

Ενσωμάτωση Τεχνολογίας στη Διδακτική των Μαθηματικών (Δ8)

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟ ΧΩΡΟ
ΕΡΓΑΣΙΑΣ**

ΑΘΗΝΑ 10/02/2015

Διδάσκων

Γ. Ψυχάρης

ΕΛΕΝΗ ΚΑΖΑΚΟΥ – ΜΑΡΙΟ ΓΚΟΥΡΙ - ΝΙΚΗ ΜΟΥΤΑΦΗ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Μαθηματικό Περιεχόμενο.....	3
Στόχοι.....	3
Πλαίσιο Δραστηριότητας.....	3
Περιγραφή Δραστηριότητας.....	3
Ανάλυση Δραστηριότητας.....	4
Θεωρητικό Πλαίσιο.....	17
Ανάλυση Παρέμβασης.....	19
Τι θα αλλάζαμε.....	45
Τι μάθαμε από το σχεδιασμό, την εφαρμογή και την ανάλυση της δραστηριότητας	45
Επέκταση της δραστηριότητας	45
Βιβλιογραφία.....	46

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ

Το πρόβλημα αφορά στη μαθηματικοποίηση ενός πραγματικού προβλήματος που απαντάται στο χώρο εργασίας και συγκεκριμένα στον ανεφοδιασμό με υγραέριο ενός πρατηρίου υγρών καυσίμων. Η μοντελοποίησή του απαιτεί χρήση μαθηματικών εργαλείων καθώς και τη χρήση του λογισμικού *geogebra*, το οποίο βοηθά σημαντικά στη διερευνητική μάθηση.

ΣΤΟΧΟΙ

- διαδικασία **μαθηματικοποίησης** από την πλευρά των μαθητών (εμπόδια, δυνατότητες και κατασκευή νοημάτων για τις εμπλεκόμενες μαθηματικές έννοιες).
- αν και πώς εμφανίζεται η **διερεύνηση** αλλά και ο **χώρος εργασίας** στη δραστηριότητα των μαθητών.

ΠΛΑΙΣΙΟ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Η δραστηριότητα αυτή πραγματοποιήθηκε μέσα στο σχολικό περιβάλλον, στο εργαστήριο Η/Υ. Συμμετείχαν 6 + 1 μαθητές (η μία μαθήτρια χρησιμοποιήθηκε για να βοηθήσει στη διεξαγωγή της έρευνας) της Γ' Γυμνασίου. Σχηματίστηκαν 3 ομάδες των δύο. Την κάθε ομάδα ανέλαβε ένας καθηγητής. Η κάθε ομάδα είχε στη διάθεσή της έναν Η/Υ εφοδιασμένο με την εφαρμογή *geogebra* για να πειραματιστούν οι μαθητές. Επίσης, κάθε ομάδα είχε στη διάθεσή της ένα φύλλο εργασίας όπου στην αρχή παρουσιαζόταν το πραγματικό πρόβλημα που αφορούσε στο χώρο εργασίας και στη συνέχεια ακολουθούσαν δραστηριότητες που είχαν σχεδιαστεί από τους καθηγητές.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ

Η δραστηριότητα ξεκίνησε με την ανάγνωση του βασικού προβλήματος που έπρεπε οι μαθητές να μαθηματικοποιήσουν. Το πρόβλημα, όπως αναφέραμε, αφορούσε στον ανεφοδιασμό ενός πρατηρίου υγρών καυσίμων με υγραέριο.

Πρέπει να τονίσουμε ότι αρχικά οι μαθητές δεν εργάστηκαν στο πραγματικό πλαίσιο του προβλήματος, το οποίο αφορούσε μελέτη όγκου του οριζοντίου κυλίνδρου, καθώς η διαδικασία αυτή είναι αδύνατη από μεριάς τους και απαιτεί τη γνώση ανωτέρων μαθηματικών. Για το λόγο αυτό η δομή της δραστηριότητας ήταν τέτοια ώστε οι μαθητές να πειραματιστούν πρώτα με τον κάθετο τοποθετημένο κύλινδρο. Καθώς από κάθε οριζόντια δομή του προκύπτει ένας κύλινδρος ενώ στην περίπτωση του οριζοντίου, το πρίσμα που προκύπτει από μία τέτοια διατομή είναι άγνωστο.

