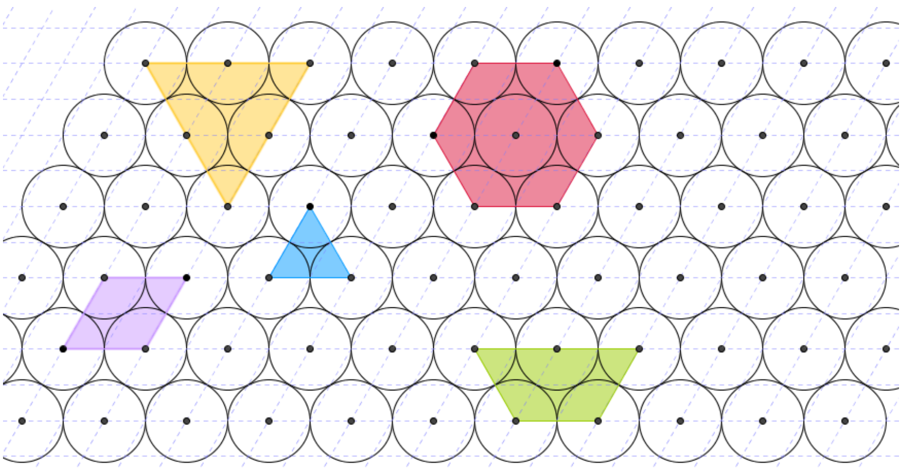
Γενικός σκοπός του συγκεκριμένου ερωτήματος είναι τα παιδιά να προσεγγίζουν την έννοια του απείρου με το να αναγνωρίζουν το μοτίβο ως την μικρογραφία της άπειρης επιφάνειας, έτσι ώστε «το όλο» να περιοριστεί στο συγκεκριμένο μοτίβο.

<u>Στο ερώτημα α)</u> πρέπει να σχεδιάσουν επαναλαμβανόμενα πολύγωνα των οποίων οι κορυφές να αποτελούν κέντρα κάποιων κυκλικών δίσκων.

Στόχοι και αναμενόμενες ενέργειες/δυσκολίες:

Πιο συγκεκριμένα, ο στόχος του υποερωτήματος αυτού είναι να σχεδιάσουν διάφορα μοτίβα που δημιουργούνται από την επανάληψη ενός πολυγώνου (η δομική μονάδα του μοτίβου). Για παράδειγμα, στην πρώτη διάταξη θα μπορούσαν να σχεδιάσουν τα ακόλουθα μοτίβα (πλακοστρώσεις με ρόμβους, εξάγωνα, ορθογώνια).

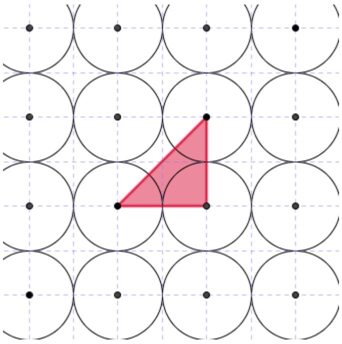


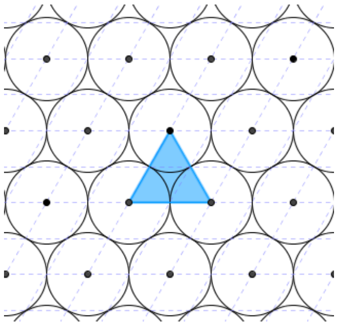


Θεωρούμε ότι εδώ δεν θα αντιμετωπίσουν πολύ μεγάλες δυσκολίες, και θα βρουν μία πληθώρα ζητούμενων πολυγώνων.

Στόχευση και αιτιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων των ερευνητών:

Οι ερευνητές θα πρέπει να ενθαρρύνουν τους μαθητές να εντοπίσουν εναλλακτικά μοτίβα για την ίδια διάταξη κερμάτων. Επίσης, καλό θα ήταν να δοκιμάσουν όλοι οι μαθητές διαφορετικά μοτίβα και για τις δύο διατάξεις, αν υπάρχει διαθέσιμος χρόνος.





Όσον αφορά στο υποερώτημα b) ζητείται από τα παιδιά να διερευνήσουν και να βρουν την μικρότερη γεωμετρική μονάδα (υποφιγούρα) που δημιουργείται.

Στόχοι και αναμενόμενες ενέργειες/δυσκολίες:

Ο στόχος, εδώ, είναι να βρουν οι μαθητές ότι στην πρώτη διάταξη το μικρότερο επαναλαμβανόμενο πολύγωνο που δημιουργείται είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, ενώ στη δεύτερη το ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο. Με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα τα παιδιά οδηγούνται πιο ομαλά στις επόμενες δραστηριότητες. Θεωρούμε ότι οι μαθητές θα αντιμετωπίσουν μία μικρή δυσκολία στο να καταφέρουν να αναγνωρίσουν τη μικρότερη γεωμετρική μονάδα.

Στόχευση και αιτιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων των ερευνητών:

Εδώ, οι ερευνητές πρέπει να βοηθήσουν τα παιδιά να αναγνωρίσουν την ύπαρξη της κοινής μικρότερης γεωμετρικής μονάδας σε κάθε πολύγωνο για κάθε διάταξη, μέσω κατάλληλων ερωτήσεων.

Στο τρίτο ερώτημα:

3. Υπολογίστε το ποσοστό της επιφάνειας που είναι καλυμμένη από τα νομίσματα για τα διάφορα μοτίβα της κάθε διάταξης, που δημιουργήσατε παραπάνω.
   Συγκρίνετε τα ευρήματά σας. Πως τα ερμηνεύετε;

Εδώ, οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν το ποσοστό κάλυψης της επιφάνειας από τους κυκλικούς δίσκους, σύμφωνα με τα μοτίβα που έχουν δημιουργηθεί στα προηγούμενα ερωτήματα.

Στόχοι και αναμενόμενες ενέργειες/δυσκολίες:

Ο στόχος του συγκεκριμένου ερωτήματος είναι οι μαθητές να υπολογίσουν το ποσοστό κάλυψης της επιφάνειας από τους κυκλικούς δίσκους σε κάθε ένα από τα μοτίβα που είχαν δημιουργήσει στα προηγούμενα ερωτήματα. Στην ουσία, πρέπει να γίνει η μετάβαση από το λόγο των εμβαδών στο ποσοστό της επιφάνειας. Εδώ, αναμένουμε μεγάλη δυσκολία στη διαδικασία εύρεσης του ποσοστού, που μπορεί να οφείλεται είτε στο ότι οι μαθητές δεν θα θυμούνται τον τύπο, είτε στο ότι δεν γνωρίζουν τον τύπο εύρεσης του ποσοστού. Πολλοί μαθητές μάλιστα, ίσως μπερδέψουν την πράξη της διαίρεσης, με αυτήν της αφαίρεσης. Επιπλέον, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν τις δυνατότητες του προγράμματος και αρχικά να ορίσουν τους 4 κυκλικούς τομείς και στη συνέχεια να κατασκευάσουν ετικέτες για αυτούς και για το πολύγωνο στο οποίο βρίσκονται μέσα, οι οποίες να δείχνουν αντίστοιχα το εμβαδό τους. Αυτό, αναμένουμε ότι θα αποτελέσει μια μικρή πρόκληση για τους μαθητές.

Τα παιδιά, εν τέλει, πρέπει να καταλήξουν στο γεγονός ότι το ποσοστό κάλυψης δεν εξαρτάται από τα μοτίβα, αλλά από τις δύο διαφορετικές διατάξεις. Σε αυτό το σημείο αναμένουμε σχετική δυσκολία εκ μέρους των μαθητών. Επιπλέον, μέσω των λόγων, παρατηρείται και η ανεξαρτησία του ποσοστού κάλυψης από το μέγεθος των κυκλικών δίσκων. Τέλος, επιδιώκεται η αλγεβρική απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος, ώστε να προχωρήσουν από την επιβεβαίωση των εικασιών, που παρέχει το πρόγραμμα, στην τυπική απόδειξη.

Στόχευση και αιτιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων των ερευνητών:

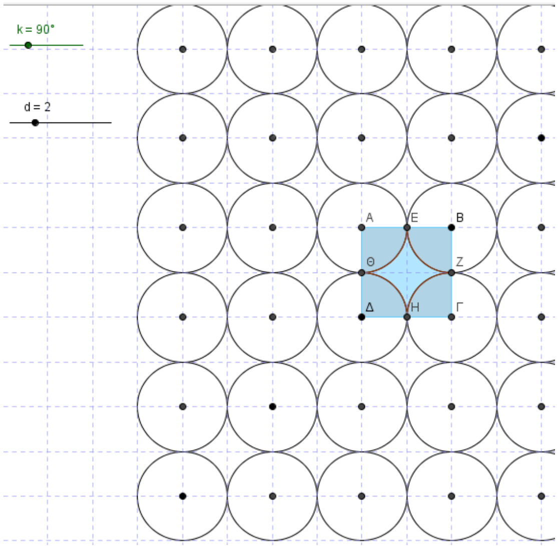
Αν οι μαθητές αντιμετωπίσουν δυσκολίες στον τρόπο υπολογισμού του ποσοστού, πρέπει οι ερευνητές να τους βοηθήσουν, δίνοντας τους απλά παραδείγματα με αριθμούς και ποσοστά (πχ το μισό τραπέζι είναι το 50% κλπ). Επίσης, οι ερευνητές μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές στρέφοντας την προσοχή τους στη χρήση της μικρότερης γεωμετρικής μονάδας που οι ίδιοι βρήκαν παραπάνω στο προηγούμενο ερώτημα. Βοήθεια, επίσης, θα πρέπει να δώσουν στους μαθητές για ορίσουν τους κυκλικούς τομείς και να φτιάξουν τις ετικέτες με τα εμβαδά.