Στο πρώτο μισό της δραστηριότητας όπου δεν έγινε χρήση του λογισμικού *geogebra*, οι μαθητές έπρεπε να κάνουν κάτι το οποίο δεν είχαν ξανακάνει: Έπρεπε να συνδυάσουν όλες τις

μαθηματικές γνώσεις που είχαν αποκτήσει από προηγούμενες τάξεις σε ένα πρόβλημα άγνωστο σε αυτούς. Εδώ φαίνεται και η κάθετη αναδιοργάνωση των προηγούμενων γνώσεων, ώστε τελικά να επιτευχθεί η κατασκευή καινούριας γνώσης (*Dreyfus*). Η εισαγωγή του λογισμικού έγινε στο 2^ο μισό της δραστηριότητας, όπου πλέον οι μαθητές, έχοντας πειραματιστεί με τον κάθετα τοποθετημένο κύλινδρο, καλούνταν να πειραματιστούν στην περίπτωση του οριζόντιου κυλίνδρου.

Οι μαθητές έκαναν εικασίες και στη συνέχεια έλεγχαν τις απαντήσεις τους μέσω παρατηρήσεων που έκαναν ενώ πειραματίζονταν με το λογισμικό *geogebra*. Κατέγραφαν τις ιδέες τους στο φύλλο εργασίας και κατέληγαν σε κάποια συμπεράσματα που αφορούσαν στη γραφική παράσταση. Στο τελικό κομμάτι οι μαθητές έπρεπε να φύγουν από τη μαθηματοποίηση και να επιστρέψουν στο πραγματικό πρόβλημα που είχαν να αντιμετωπίσουν ώστε να δώσουν μία λύση.

Διδακτική παρέμβαση με μαθητές και παρουσίαση:

Διερευνητική μάθηση Μαθηματικών και χώρος εργασίας

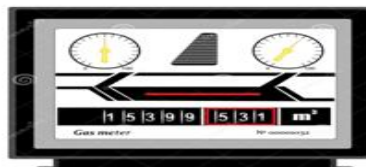
Ανάλυση της δραστηριότητας: (περιεχόμενο, φύλλο εργασίας, χρήση εργαλείων, στόχοι και αναμενόμενες ενέργειες/δυσκολίες των μαθητών, στόχευση και αιτιολόγηση των σχεδιαζόμενων παρεμβάσεων των ερευνητών).

Αρχικά δίνεται το φύλλο εργασίας που ξεκινά με μια συνοπτική περιγραφή του προβλήματος. Δίνουμε χρόνο στους μαθητές να το διαβάσουν και στη συνέχεια γίνεται μια συζήτηση ώστε να τους βοηθήσουμε να μεταφερθούν νοητά στο χώρο που τοποθετείται χωρικά το πρόβλημα (το βενζινάδικο), να σκεφτούν τον εαυτό τους στη θέση του υπαλλήλου (του Γιώργου) ή αυτού που θα τον βοηθήσει, αλλά και αντίστροφα, να σκεφτούν τη δεξαμενή και το χώρο του βενζινάδικου σαν να είναι η τάξη. Τους βοηθάμε δηλαδή να βρίσκονται ταυτόχρονα στην τάξη αλλά (νοητικά) και στο μέρος που λαμβάνει χώρα το πρόβλημα. Οι τρεις πρώτες δραστηριότητες στην ουσία προετοιμάζουν τους μαθητές αρχικά να κινηθούν σε γνωστές μαθηματικές περιοχές αλλά μέσα από ένα πραγματικό πρόβλημα και να εμπλακούν σιγά σιγά στη διαδικασία της διερεύνησης και της εικασίας. Όταν κατά την τέταρτη δραστηριότητα εισάγεται το αρχείο του *geogebra*, οι μαθητές έχουν ήδη διαισθητικά και με γνώριμα εργαλεία προσεγγίσει το πρόβλημα και έχουν κάνει εικασίες. Οπότε με τη χρήση του λογισμικού θα έρθει ο πειραματισμός και η επιβεβαίωση.

Φύλλο εργασίας

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

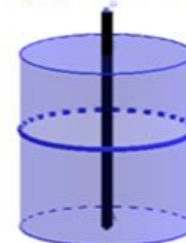
Ο Γιώργος εργάζεται σε ένα βενζινάδικο. Κατά την παραλαβή υγραερίου με άδεια δεξαμενή, ο προμηθευτής του παραδίδει 7.000 λίτρα (ποσότητα που καταγράφεται στον μετρητή του βυτίου). Ο Γιώργος προκειμένου να επιβεβαιώσει την ποσότητα που παρέλαβε (πέρα από την ένδειξη του μετρητή της δεξαμενής), πρέπει να μετρήσει με τη διαβαθμισμένη σε εκατοστά (cm) ράβδο, βυθίζοντάς την από ειδική υποδοχή μέσα στην κυλινδρική δεξαμενή του υγραερίου προκειμένου να διαπιστώσει πόσο έχει ανεβεί η στάθμη του υγρού. Με ποιόν τρόπο ο Γιώργος θα μπορέσει να κάνει τη διασταύρωση χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις της ράβδου;



Το πρόβλημα διαβάζεται από τους μαθητές και συζητείται με τον εκπαιδευτικό. Μπορεί να γίνει αναφορά σε πιο οικείες καταστάσεις, όπως η παραλαβή πετρελαίου στην πολυκατοικία, ώστε να γίνει πιο κατανοητό. Περιγράφουμε επίσης και τον τρόπο με τον οποίο οι προμηθευτές μετρούν αντίστοιχα το πετρέλαιο ή το υγραέριο, δηλαδή αναφέρουμε τον μετρητή που έχουν τα βυτία (βλέπουν και σχετική εικόνα). Πριν προχωρήσουν στις δραστηριότητες, τους εξηγούμε ότι δεν ξεκινάμε αμέσως προσπαθώντας να απαντήσουμε στο πρόβλημα, αλλά με παρόμοια προβλήματα που θα μας βοηθήσουν κι ίσως μας οδηγήσουν κάποια στιγμή στη λύση του αρχικού προβλήματος.

Δραστηριότητα 1^α : Θεωρούμε ότι η δεξαμενή υγραερίου έχει σχήμα κυλίνδρου ύψους **2m** και τοποθετημένου κατακόρυφα. Αν μεταξύ 10cm και 20cm έχουμε όγκο **314 lt**, πόσος πιστεύετε θα είναι ο όγκος

1. Μεταξύ 20 cm και 30 cm;
2. Μεταξύ 30 cm και 40 cm;
3. Μεταξύ 20 cm και 40 cm;
4. Μεταξύ 20 cm και 23 cm;



Στόχοι και αναμενόμενες ενέργειες/δυσκολίες

Ζητάμε από τους μαθητές να αναγνωρίσουν ότι σε σταθερές υψομετρικές διαφορές αντιστοιχούν ίσοι όγκοι και στη συνέχεια τον τρόπο που συμεταβάλλονται αυτά τα μεγέθη, δηλαδή διπλάσια υψομετρική διαφορά άρα και διπλάσιο ύψος κτλ. Τέλος, βάζοντας μια μη εύκολη αριθμητική διαφορά, τους προκαλούμε να αναγνωρίσουν ότι τα μεγέθη είναι ανάλογα, άρα μπορούν να χρησιμοποιήσουν αλγεβρικά εργαλεία αναλόγων ποσών, όπως αναγωγή στη μονάδα, απλή μέθοδο των τριών αλλά κυρίως τη δημιουργία αναλογιών, που τους βοηθά να αντιμετωπίσουν οποιαδήποτε περίπτωση.

Πιθανές δυσκολίες είναι οι μαθητές να μη μπορέσουν να γενικεύσουν ή να αναγνωρίσουν τα ανάλογα ποσά και τη χρήση των αναλογιών για να λύσουν εξίσωση.