Στο τέταρτο ερώτημα:

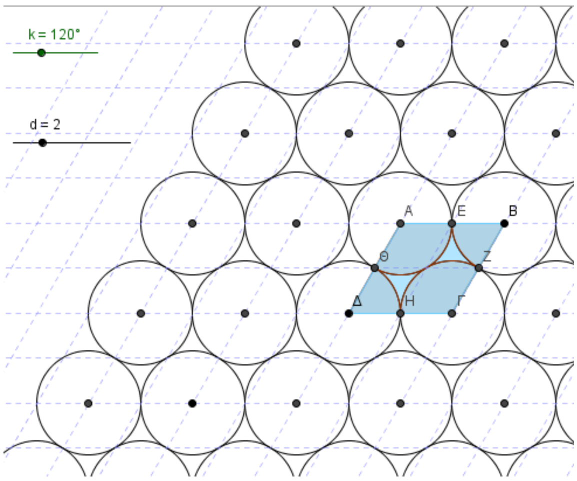
4. Ανοίξτε το τέταρτο φύλλο Geogebra που σας δίνεται με το όνομα "teliko". Πειραματιστείτε με τον δρομέα. Τι παρατηρείται να συμβαίνει;
   Μπορείτε με τη βοήθεια των παρατηρήσεων αυτών να απαντήσετε στο ερώτημα «ποια από τις δύο διατάξεις είναι η καλύτερη;»
   Τεκμηριώστε την απάντησή σας με τη βοήθεια του περιβάλλοντος.

Στο συγκεκριμένο ερώτημα οι μαθητές καλούνται να ανοίξουν το φύλλο Geogebra με τίτλο "teliko" στο οποίο υπάρχουν δύο δρομείς: ο δρομέας k μεταβάλλει τη γωνία υπό την οποία σχηματίζουν οι βοηθητικές γραμμές που ενώνουν τα κέντρα των κυκλικών δίσκων (βλέπε σχήμα).

Αρχικά, πρέπει να πειραματιστούν με τον δρομέα k:

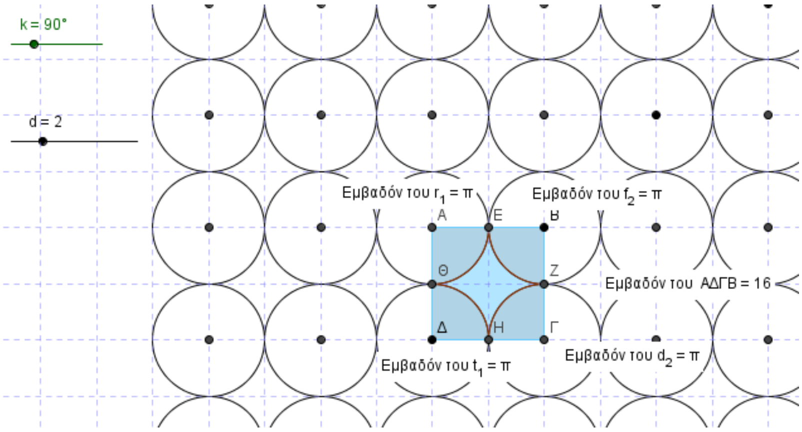


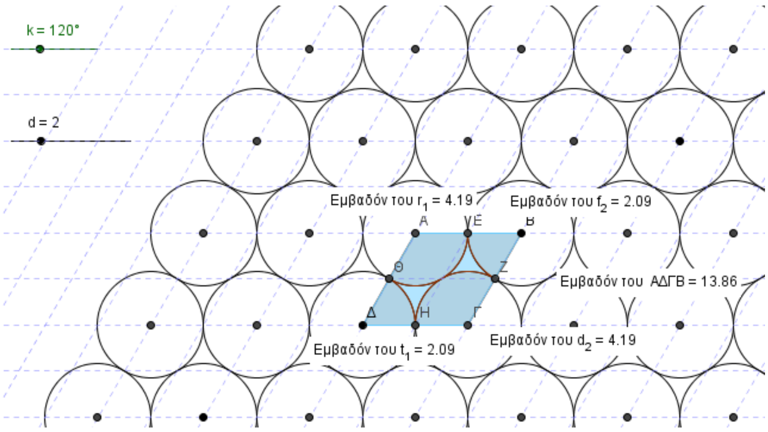
Μεταβάλλοντας τον δρομέα k θα παρατηρήσουν ότι από την πρώτη διάταξη τα γραφικά καταλήγουν να σχηματίζουν τη δεύτερη διάταξη.



Στόχοι και αναμενόμενες ενέργειες/δυσκολίες:

Ο στόχος, εδώ, είναι οι μαθητές να αποδείξουν ότι η καλύτερη διάταξη είναι η δεύτερη. Για να το κάνουν αυτό, πρέπει να δουν ότι το εμβαδόν του τετραγώνου είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του ρόμβου και επιπλέον ότι και στις δύο περιπτώσεις περιέχεται ένας ολόκληρος κυκλικός δίσκος μέσα σε κάθε γεωμετρικό σχήμα. Ορίζοντας πάλι τους 4 κυκλικούς τομείς και χρησιμοποιώντας ετικέτες για τα εμπλεκόμενα εμβαδά, επιδιώκεται να δουν επάνω στην ώρα της αλλαγής από τη μία διάταξη στην άλλη, το πώς αλλάζει το εμβαδό των κενών ανάμεσα στους κυκλικούς δίσκους. Θέλουμε να παρατηρήσουν ότι καθώς μεταβάλλεται ο δρομέας, η τιμή στην ετικέτα του εμβαδού μικραίνει. Αυτό, αναμένουμε ότι θα αποτελέσει, όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, μια μικρή πρόκληση για τους μαθητές.





Μεταβάλλοντας, στη συνέχεια, τον δρομέα d, θα παρατηρήσουν πάλι όπως και στο πρώτο ερώτημα ότι η ακτίνα των κυκλικών δίσκων μεταβάλλεται. Εδώ, θα πρέπει πάλι να σκεφτούν αντίστοιχα και να καταλήξουν στο ότι το μέγεθος της ακτίνας δεν παίζει κανένα ρόλο στην επιλογή της διάταξης.

Στόχευση και αιτιολόγηση των διδακτικών παρεμβάσεων των ερευνητών:

Εδώ, οι ερευνητές πρέπει να βοηθήσουν μέσω κατάλληλων ερωτήσεων τους μαθητές να φτάσουν στη ζητούμενη διάταξη. Θα πρέπει να τους καθοδηγήσουν ώστε να φτιάξουν τις απαιτούμενες ετικέτες που δείχνουν τα εμβαδά, τα οποία θα χρησιμοποιήσουν για την εξαγωγή του συμπεράσματός τους.

Πηγές που χρησιμοποιήθηκαν:

Θεωρητικό πλαίσιο

Αυτό που μπορεί να θεωρηθεί σαν Inquiry-based pedagogy είναι « ο τρόπος διδασκαλίας κατά τον οποίο οι μαθητές ενθαρρύνονται να δουλέψουν με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που δουλεύουν οι μαθηματικοί και οι επιστήμονες» (Artigue & Blomjøj, 2013). Σε ένα περιβάλλον IBL η δουλειά του δασκάλου δεν είναι να παρέχει γνώση, αλλά να βοηθά τους μαθητές να προχωρήσουν τον δρόμο της ανακάλυψης της γνώσης» (MASCIL). Για να μπορέσει, ωστόσο, να ευδοκιμήσει η διερευνητική μάθηση μέσα σε μια σχολική τάξη πρέπει η κουλτούρα της τάξης να επιτρέπει τα λάθη, να τα εκτιμά και να τα διαχειρίζεται σα συνεισφορά ώστε οι μαθητές να κατακτήσουν τη γνώση. Για τον λόγο αυτό ο διάλογος και η συνεργασία των μαθητών είναι απαραίτητο συστατικό. Επιπλέον, ο εκπαιδευτικός οφείλει να αναδεικνύει το λόγο των μαθητών και να βασίζεται σ' αυτούς ώστε να αιτιολογήσουν της απαντήσεις τους και να χτίσουν τη νέα γνώση. Έτσι, οι ερωτήσεις μιας δραστηριότητας θα πρέπει να είναι ανοιχτού τύπου και να προσεγγίζονται με πολλαπλές στρατηγικές επίλυσης. Με τη σειρά τους οι μαθητές θα πρέπει να θέτουν ερωτήσεις, να αναζητούν μόνοι τους ή συνεργατικά τις απαντήσεις και να διερευνούν. Με άλλα λόγια, «να δεσμεύονται, να εξερευνούν, να εξηγούν, να επεκτείνουν και να εκτιμούν» (Artigue & Blomjøj, 2013). Η διερευνητική μάθηση μπορεί να προσεγγιστεί με διάφορους τρόπους, όπως μέσω της σύνδεσης των μαθηματικών με το χώρο εργασίας ή από αυτό που ονομάζουμε ρεαλιστικά μαθηματικά.

Η διαδικασία κατά την οποία προσπαθεί κάποιος να βελτιώσει τις μαθηματικές του ικανότητες μπορεί να γίνει κάποιες φορές επίπονη. Οι ενήλικες που καταπιάνονται με μαθηματικά στο χώρο εργασίας δεν έχουν πάντα αυτοπεποίθηση για τις μαθηματικές τους ικανότητες, τις υποτιμούν καθώς είναι κομμάτι της καθημερινότητάς τους. Δεν το θεωρούν κατόρθωμα, το εκλαμβάνουν ως κάτι δεδομένο. Συνήθως, δεν αντιλαμβάνεται κανείς την πληθώρα μαθηματικών που χρησιμοποιεί στο χώρο εργασίας του (Knasel, 2005). Η Lynn Steen χαρακτηριστικά αναφέρει ότι «στο σχολείο διδάσκουμε περίπλοκα μαθηματικά με απλή χρήση, αλλά στο χώρο εργασίας οι άνθρωποι συχνά χρησιμοποιούν απλά μαθηματικά με περίπλοκη χρήση». Συγκεκριμένα, η Millroy (1992) μελέτησε τις μαθηματικές ιδέες μιας ομάδας ξυλουργών από τη Νότια Αφρική. Παρατήρησε ότι πολλές μαθηματικές έννοιες και διαδικασίες είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με την καθημερινή δουλειά τους, όπως αναλογία, συμμετρία, χωρική οπτικοποίηση, ευθείες και παράλληλες ευθείες , διαδικασίες όπως λύση προβλημάτων, αιτιολόγηση, σύγκριση και μετρήσεις. Μια άλλη χαρακτηριστική έρευνα είναι αυτή της Masiglia (1996) αναφορικά με τις διαδικασίες μετρήσεων των ‘carpet layers’, η οποία κατέληξε στο ότι στην επαγγελματική τους πορεία χρησιμοποιούν στη λύση προβλημάτων τους πολύ διαφορετικά μαθηματικά από αυτά που διδάσκουν τα σχολικά εγχειρίδια και αφορούν κυρίως σε προβλήματα βελτιστοποίησης.