Στόχευση και αιτιολόγηση

Θα πρέπει ολοκληρώνοντας τη δραστηριότητα, ο εκπαιδευτικός να έχει καθοδηγήσει τους μαθητές του να μπορούν να αναγνωρίζουν ότι πρόκειται για μια «κατάσταση» αναλόγων ποσών κι ότι αυτή μπορεί να λυθεί με το «στήσιμο» μιας κατάλληλης αναλογίας και την επίλυση αυτής.

Δραστηριότητα 2^η : Α) Τι όγκο έχουμε όταν το ύψος της στάθμης είναι 110cm;

.....

.....

Β) Αν ο όγκος από 500lt μειωθεί σε 200lt, κατά πόσα cm θα έχει πέσει η στάθμη;

.....

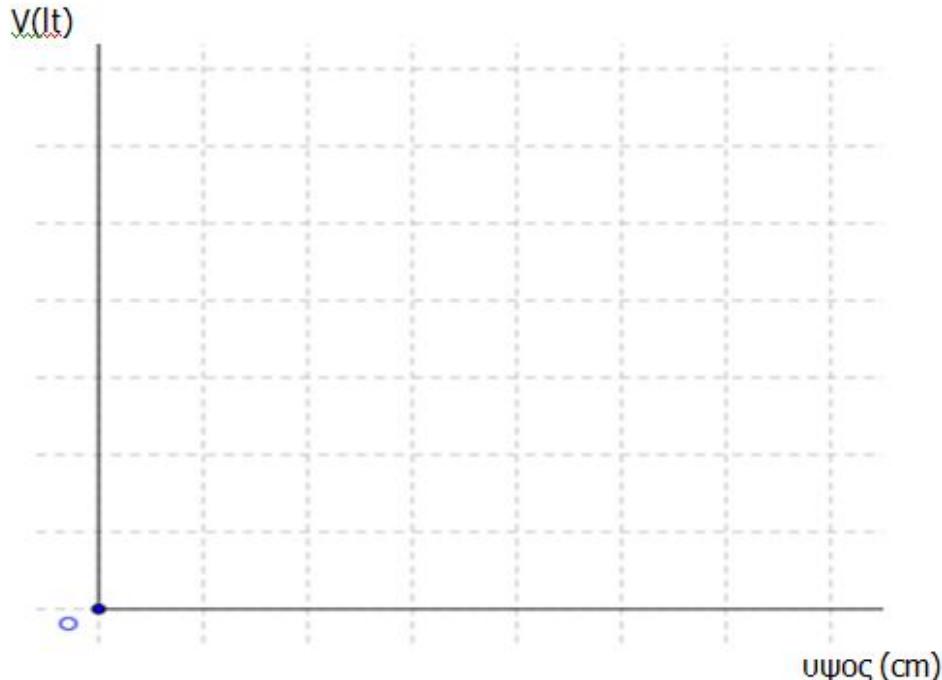
.....

Γ) Μπορείτε να υπολογίσετε τον συνολικό όγκο της δεξαμενής και το εμβαδό της βάσης;

.....

.....

Δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του όγκου του υγραερίου σε συνάρτηση με το ύψος της στάθμης καθώς αυτή αυξάνει



Ε) Με ποιό τρόπο μεταβάλλονται τελικά τα δυο μεγέθη (όγκος και στάθμη);

Μπορείτε να γράψετε τύπο:

Στόχοι κι αναμενόμενες ενέργειες/δυσκολίες

Στα υποερωτήματα Α, Β και Γ, στόχος είναι οι μαθητές να συνειδητοποιήσουν ότι η οποιαδήποτε μεταβολή (αύξηση ή μείωση) είτε στη στάθμη είτε στον όγκο, καθώς και ακραίες θέσεις (γεμάτος κύλινδρος) μπορεί να αντιμετωπιστεί σαν ένα πρόβλημα αναλόγων ποσών και μπορεί να απαντηθεί με τη βοήθεια των αναλογιών.

Ειδικά, τώρα στον υπολογισμό του εμβαδού της βάσης, θέλουμε να διαπιστώσουμε κατά πόσο οι μαθητές θα λειτουργήσουν μηχανιστικά-διαδικαστικά προσπαθώντας να το βρουν από τον τύπο $E=\pi r^2$, οπότε και δεν θα τα καταφέρουν, ή θα σκεφτούν συσχετιστικά και θα χρησιμοποιήσουν τον τύπο του όγκου για να βρουν τη βάση, **συνδυάζοντας προηγούμενες πληροφορίες**, πράγμα που είναι ένας βασικός στόχος.

Ένας δεύτερος σημαντικός στόχος είναι να συνειδητοποιήσουν ότι η βάση παραμένει **αμετάβλητη** για ένα συγκεκριμένο κύλινδρο και δεν επηρεάζει ούτε επηρεάζεται από τις μεταβολές των υπόλοιπων μεγεθών.

Στα υποερωτήματα Δ και Ε στοχεύουμε στο να συνδέσουν οι μαθητές τα δύο μεγέθη (όγκο και στάθμη) και τη συμμεταβολή τους μέσα από τη γραφική αναπαράσταση, συνειδητοποιώντας μάλιστα ότι πρόκειται για κομμάτι **ευθείας** και μέσα από έναν τύπο ($y=ax$) όπου το a εκφράζει κάτι πολύ συγκεκριμένο και ήδη υπολογισμένο (Εμβαδό βάσης). Επίσης δίνεται η ευκαιρία να συμφωνήσουν στο ποια θα είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή.

Πιθανές δυσκολίες στα υποερωτήματα Α,Β,Γ είναι να μην μπορέσουν οι μαθητές να στήσουν σωστά την αναλογία, είτε βάζοντας αναντίστοιχα ποσά όγκου-στάθμης, είτε τοποθετώντας τα σε λάθος θέση (αριθμητή-παρονομαστή).

Στα Δ και Ε πιθανό να μην ανακαλέσουν την ευθεία ως γραφική παράσταση αναλόγων ποσών ή να μην μπορούν να προσδιορίσουν το a του τύπου ή να μην μπορούν να ερμηνεύσουν-αναγνωρίσουν το a ως το εμβαδό της βάσης.

Στόχευση και αιτιολόγηση

Ο εκπαιδευτικός πρέπει με την ολοκλήρωση της δραστηριότητας να είναι βέβαιος ότι οι παραπάνω παρερμηνείες και δυσκολίες έχουν εξηγηθεί επαρκώς στους μαθητές που δυσκολεύτηκαν. Επίσης είναι καλό να συζητηθεί η γραφική παράσταση, ώστε να μπορέσουν στις επόμενες δραστηριότητες οι μαθητές να έχουν συγκρατήσει την «εικόνα» και να μπορέσουν να κάνουν συνδέσεις.



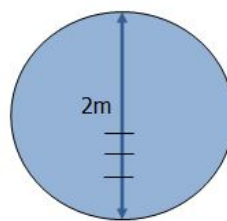
Δραστηριότητα 3^η : Το πρόβλημα που έχει να αντιμετωπίσει ο Γιώργος, είναι λίγο πιο πολύπλοκο γιατί στην πραγματικότητα η δεξαμενή υγραερίου είναι τοποθετημένη οριζόντια.

1. Πιστεύετε πως ο τρόπος που μεταβάλλεται τώρα ο όγκος του υγραερίου (καθώς αλλάζει η στάθμη), παραμένει ίδιος με πριν;

.....

2. Ο Γιώργος μετράει το πρωί της Δευτέρας ύψος υγραερίου 90cm και το μεσημέρι 70cm. Την Τρίτη ο συνάδελφος του Γιώργου μετρά το πρωί 60cm και το μεσημέρι 40cm. Η μείωση του όγκου είναι ίδια στις 2 περιπτώσεις και γιατί;