Στα ρεαλιστικά μαθηματικά δε σημαίνει μόνο ότι ο μαθητής συνδέει τον πραγματικό κόσμο αλλά εμπλέκεται σε μια προβληματική κατάσταση, η οποία φαντάζει σ ’αυτόν οικεία.

Ο δάσκαλος είναι εκεί για να διευκολύνει, να οργανώνει, να οδηγεί και να αξιολογεί και τίποτα παραπάνω. (De Lange 1996, Gravemeije 1994). Έτσι ο μαθητής εργάζεται μόνος του ή σε ομάδα, βασίζεται στον εαυτό του ή στην ομάδα του, συμμετέχει και παράγει ελεύθερα.

Σύμφωνα με το National Curriculum Framework 2005 (NCF, 2005) κύριος στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης στο σχολείο είναι η «μαθηματικοποίηση των διαδικασιών τη σκέψης ενός παιδιού». «Είναι πιο χρήσιμο να ξέρεις πως μαθηματικοποιείς παρά να ξέρεις πολλά μαθηματικά». (Wheeler, 2006). Σύμφωνα με τον Freudenthal η μαθηματικοποίηση είναι μια διαδικασία άμεσα συνδεδεμένη με την κατανόηση των μαθηματικών, αναφορικά με το πώς το παιδί οργανώνει τις εμπειρίες του. Μέσω αυτής της οργάνωσης, οι αρχικές εμπειρίες (χαμηλού επιπέδου μαθηματική κατανόηση) εξελίσσονται σε κατανόηση υψηλού επιπέδου. «Δεν υπάρχουν μαθηματικά, χωρίς μαθηματικοποίηση», Freudenthal,1991. Ο Treffers (1978) έκανε διάκριση ανάμεσα στην οριζόντια και την κάθετη μαθηματικοποίηση. Η οριζόντια μαθηματικοποίηση αφορά στην προσπάθεια να αναπαραστήσει σχηματικά ένα πραγματικό πρόβλημα, να το μοντελοποιήσει και να το προσεγγίσει με μαθηματικές μεθόδους. Ένα παράδειγμα αυτής της διαδικασίας είναι όταν οι μαθητές μετατρέπουν ένα πραγματικό πρόβλημα σε ένα γνωστό, μαθηματικό πρόβλημα. Ενώ, όταν η αναπαράσταση που κατασκευάζει ο μαθητής χρησιμοποιείται από τον ίδιο ως εργαλείο αντιμετώπισης μιας νέας κατάστασης, επιτυγχάνεται η κάθετη μαθηματικοποίηση. Με άλλα λόγια, η κάθετη μαθηματικοποίηση αφορά στις διαδικασίες επαναδιοργάνωσης μέσα στο ίδιο μαθηματικό σύστημα. Ουσιαστικά, τα δύο αυτά είδη αφορούν στο διαφορετικό τρόπο που κατασκευάζει κάποιος ένα πραγματικό μοντέλο. Κάποιος μπορεί να ισχυριστεί ότι όλα αυτά έχουν τις βάσεις τους στον κονστρουκτιβισμό, του οποίου η φιλοσοφία είναι να δίνεται στους μαθητές η ελευθερία της κατασκευής ή της ανακατασκευής της γνώσης τους.

Για να επιτευχθούν τα παραπάνω αξίζει να αναγνωριστούν οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σχετικά με τα διαφορετικά γνωστικά στυλ, στα οποία μπορεί ενίοτε να ανήκουν. Σύμφωνα με τον Allpert (1993) ως γνωστικό στυλ ορίζεται ο τρόπος με τον οποίο τα άτομα λαμβάνουν και επεξεργάζονται τις πληροφορίες. Το γνωστικό στυλ του κάθε ανθρώπου αποτελεί ένα αναλλοίωτο χαρακτηριστικό του, το οποίο μπορεί να αναπτυχθεί και να εξελιχθεί μέσω των έργων και των εργαλείων που χρησιμοποιούνται κατά τη διαδικασία της μάθησης.

Με βάση τα παραπάνω, ένα μάθημα που χρησιμοποιεί dgs μπορεί να ανακαλέσει διαφορετικά γνωστικά στυλ και έτσι να βοηθήσει τους μαθητές στην καλύτερη επεξεργασία και διαχείριση των πληροφοριών. Παραδείγματος χάριν, πιθανώς, «οι visualisers να αποτυγχάνουν στα σχολικά μαθηματικά λόγω της μη αντιστοιχίας του γνωστικού τους στυλ με τον τρόπο διδασκαλίας». (Pitta-Pantazi & Christou, 2009)

Συνοψίζοντας, μέσω της δυναμικής γεωμετρίας οι μαθητές μπορούν να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα με έναν πιο ολιστικό τρόπο (Connel, 1998). Υπό αυτήν την έννοια, οι μαθητές μπορούν να ανακαλύψουν τις μαθηματικές έννοιες σύμφωνα με τις προσωπικές τους ανάγκες και ρυθμούς (Laborte et al., 2006)

Επιπλέον, τα DGS βοηθούν τους μαθητές στο να εμπλακούν στη διαδικασία της απόδειξης. Αρχικά, παρέχεται η δυνατότητα να κάνουν εικασίες και να αιτιολογήσουν την εγκυρότητα των συνδέσεων τους πριν περάσουν στην τυπική μαθηματική απόδειξη. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να κατασκευάζουν ή να παρατηρήσουν επαναλαμβανόμενα μοτίβα (patterns), καθώς χειρίζονται τα γραφήματα και βλέπουν τις αλλαγές που προκύπτουν. Ωστόσο υπάρχει περίπτωση να δεχτούν τα πολλαπλά παραδείγματα ως απόδειξη (Gallingo,1997), όντας όμως σε θέση να αποδείξουν τις συνδέσεις που έχουν κάνει οι ίδιοι παρά αυτές που τους δόθηκαν έτοιμες (Zbiek & Glass, 2000). Για τον λόγο αυτό, καθοριστικό ρόλο παίζουν οι ανοιχτού τύπου ερωτήσεις, όπου μέσω διερευνήσεων οδηγούνται οι μαθητές στο να αναπτύξουν δικές τους συνδέσεις, καθώς και να τις αποδείξουν.

ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΕΜΒΑΣΗΣ

Για την ανάλυση της παρέμβασης χρησιμοποιήθηκαν ως άξονες οι προαναφερθέντες ερευνητικοί στόχοι. Η ανάλυση έγινε με βάση τα κρίσιμα συμβάντα τα οποία θεωρήσαμε και ενδεικτικά για να σκιαγραφηθεί η πορεία της σκέψης των μαθητών (άξονας α), όπως και ο ρόλο που παίζει ο χώρος εργασίας στην πορεία διερεύνησης του προβλήματος (άξονας β). Παραθέτονται, επίσης, κομμάτια των αντίστοιχων απομαγνητοφωνημένων διαλόγων.

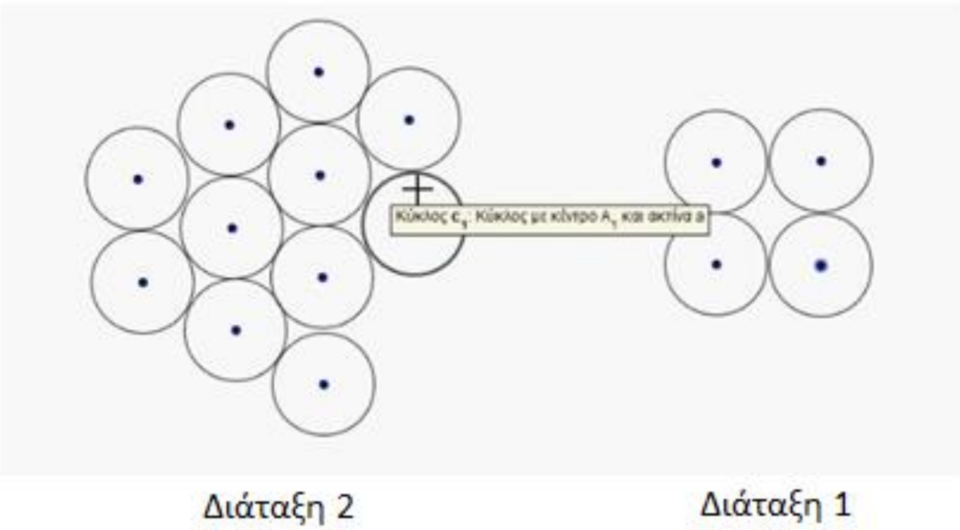
Καθ' όλη την πορεία της δραστηριότητας υπήρχε έντονη η διαφοροποίηση ανάμεσα στους δύο μαθητές. Αυτό συνέβαινε διότι ο ένας μαθητής φαινόταν να έχει περισσότερη αυτοπεποίθηση, με αποτέλεσμα να αναλύει διαρκώς το σκεπτικό του στους ερευνητές μιλώντας δυνατά και διαρκώς. Αντιθέτως, ο άλλος μαθητής ήταν πιο κλειστός, μιλούσε χαμηλόφωνα και δεν έπαιρνε πρωτοβουλίες. Ως εκ τούτου η μεταξύ τους συνεργασία ήταν προβληματική παρά των συνεχών παροτρύνσεών μας.

Φ1: «Όταν είμαστε στην ομάδα, ο καθένας μόνος του σκέφτεται;»
Μ2: «Λέει ο καθένας την ιδέα του, και ο άλλος τον… Συνεννοούμαστε νοηματικά»Μ1
Μ1: «Ναι. Με το μυαλό […]»

Πιο αναλυτικά, στο πρώτο ερώτημα της δραστηριότητας:

«Ανοίξτε το πρώτο φύλλο Geogebra που σας δίνεται με το όνομα "arxiko". Με ποιο τρόπο θα μπορούσε ο αρχιτέκτονας να διατάξει τις κυκλικές πέτρες; Πειραματιστείτε.»

Οι μαθητές πειραματίστηκαν με το λογισμικό και διερεύνησαν το πώς θα διαταχτούν οι πέτρες. Συγκεκριμένα, ο Βαρθολομαίος σε όλη τη διαδικασία φαινόταν να πειραματίζεται με τυχαίο τρόπο και μετά από αρκετή προσπάθεια κατέληξε στη βέλτιστη διάταξη. Από την άλλη μεριά, ο Βρασίδας με πολύ μεγάλη ευκολία κατέληξε στην βέλτιστη διάταξη. Και οι δύο μαθητές κατάφεραν τελικά να μοντελοποιήσουν σωστά το πρόβλημα .Ανακάλυψαν τις δύο πιθανές διατάξεις και επέλεξαν ορθά την βέλτιστη(εικόνα 1).



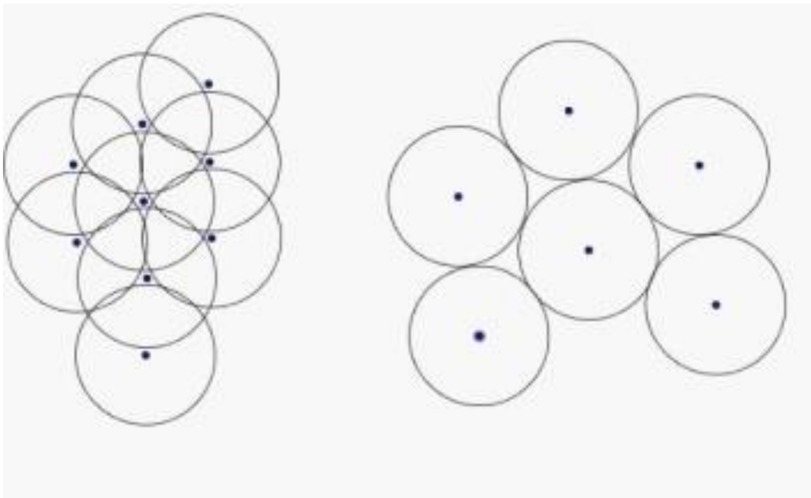
Εικόνα 1

Στο παρακάτω απόσπασμα, ο Βρασίδας φαίνεται να επηρεάζεται από το χώρο εργασίας. Αναγνωρίζοντας το γεγονός ότι η δεύτερη διάταξη καλύπτει καλύτερα την επιφάνεια και χωρίς να του έχει ζητηθεί κάτι τέτοιο, θέτει ένα οικονομικό ζήτημα. Συγκεκριμένα, υποθέτει ότι η λιγότερο πυκνή διάταξη θα χρειαστεί λιγότερες πέτρες για να εφαρμοστεί. Έτσι, από οικονομικής άποψης, αυτό μπορεί να είναι συμφέρον για τον επαγγελματία. Το συγκεκριμένο γεγονός, ερμηνεύεται και ως δυσκολία στην διαδικασία της οριζόντιας μαθηματικοποίησης , καθώς ο μαθητής βάζει επιπλέον περιορισμούς στο πρόβλημα οι οποίοι δεν απαιτούνται (κόστος).

Φ1: Θεωρείστε ότι αυτές είναι οι πέτρες μας… Παίξτε ο καθένας μόνος του, για να δούμε πώς μπορούμε να τις διατάξουμε […]
Μ2: Κοίτα, αν θα μπούνε έτσι (διάταξη 1), κοίτα πόσος χώρος μένει (εκτός)… είναι σχεδόν… πολύ μεγαλύτερος από αυτόν… (διάταξη 2)
Φ2: Ναι
Μ2: Μόνο που εδώ έχουμε λιγότερες πέτρες (διάταξη 1)… αν το θέμα είναι οικονομικό, δεν ξέρουμε αν συμφέρει αυτό…

Στη συνέχεια του ερωτήματος, ζητήθηκε από τους μαθητές να εμφανίσουν έναν δρομέα ο οποίος υπήρχε στο αρχείο που τους είχε δοθεί. Με την κίνηση του δρομέα μεταβαλλόταν η ακτίνα των κυκλικών δίσκων Από τους μαθητές ζητήθηκε να ερευνήσουν την σχέση της ακτίνας των δίσκων με την βέλτιστη διάταξη. Οι μαθητές εργάστηκαν κάνοντας αυξομειώσεις στον δρομέα, και αναδιατάσσοντας κάθε φορά τους κυκλικούς δίσκους. Έτσι, έφτασαν στην μαθηματικοποίηση του προβλήματος και στην απάντηση, ότι η βέλτιστη διάταξη είναι ανεξάρτητη της ακτίνας.

Στο συγκεκριμένο σημείο, εμφανίζονται στοιχεία του ρεαλιστικού πλαισίου και του χώρου εργασίας. Ο Βρασίδας, πειραματιζόμενος με τον δρομέα, ανακαλύπτει ότι όσο οι ακτίνες μεγαλώνουν, κάποια στιγμή οι κύκλοι τέμνονται(εικόνα 2). Εδώ λοιπόν λαμβάνει υπ' όψιν το γεγονός ότι οι πέτρες δεν μπορεί να εισέρχονται η μια μέσα στην άλλη γιατί είναι συμπαγή αντικείμενα, επομένως για να τις διατάξουμε με τέτοιο τρόπο, θα πρέπει να τις κόψουμε.



Εικόνα 2

Επίσης, ο μαθητής ρώτησε αν έχει την επιλογή να χρησιμοποιήσει δύο διαφορετικών ακτινών κυκλικούς δίσκους. Ήθελε να πειραματιστεί και να συγκρίνει οπτικά διατάξεις με τους διαφορετικούς κυκλικούς δίσκους, για να καταλήξει εάν μεταβάλλοντας την ακτίνα έχουμε άλλη βέλτιστη διάταξη. Παρά την επιθυμία του μαθητή, η κατασκευή της δραστηριότητας στο Geogebra δεν το υποστήριζε. Για τον λόγο αυτό, του προτείναμε να κατασκευάσει εκείνη την ώρα κάποιους κύκλους με σταθερή ακτίνα για να εργαστεί όπως επιθυμεί. Ωστόσο ο μαθητής αποφάσισε να μην το κάνει τελικά, ίσως γιατί του φάνηκε χρονοβόρο. Αν η επιλογή αυτή υπήρχε στην κατασκευή μας, πολύ πιθανόν ο μαθητής να έκανε πράξη την σκέψη του.

Αξίζει να πάντως σημειωθεί πάντως, ότι ο Βαρθολομαίος συνέχιζε να εργάζεται με ακανόνιστο τρόπο χωρίς να ακολουθεί μία συγκεκριμένη λογική, με αποτέλεσμα, μόνο ύστερα από σύγκριση με την εργασία του Βρασίδα να καταλήξει στην επιθυμητή διάταξη.

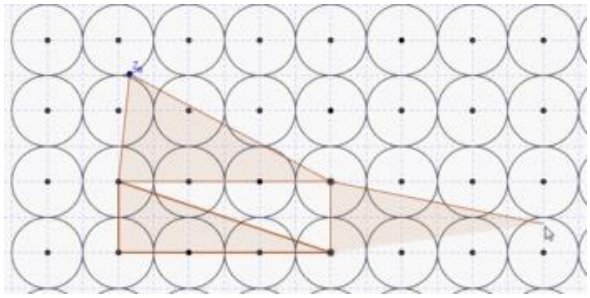
Προχωρώντας στο δεύτερο ερώτημα:

«Ανοίξτε το δεύτερο και το τρίτο φύλλο Geogebra που σας δίνεται με τα ονόματα "basiko1" και "basiko2".

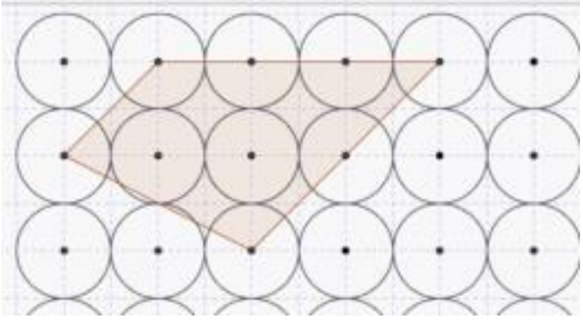
a. Εστιάστε στα κέντρα των νομισμάτων. Για κάθε μία από τις διατάξεις που σας δίνονται, σχεδιάστε επαναλαμβανόμενα πολύγωνα με τα οποία να καλύψετε όλη την επιφάνεια.
b. Για κάθε διάταξη βρείτε το μικρότερο επαναλαμβανόμενο πολύγωνο που δημιουργείται, με βάση το υποερώτημα 1.»

Οι μαθητές χρησιμοποιώντας την εντολή «κατασκευή πολυγώνου» προσπάθησαν να βρουν διάφορα επαναλαμβανόμενα πολύγωνα με τα οποία μπορούν να σαρώσουν την επιφάνεια. Ο Βαρθολομαίος δούλεψε πάνω στη διάταξη 1, ενώ ο Βρασίδας στη διάταξη 2. Στη συνέχεια συνέκριναν τα αποτελέσματά τους και τα συζήτησαν.