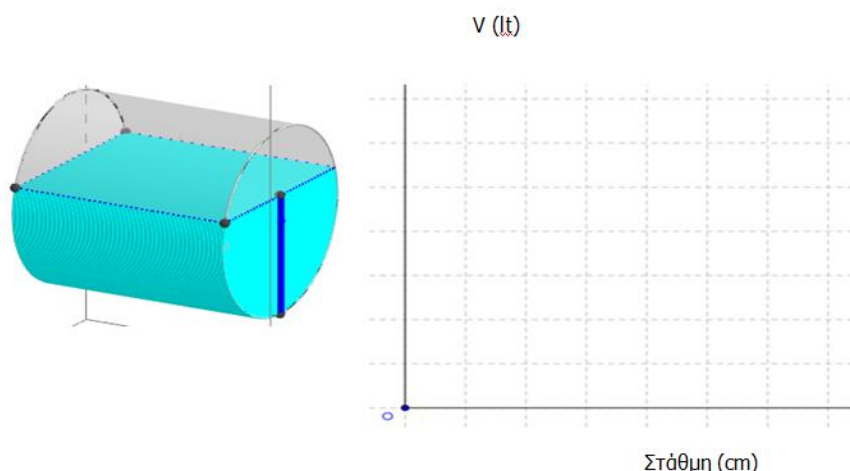
.....



3. Αν μεταξύ 10cm με 15cm, αντιστοιχεί όγκος 100lt, πόσος όγκος αντιστοιχεί στο διάστημα 15cm με 20cm και πόσος στο 10cm με 20cm;
 Απ.: 15-20cm → lt, 10-20cm → lt

4. Μπορείτε να βρείτε διάστημα πλάτους 5cm στο οποίο να μπορείτε με βεβαιότητα να πείτε ότι αντιστοιχούν τα ίδια λίτρα με το διάστημα 10cm-15cm;

.....
 Να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση του όγκου σε συνάρτηση της στάθμης του υγραερίου καθώς αυτή αυξάνει.



Στόχοι κι αναμενόμενες ενέργειες/δυσκολίες

Η δραστηριότητα 3 επαναφέρει τους μαθητές στο αρχικό πρόβλημα και ταυτόχρονα εξειδικεύει τα ερωτήματα στη μελέτη του τρόπου μεταβολής στάθμης-όγκου συνδέοντάς τα ταυτόχρονα με τις προηγούμενες δραστηριότητες.

Αναμένουμε εδώ από τους μαθητές να:

- Συνδέσουν και να συγκρίνουν διαφορετικές καταστάσεις (κατακόρυφος-οριζόντιος).
- Να προβληματιστούν (αλλάζει κάτι ή δεν αλλάζει, και τι είναι αυτό και πώς μεταβάλλεται) και κυρίως αν συνεχίζουν να έχουν μια κατάσταση αναλόγων ποσών.
- Να εικάσουν μέσα από νοητικά σχήματα (φαντάζονται), υποβοηθούμενοι ίσως και με χειραπτικά (ένα μπουκάλι με νερό τοποθετημένο οριζόντια ή ένα τυλιγμένο φύλλο χαρτιού).
- Να προσεγγίσουν διαισθητικά (δεν έχουν άλλο τρόπο να αντιστοιχίσουν υψομετρική διαφορά και όγκο).
- Να συγκρίνουν μέσα στην ίδια κατάσταση (οριζόντιος κύλινδρος) και να ανακαλύψουν ομοιότητες (πχ συμμετρίες 3.2) και διαφορές (ο τρόπος που γεμίζει ως τη μέση και ο τρόπος που γεμίζει μετά τη μέση).
- Να σχεδιάσουν διαισθητικά γραφική παράσταση, η οποία στη συνέχεια είτε θα επιβεβαιωθεί είτε θα απορριφθεί.

Στόχευση και αιτιολόγηση

Καθώς εδώ τα ερωτήματα είναι ανοιχτά και διερευνητικά, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει:

- να ενθαρρύνει τους μαθητές ώστε να εκφράζονται και να ανταλλάσσουν απόψεις.
- να επιλέγει εκείνες τις στρατηγικές ή «λέξεις-κλειδιά» των μαθητών, ώστε η συζήτηση να είναι παραγωγική και να οδηγεί σε μαθηματικές έννοιες.
- να ζητά από τους μαθητές να εξηγούν τις απαντήσεις τους.
- όταν αντιμετωπίζουν δυσκολίες να τους βοηθά έμμεσα, χωρίς να απαντά ο ίδιος στο ερώτημα ή να διορθώνει το λάθος.
- να «προκαλεί» συνεχώς την ερευνητική-πειραματική διάθεση ρωτώντας συχνά (π.χ. *πώς, γιατί, κι αν όχι, είσαι σίγουρος κτλ.*) ή βοηθώντας τους μαθητές να εντοπίζουν σημεία στο πρόβλημα που δεν δέχονται μόνο μια απάντηση ή η απάντηση είναι δυσδιάκριτη.