Ο Βαρθολομαίος αντιμετώπισε μεγάλη δυσκολία στο να κατασκευάζει πολύγωνα, καθώς και στο να τα συγκρίνει και να αναγνωρίζει τις μεταξύ τους σχέσεις (εικόνα 3). Επίσης, δεν μπορούσε να κατανοήσει την έννοια της επαναληψιμότητας των πολυγώνων, με αποτέλεσμα να φέρνει μεμονωμένα πολύγωνα τα οποία δεν ικανοποιούσαν τη συνθήκη αυτή (εικόνες 3 και 4).

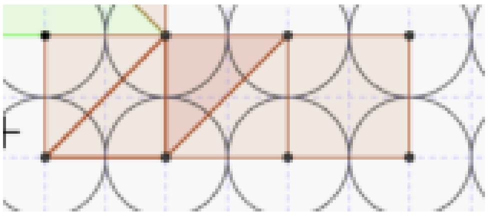


Εικόνα 3



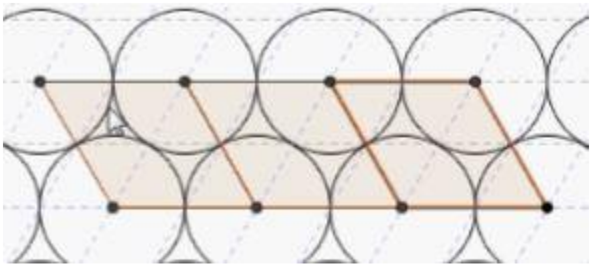
Εικόνα 4

Στη συνέχεια, μετά από αρκετή καθοδήγηση ο Βαρθολομαίος φάνηκε να επιτυγχάνει το ζητούμενο, βρίσκοντας επαναλαμβανόμενα τετράγωνα. Όσον αφορά στην αναγνώριση της μικρότερης γεωμετρικής μονάδας φάνηκε να αντιμετωπίζει πολύ μεγάλη δυσκολία και χρειάστηκε αρκετή καθοδήγηση για να καταλήξει στη απάντησή του (εικόνα 5).



Εικόνα 5

Ο Βρασίδας, από την άλλη μεριά, κατάφερε να κατασκευάσει πολλά διαφορετικά πολύγωνα και να μαθηματικοποιήσει σωστά το πρόβλημα. Μετέβηκε πολύ γρήγορα στην κατασκευή ρόμβων (εικόνα 6), συνεπώς πέτυχε την οριζόντια μαθηματικοποίηση. Η μόνη του δυσκολία σε αυτό το σημείο ήταν η αναγνώριση της φιγούρας ως ρόμβο, καθώς ο μαθητής το ανέφερε συνεχώς ως παραλληλόγραμμο.

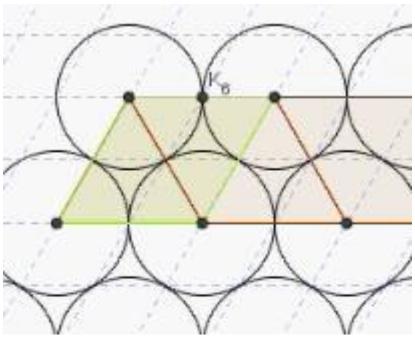


Εικόνα 6

Εδώ, τον απασχόλησε ακόμη το γεγονός ότι οι επαναλαμβανόμενοι ρόμβοι αφήνουν κάποιους χώρους της «αυλής» ακάλυπτους. Εμφανίζεται, λοιπόν, ο χώρος εργασίας, καθώς ο μαθητής φαίνεται να έχει στο μυαλό του μια αυλή συγκεκριμένου σχήματος και μεγέθους. Στην πραγματικότητα, η δυνατότητα κάλυψης μιας αυλής με ένα επαναλαμβανόμενα πολύγωνο, εξαρτάται από το μέγεθος και το σχήμα της αυλής. Για να «λύσει» αυτό το «πρόβλημα», ο μαθητής σκέφτεται ότι θα έπρεπε να χρησιμοποιήσει ένα διαφορετικό πολύγωνο, όπως το αναφέρει στον παρακάτω διάλογο.

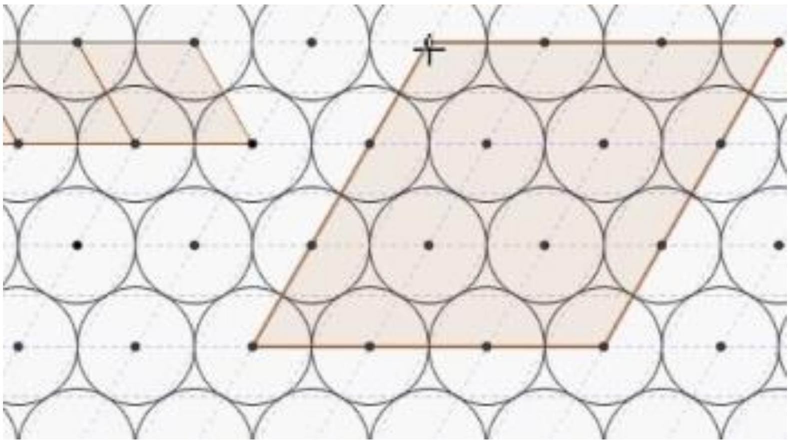
Φ2: Έτσι όπως το έκανες τώρα, τι διαφορά έχει με το προηγούμενο;
Μ2: Έμενε έξω αυτό πριν
Φ2: Έμενε έξω αυτό το κομμάτι
Μ2: Ναι και τώρα μένει αυτό έξω…
Φ2: Για δείξε μου πως ήταν πριν το πολύγωνο και πως είναι τώρα; (δείχνει)
Οπότε τι άλλαξες;
Μ2: Τη βάση.

Παρόλα αυτά, εδώ εμφανίζεται ένα ζήτημα αναγνώρισης φιγούρας καθώς το πολύγωνο που αναφέρει ο μαθητής ως διαφορετικό είναι στην πραγματικότητα ο ίδιος ρόμβος με διαφορετικό προσανατολισμό(εικόνα 7).



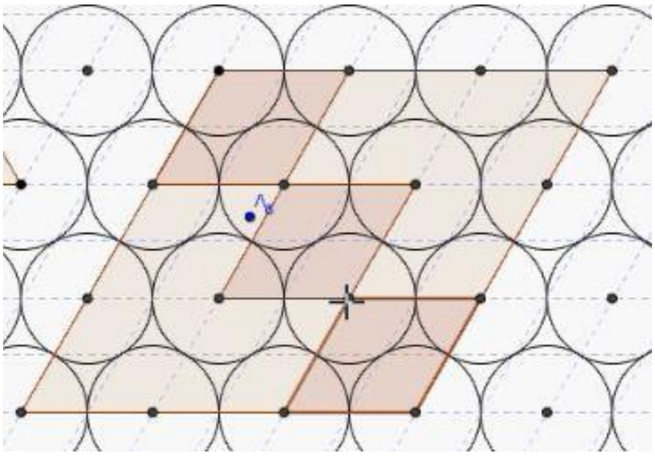
Εικόνα 7

Έπειτα, ο Βρασίδας κατασκεύασε έναν μεγάλο ρόμβο (εικόνα 8), το οποίο μάλιστα λόγω της «ξαπλωμένης» θέσης του αποκαλεί συνεχώς «παραλληλόγραμμο».



Εικόνα 8

Στη συνέχεια, κατασκευάζει κάποιους μικρότερους ρόμβους οι οποίοι περιλαμβάνονται στον μεγαλύτερο και μέσα από διαπραγμάτευση, καταφέρνει να αναγνωρίσει τον μικρό ρόμβο ως υποφιγούρα του μεγάλου (εικόνα 9).



Εικόνα 9

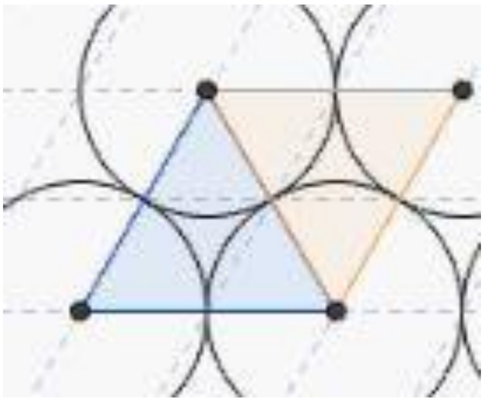
Στο σημείο αυτό εμφανίζεται και πάλι ο χώρος εργασίας καθώς θεωρεί τον μικρό ρόμβο ως «πιο πρακτικό» πολύγωνο κάλυψης με την έννοια ότι μπορεί να καλύψει την επιφάνεια με μεγαλύτερη ακρίβεια, λέγοντας συγκεκριμένα:

M2: Νομίζω ότι αυτό έχει μεγαλύτερη ευελιξία στο να καλύψει..
Φ2: Από ποια άποψη; Δηλαδή τι είδους ευελιξία;
M2: Θεωρούμε ότι αυτές οι πέτρες είναι κολλημένες;
Φ2: Ναι. Όπως είναι εκεί… και θέλουμε να καλύψουμε τον χώρο με τέτοιες πέτρες
M2: Ωραία. Αν ο χώρος έχει κάποιο συγκεκριμένο μέγεθος, αυτές επειδή είναι πιο μικρές, αυτές η 4, θα μπορούσαν να μπουν.. πιο πολύ και να καλύψουν σημεία τα οποία αυτό (το μεγάλο) δεν θα χώραγε

Το επόμενο υποερώτημα ζητούσε να εντοπιστεί η μικρότερη γεωμετρική μονάδα. Και στις δύο περιπτώσεις υπήρξε μια σχετική δυσκολία, καθώς δεν ήταν εύκολο να εντοπίσουν τη ζητούμενη υποφίγουρα. Ο Βρασίδας κάποια στιγμή έχει σχεδιάσει τρίγωνα και αναλογίζεται το ερώτημα. Μετά από αρκετή σκέψη και συζήτηση ο μαθητής έφτασε στον ισχυρισμό ότι το τρίγωνο είναι το μικρότερο επαναλαμβανόμενο πολύγωνο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να καλύψουμε την επιφάνεια. Επίσης, ο μαθητής ανακαλύπτει την σχέση του τριγώνου με τον ρόμβο όπως φαίνεται παρακάτω.

Φ2: Δύο τρίγωνα; Για ξαναπές μου λίγο..
M2: Κάνουν ότι κάνει το ένα παραλληλόγραμμο
Φ2: Και όσον αφορά την κάλυψη, πως το βλέπεις; Αυτό που έλεγες με τις πλευρές.. Έχει κάποια διαφορά αν το έκανες με τέτοιο πολύγωνο;
M2: Και πάλι συμφέρει αυτό. Το τρίγωνο είναι ακόμη πιο μικρό από το παραλληλόγραμμο

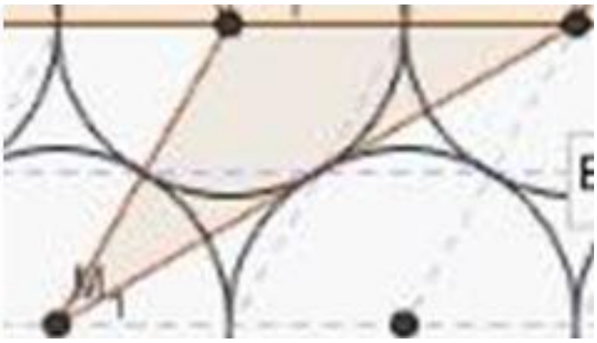
Στο ίδιο σημείο, ο μαθητής φαίνεται να έχει ξεπεράσει την δυσκολία που είχε να αναγνωρίσει δύο πολύγωνα με διαφορετικό προσανατολισμό, ως ίδια. Φτιάχνει επαναλαμβανόμενα τρίγωνα με διαφορετικό προσανατολισμό όπως φαίνεται παρακάτω (εικόνα 10).



Εικόνα 10

Μέσω του προγράμματος τα παιδιά είχαν τη δυνατότητα να οπτικοποιήσουν το πρόβλημα και να κάνουν περισσότερες εικασίες. Στο σημείο της δραστηριότητας όπου ο Βρασίδας έχει ανακαλύψει το μικρότερο επαναλαμβανόμενο πολύγωνο, ήμαστε έτοιμοι να συνεχίσουμε στο επόμενο ερώτημα. Ωστόσο ο μαθητής εργαζόμενος διερευνητικά, κατασκεύασε ένα τρίγωνο διαφορετικό από το προηγούμενο και εξέφρασε τον προβληματισμό του για το αν είναι μικρότερο από αυτό που είχε καταλήξει προηγουμένως.

Ο μαθητής , έκανε αρχικά την εικασία ότι αυτό το καινούργιο τρίγωνο (εικόνα 11) είναι ίσο με αυτό που είχε βρει ως το μικρότερο επαναλαμβανόμενο πολύγωνο.

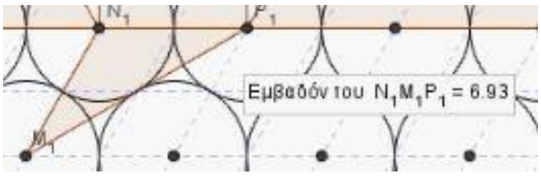


Εικόνα 11

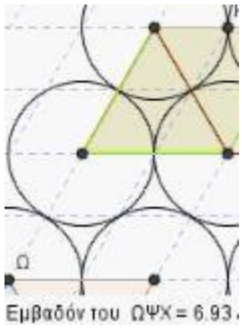
Στο παρακάτω απόσπασμα, φαίνεται ότι ο μαθητής με την δική μας συμβολή, ανακάλυψε ότι ο ισχυρισμός του είναι λανθασμένος.

Μ2: Φτιάχνω και αυτό το τριγωνάκι
Φ2: Ωραία, έχεις φτιάξει και αυτό το τριγωνάκι.
Μ2: Πάω να δω τη διαφορά. Αν έχουν ίδια εμβαδά
Φ2: Τι θα έλεγες εσύ; Τι θα μπορούσες να πεις για τα εμβαδά;
Μ2: Ίδια είναι βασικά… Οι πλευρές τους είναι ίδιες.
Φ2: Είναι ίσες;
Μ2: Οι δύο, οι… πως τις λένε;
Φ2: Αυτό τι τριγωνάκι είναι;
Μ2: Έχουν διαφορετική βάση. Το ένα είναι ισόπλευρο και το άλλο ισοσκελές.
Να το δω λίγο; Ίδιο είναι

Παρόλα αυτά, λόγω της οπτικής επαφής με τα σχήματα, ο Βρασίδας έδινε την εντύπωση ότι διαισθητικά αντιλαμβάνεται ότι τα δύο τρίγωνα είναι ισεμβαδικά. Ακόμη και όταν επιβεβαίωσε ότι τα δύο τρίγωνα δεν είναι ίσα, επέμενε ότι είναι «ίδια». Το λογισμικό σε αυτό το σημείο του προσέφερε την δυνατότητα να εξερευνήσει αυτή την εικασία και όπως φαίνεται παρακάτω (εικόνες 12 και 13), να εξακριβώσει ότι τα τρίγωνα είναι ισεμβαδικά.



Εικόνα 12



Εικόνα 13

Προχωρώντας στο ερώτημα 3 τα παιδιά κλήθηκαν να δουλέψουν συνεργατικά. Μέχρις εκείνη τη στιγμή στις συζητήσεις που έγιναν στο τέλος κάθε ερωτήματος, η συνεργασία δεν πραγματοποιήθηκε. Στόχος, όμως, της δραστηριότητας, πέρα από την επίλυση του ζητούμενου προβλήματος, ήταν να προωθήσει τη συνεργασία και να μπουν τα παιδιά σε μια διαδικασία συζήτησης, ανταλλαγής απόψεων και ιδεών. Όταν τα παιδιά μπαίνουν στην λογική να ανταλλάξουν ιδέες και να επιχειρηματολογήσουν τον τρόπο σκέψης τους, βλέπουν τις αδυναμίες τους και κατανοούν περισσότερο τις διαπραγματευόμενες έννοιες. Αυτός, άλλωστε, είναι και ο στόχος της διερευνητικής μάθησης. Συνεπώς, λόγω της αδυναμίας συνεργασίας τους, πάρθηκε η απόφαση από τους ερευνητές στα επόμενα ερωτήματα, τα οποία ήταν και τα πιο απαιτητικά, να δουλέψουν μαζί σε έναν ηλεκτρονικό υπολογιστή.

Ερώτημα 3

«Υπολογίστε το ποσοστό της επιφάνειας που είναι καλυμμένη από τα νομίσματα για τα διάφορα μοτίβα της κάθε διάταξης, που δημιουργήσατε παραπάνω.

Συγκρίνετε τα ευρήματά σας. Πως τα ερμηνεύετε;»

Στο συγκεκριμένο σημείο αφιερώθηκε αρκετός χρόνος καθώς οι μαθητές αντιμετώπιζαν δυσκολίες στον ορισμό του ποσοστού και τη χρήση της μικρότερης γεωμετρικής μονάδας ώστε να βρουν το ποσοστό αυτό.

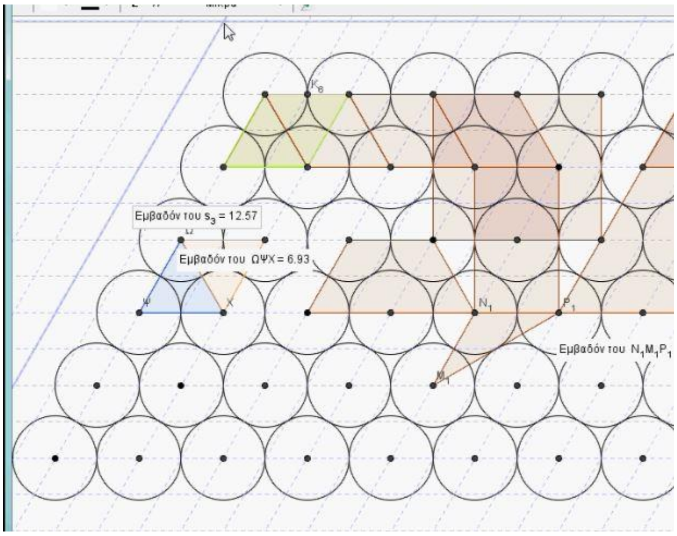
Φ1: Τι είναι ποσοστό δηλαδή?
Μ2: Ένα μέρος ενός συνόλου. Το 50% είναι το μισό π.χ. είναι τα μισό του όλου […]

Πιο συγκεκριμένα, όπως φαίνεται και στο παραπάνω απόσπασμα οι μαθητές δεν ήταν σε θέση να ορίσουν την έννοια του ποσοστού. Συνεχώς, έδιναν παραδείγματα ποσοστών τα οποία ήταν εκφρασμένα επί τοις εκατό.

Στη συνέχεια, δουλεύοντας πάνω στη διάταξη 2, είχαν μεγάλη δυσκολία στο να αποφασίσουν ποιος είναι ο κατάλληλος λόγος που πρέπει να πάρουν. Στον παρακάτω διάλογο φαίνεται ότι η οριζόντια μαθηματικοποίηση επετεύχθη όταν οι μαθητές όρισαν σαν το ζητούμενο ποσοστό το λόγο όλων των κυκλικών δίσκων προς το εμβαδό ολόκληρης της επιφάνειας.

Φ1: Τι πρέπει να βρείτε;
Μ2: Θα υπολογίσουμε το εμβαδό όλου αυτού του πράγματος, μετά θα υπολογίσουμε το εμβαδό ενός κύκλου και μετά θα το πολλαπλασιάσουμε με όλους αυτούς τους κύκλους. Άρα θα έχουμε το εμβαδό όλων των κύκλων και θα διαιρέσουμε αυτό το εμβαδό με το εμβαδό όλης της επιφάνειας.
Φ1: Δηλαδή, πως θα φτάσετε στο ποσοστό;
Μ2: Αυτό θέλετε να το βρούμε σε ένα συγκεκριμένο κομμάτι;
Μ1: Να πάρουμε ένα παραλληλόγραμμο.
[…]
Φ1: Ποιό ποσοστό ψάχνουμε;
Μ2: Για να βρεις το ποσοστό αυτό πρέπει να ξέρεις και πόσο είναι το όλο. Ήθελα να βρω το εμβαδό όλου αυτού, όλων αυτών των κύκλων και να διαιρέσω με όλο το εμβαδό.
Φ1: Γιατί δεν το γράφεις;
Μ2: Γιατί θέλω να πειραματιστώ, για να δω αν αυτό συμβαίνει κι εδώ. Και σε ένα μικρό κομμάτι.

Κατά την διάρκεια του παραπάνω επεισοδίου, ο μαθητής με το δάχτυλό του, έκανε μια κίνηση οριοθέτησης της επιφάνειας που κάλυπταν οι κυκλικοί δίσκοι. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το περιβάλλον, έμοιαζε να προσπαθεί να οριοθετήσει με ευθείες την συγκεκριμένη επιφάνεια(εικόνα 14). Στο συγκεκριμένο συμβάν εμφανίζεται ο χώρος εργασίας. Ο μαθητής για ακόμη μια φορά έδειχνε να έχει στο μυαλό του μια πραγματική αυλή με συγκεκριμένο μέγεθος και σχήμα.



Εικόνα 14

Οι μαθητές, ύστερα από συνεχή παρότρυνση και καθοδήγηση των ερευνητών διερεύνησαν το ζητούμενο πρόβλημα, φτάνοντας σε κάθετη μαθηματικοποίηση. Κατέληξαν, δηλαδή, ότι ο λόγος του αθροίσματος των εμβαδών των κυκλικών τομέων που περιέχονται σε ένα επαναλαμβανόμενο πολύγωνο προς το εμβαδό του συγκεκριμένου πολυγώνου παραμένει σταθερός, και εκφράζει το ζητούμενο ποσοστό. Συνεπώς, όρισαν το λόγο υπολογίζοντας το εμβαδόν της μικρότερης επαναλαμβανόμενης γεωμετρικής μονάδας και των κυκλικών τομέων που περιέχονται σε αυτή. Έπειτα, οι μαθητές με τον ίδιο τρόπο υπολόγισαν άμεσα το ποσοστό κάλυψης και στη Διάταξη 1. Στο τέλος αυτού του ερωτήματος ζητήθηκε από τους μαθητές να διατυπώσουν μια εικασία γύρω από το αν επηρεάζει η ακτίνα των κυκλικών δίσκων τα παραπάνω ποσοστά κάλυψης. Η αρχική τους απάντηση ήταν θετική, έτσι τους ζητήθηκε να το αποδείξουν αλγεβρικά. Υπήρξε δυσκολία στο να μαθηματικοποιήσουν το ζητούμενο και χρειάστηκε καθοδήγηση των ερευνητών. Στη προσπάθειά τους να υπολογίσουν αλγεβρικά το ποσοστό κάλυψης διερευνούσαν τυχαίες επιλογές, ενώ αξίζει να σημειωθεί ότι ο Βρασίδας λειτουργούσε ατομικά, χωρίς να λαμβάνει υπόψιν τις σωστές ιδέες του φίλου του.

Φ2: Για βρες μου αλγεβρικά το εμβαδό του παραλληλογράμμου.
Μ2: Το εμβαδόν του; είναι… αυτό επί αυτό δια 2… όχι διά δυο…
Φ1: Λέει ο Βαρθολομαίος…
Μ2: Πες Βαρθολομαίε.
Μ1: Βάση επί ύψος

Ερώτημα 4

Ανοίξτε το τέταρτο φύλλο Geogebra που σας δίνεται με το όνομα “teliko”.

Πειραματιστείτε με τον δρομέα. Τι παρατηρείται να συμβαίνει;

Ακολούθως, οι μαθητές πέρασαν στο τελευταίο ερώτημα:

4. Ανοίξτε το τέταρτο φύλλο Geogebra που σας δίνεται με το όνομα “teliko”.

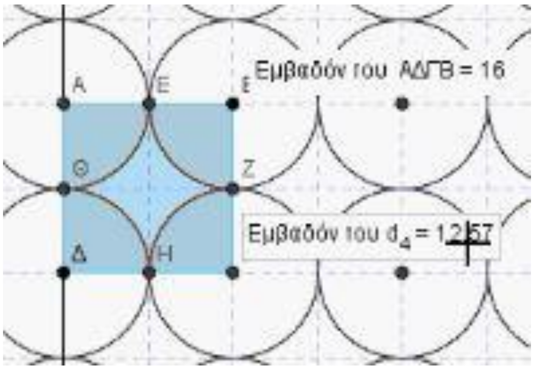
Πειραματιστείτε με τον δρομέα. Τι παρατηρείται να συμβαίνει;

Μπορείτε με τη βοήθεια των παρατηρήσεων αυτών να απαντήσετε στο ερώτημα «ποια από τις δύο διατάξεις είναι η καλύτερη;»

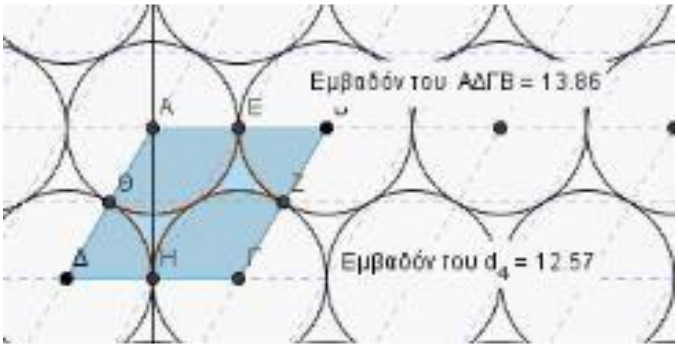
Ανοίγοντας το φύλλο Geogebra, οι μαθητές κλήθηκαν να εξετάσουν τη λειτουργία του δρομέα (μεταβολή γωνίας), και να ορίσουν περιορισμούς γύρω από τις τιμές που μπορεί να πάρει η γωνία. Οι μαθητές, αρκετά άμεσα, μοντελοποίησαν σωστά το ζητούμενο πρόβλημα όπως φαίνεται και στο παρακάτω απόσπασμα:

Φ1: Ωραία. Μπορούμε να το γυρνάμε όσο θέλουμε; Μπορείτε να βάλετε κάποιους έξτρα περιορισμούς;
Μ2: Μέχρι κάποια γωνία πάει συγκεκριμένη.
Φ1: Ποια γωνία;
Μ2: Περιμένετε.
Φ1: Ναι αλλά μπορείς να το πας μέχρι τις 360; Και γιατί;
Μ2: Να εφάπτονται οι κύκλοι πρέπει.
Φ1: Γιατί δεν μπορούμε να το κάνουμε παραπάνω;
Μ2: Δεν μπορούμε να κόψουμε τις πέτρες.
Φ1: Άρα μέχρι που θα πάνε οι γωνίες;
Μ2: Πάνε από 60 μέχρι 120 μοίρες.

Στη συνέχεια ζητήθηκε από τους μαθητές να εστιάσουν στις μεταβολές που παρατηρούνται κατά τη κίνηση του δρομέα και να αποφανθούν ποια είναι η καλύτερη διάταξη.



Εικόνα 15



Εικόνα 16

Αρχικά, ο Βρασίδας ισχυριζόταν ότι ο ρόμβος και το τετράγωνο είναι ισεμβαδικά. Έτσι, δυσκολεύτηκε να καταλήξει στο ζητούμενο του ερωτήματος. Ύστερα από παρότρυνση να διερευνήσει τον ισχυρισμό του, δηλαδή να ορίσει τον τύπο του εμβαδού και των δύο κανονικών πολυγώνων κατέληξε στο ότι υπάρχει τελικά διαφορά. Στην προσπάθειά του να βρει τη διαφορά των εμβαδών έφερε το ύψος του τετραγώνου και παρατήρησε ότι καθώς μετακινεί το δρομέα, το ύψος μικραίνει, συνεπώς μικραίνει και το εμβαδόν. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το λογισμικό τον βοηθάει στην επίτευξη μιας κάθετης μαθηματικοποίησης.

Μ2: Να πω την ιδέα μου; Και στα δύο σχήματα ξέρουμε ότι έχουν διαφορετικό εμβαδό. Αλλά ξέρουμε ότι περιέχει έναν κύκλο μέσα. Αν αφαιρέσουμε και από τα δύο τον έναν κύκλο, βρίσκουμε ένα εμβαδό. Το εμβαδό αυτό είναι το κενό. Άρα καταλαβαίνουμε ότι στην περίπτωση αυτή (τετράγωνο) έχει μεγαλύτερο κενό από ότι εδώ πέρα (ρόμβος).

Στο παραπάνω απόσπασμα μετά από διερεύνηση του μαθητή καταλήγει στο τελικό συμπέρασμα επιτυγχάνοντας κάθετη μαθηματικοποίηση.

Συνοψίζοντας, καθ’ όλη τη διάρκεια της παρέμβασης παρατηρήθηκε έντονα η επιθυμία των μαθητών για διερεύνηση. Οι μαθητές, επίσης, επηρεάστηκαν αρκετά από το πλαίσιο του προβλήματος. Κάτι που άλλες φορές λειτούργησε προς θετική κατεύθυνση (σωστή μοντελοποίηση) και άλλες τους περιόρισε. Ένα ακόμα στοιχείο που αξίζει να σημειωθεί είναι η χρήση του λογισμικού Geogebra. Οι μαθητές μέσω της οπτικοποίησης παροτρύνθηκαν να διερευνήσουν, να κάνουν εικασίες, να τις επιβεβαιώσουν και τελικά να οδηγηθούν στη ζητούμενη μαθηματικοποίηση.

Σύγκριση με προηγηθείσα παρέμβαση χωρίς λογισμικό.

Η αντίστοιχη δραστηριότητα είχε ξαναγίνει χωρίς όμως τη χρήση του λογισμικού. Συνεπώς, χρήσιμη είναι μία σύγκριση μεταξύ των δύο παρεμβάσεων. Οι λόγοι αυτών των διαφοροποιήσεων είναι θεωρούμε όχι μόνο η χρήση του λογισμικού, αλλά και το διαφορετικό πλαίσιο πραγματοποίησης στην κάθε περίπτωση, καθώς για παράδειγμα, η προηγηθείσα παρέμβαση πραγματοποιήθηκε σε τάξη.

Αρχικά, και στις δύο παρεμβάσεις παρατηρήθηκε τεράστιο πρόβλημα εκ μέρους των μαθητών στην διαδικασία εύρεσης των ποσοστών. Γενικά, σε όλη τη διάρκεια των παρεμβάσεων παρατηρήθηκε πολύ μεγάλη δυσκολία κάθετης μαθηματικοποίησης.

Στα θετικά στοιχεία που προσέφερε το λογισμικό, ήταν ότι οι δυνατότητες του προσέφεραν την οπτικοποίηση του προβλήματος, καθώς οι μαθητές εστίασαν κατευθείαν σε αυτό που είχαν οπτικά σχεδιασμένο μπροστά τους. Ακόμα, αποτέλεσε μία μεγάλη ώθηση για τους μαθητές στη δημιουργία εικασιών, τη διερεύνησή τους και την απόδειξη τους.

Στα στοιχεία που δεν μας άρεσαν, τώρα, συμπεριλαμβάνουμε το ότι στην προηγηθείσα παρέμβαση ή καθοδήγηση εκ μέρους των ερευνητών ήταν πραγματικά ελάχιστη, ενώ σε αυτήν την παρέμβαση ο ρόλος τους χρειάστηκε να είναι πολύ καθοδηγητικός, κυρίως λόγω της έλλειψης εξοικείωσης των μαθητών με το λογισμικό. Ένα ακόμα στοιχείο που δεν μας άρεσε στην παρέμβαση ήταν ότι οι μαθητές δεν είχαν καμία επικοινωνία μεταξύ τους. Τον λόγο τον είχε κυρίως ο ένας από τους δύο (Βρασίδας) και οι ιδέες του άλλου δεν ήταν συχνές και δεν διατυπώνονταν, ή όταν διατυπώνονταν δεν λαμβάνονταν υπόψη από τον άλλο.

Τι θα αλλάζαμε;

Αρχικά, αυτό που θα αλλάζαμε αν ξανακάναμε την παρέμβαση θα ήταν να δώσουμε περισσότερο χρόνο στους μαθητές να εξοικειωθούν καλά με το λογισμικό και τις δυνατότητές του. Πιστεύουμε ότι αυτό θα βοηθούσε πολύ και στην καλύτερη και λιγότερο χρονοβόρα εφαρμογή της δραστηριότητας, και στην επίτευξη επικοινωνίας μεταξύ των παιδιών, αλλά φυσικά και στην λιγότερη καθοδήγηση εκ μέρους μας. Τέλος, για μία σωστή σύγκριση με την προηγηθείσα παρέμβαση θα ήταν προτιμότερο η παρέμβαση να γίνει πάλι σε τάξη.

Τι μάθαμε από το σχεδιασμό, την εφαρμογή και την ανάλυση της παρούσας δραστηριότητας;

Αυτό που μάθαμε από το σχεδιασμό, την εφαρμογή και την ανάλυση της παρούσας δραστηριότητας είναι αρχικά ότι και τα τρία αυτά σημεία είναι πολύ δύσκολα και πολύπλοκα να τα πραγματοποιήσει κανείς με επιτυχία. Οι παράμετροι που πρέπει να ληφθούν υπόψη είναι πάρα πολλοί και ο καθένας παίζει το ρόλο του. Για παράδειγμα, η εξοικείωση των παιδιών με το λογισμικό είναι καθοριστικής σημασίας για την έκβαση της παρέμβασης, καθώς μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο ως προς την επιτυχή εφαρμογή της. Επίσης, η καθοδήγηση που δίνουμε κάθε φορά πρέπει να είναι πολύ προσεγμένη, καθώς μπορεί να επηρεάσει αρνητικά τη μάθηση μέσω διερεύνησης εκ μέρους των μαθητών. Τέλος, ένα ρεαλιστικό πρόβλημα που πηγάζει από κάποιον χώρο εργασίας αποτελεί από τη μία πλευρά κίνητρο για τους μαθητές να δουλέψουν πάνω σε αυτό και να το διερευνήσουν, από την άλλη όμως μπορεί να αποτελέσει παγίδα για αυτούς, καθώς τείνουν να κουβαλάνε τους φυσικούς περιορισμούς του. Επιπροσθέτως, είναι δύσκολο να λάβει κανείς όλα αυτά τα σημεία υπόψη κατά το σχεδιασμό της δραστηριότητας, και πρέπει να είναι σαφώς προετοιμασμένος για την αποφυγή ή την αντιμετώπισή τους. Παράλληλα, η ανάλυση της δραστηριότητας θα πρέπει πάντα να γίνεται με μεγάλη προσοχή, καθώς ο τρόπος ερμηνείας όλων αυτών είναι καθοριστικός για τα αποτελέσματα της.

Επέκταση της δραστηριότητας.

Ως επέκταση της δραστηριότητας προτείνεται η μοντελοποίηση της παραμετρικής συνάρτησης εμβαδού του πολυγωνικού μοτίβου ως προς τη γωνία (από το τετράγωνο μεταβαίνουμε στον ρόμβο) με παράμετρο την ακτίνα ρ (f(x)=4ρ2ημω). Εδώ, οι μαθητές πρέπει και με τη βοήθεια του προγράμματος αλλά και με την κατάλληλη τυπική απόδειξη να περιγράψουν τις ιδιότητές της, όπως για παράδειγμα το πεδίο ορισμού (η γωνία πάει από 60^o μέχρι 120^o,ποιο είναι το σύνολο τιμών, η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή)…

ΑΝΑΦΟΡΕΣ:

Arigue, M. & Blomjøj, B. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. ZDM Mathematics Education (45),pp.797-810

Freudenthal, H. (1991). Revisiting Mathematics Education. China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Glass, B. & Deckert, W. (2001). Making Better Use of Computer Tools in Geometry.*Mathematics Teacher*, v94 n3 p224-29.

Jurdak, M. & Shanin I. (2001). Problem Solving Activity in the Workplace and the School: The Case of Constructing Solids. *Educational Studies in Mathematics*(47), pp. 297-315.

Knasel, E. (2005). Maths for life and work:defining functional mathematics. *Key Skills Journal*(2).

Menon, U. (????). Mathematisation – Vertical and Horizontal. Proceedings of epiSTEME 5, India.

Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2009). Cognitive Styles, dynamic geometry and measurement performance. *Educational Studies of Mathematics*(70), pp. 5-26.

Zulkardi, H. (2010). How to Design Mathematics Lessons based on the Realistic Approach

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ:

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ (Geogebra)

"Εργάζεστε σαν αρχιτέκτονας / σχεδιαστής εξωτερικού χώρου. Ο πελάτης σας έχει δύσκολο γούστο! Δεν του αρέσουν οι γωνίες, γι' αυτό θα ήθελε να πλακοστρωθεί η αυλή του με κυκλικές πέτρες. Θέλει, επίσης, οι πέτρες να καλύψουν τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια ώστε το γρασίδι που φυτρώνει ανάμεσα τους να είναι όσο το δυνατόν λιγότερο. Η δική σας δουλειά, λοιπόν, είναι να βρείτε τη διάταξη των πετρών που αφήνει τη λιγότερη δυνατή κενή επιφάνεια ανάμεσά τους."

5. Ανοίξτε το πρώτο φύλλο Geogebra που σας δίνεται με το όνομα "arxiko".

Με ποιο τρόπο θα μπορούσε ο αρχιτέκτονας να διατάξει τις κυκλικές πέτρες; Πειραματιστείτε.

6. Ανοίξτε το δεύτερο και το τρίτο φύλλο Geogebra που σας δίνεται με τα ονόματα "basiko1" και "basiko2".
    a. Εστιάστε στα κέντρα των νομισμάτων. Για κάθε μία από τις διατάξεις που σας δίνονται, σχεδιάστε επαναλαμβανόμενα πολύγωνα με τα οποία να καλύψετε όλη την επιφάνεια.
    b. Για κάθε διάταξη βρείτε το μικρότερο επαναλαμβανόμενο πολύγωνο που δημιουργείται, με βάση το υποερώτημα 1.

7. Υπολογίστε το ποσοστό της επιφάνειας που είναι καλυμμένη από τα νομίσματα για τα διάφορα μοτίβα της κάθε διάταξης, που δημιουργήσατε παραπάνω.

Συγκρίνετε τα ευρήματά σας. Πως τα ερμηνεύετε;

8. Ανοίξτε το τέταρτο φύλλο Geogebra που σας δίνεται με το όνομα “teliko”.

Πειραματιστείτε με τον δρομέα. Τι παρατηρείται να συμβαίνει;
Μπορείτε με τη βοήθεια των παρατηρήσεων αυτών να απαντήσετε στο ερώτημα «ποια από τις δύο διατάξεις είναι η καλύτερη;»
Τεκμηριώστε την απάντησή σας με τη βοήθεια του περιβάλλοντος.