Δραστηριότητα 4^η: Στο αρχείο δυναμικής γεωμετρίας, κινείστε το δρομέα που ελέγχει το ύψος της στάθμης και συμπληρώστε τον πίνακα τιμών:

Ύψος στάθμης (μέτρηση ράβδου)						1m								2m
Όγκος υγραερίου														

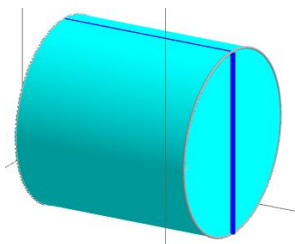
Να μεταφέρετε τα ζεύγη του πίνακα στο παρακάτω σύστημα αξόνων και να προσπαθήσετε να προσεγγίσετε ξανά τη γραφική παράσταση



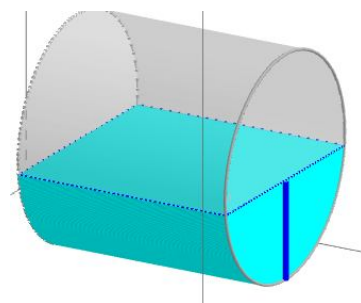
Στη δραστηριότητα 4, εισάγεται για πρώτη φορά το λογισμικό. Οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να μεταβάλλουν τη στάθμη του κυλίνδρου μέσω δρομέα και να βλέπουν τον αντίστοιχο όγκο κάθε φορά. Με αυτόν τον τρόπο συμπληρώνουν τον πίνακα τιμών της δραστηριότητας 4. Εδώ έχουν την ευκαιρία να πειραματιστούν με περισσότερες τιμές και να συγκρίνουν.

ρ = 1
 ρ = 2
 n = 2
 n = 1
 Στάθμη υγραερίου

Όγκος υγραερίου : V = 6280 lt
 Στάθμη υγραερίου = 200 cm



Όγκος υγραερίου : V = 2661.734 lt
 Στάθμη υγραερίου = 88 cm



Στόχοι κι αναμενόμενες ενέργειες/δυσκολίες

Γίνεται μια πρώτη προσπάθεια (με τη δυνατότητα που μας δίνει το λογισμικό) να **προσεγγίσουν** οι μαθητές με **μεγαλύτερη ακρίβεια** τη γραφική αναπαράσταση της μεταβολής των δυο μεγεθών.

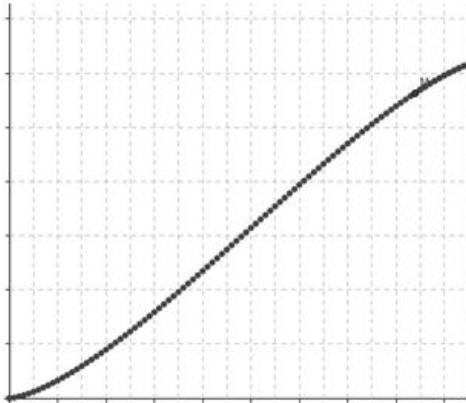
Έτσι θα τους δοθεί η δυνατότητα να κατανοήσουν περισσότερο τι συμβαίνει στην πραγματικότητα, όπως επίσης να αναστοχαστούν πάνω στη δική τους γραφική παράσταση που έφτιαξαν διαισθητικά.

Στόχευση και αιτιολόγηση

Μέσα από τον πίνακα τιμών και την προσέγγιση της γραφικής παράστασης, επιδιώκουμε οι μαθητές να αρχίσουν να πείθονται σιγά-σιγά ότι στην περίπτωση του οριζόντιου κυλίνδρου δεν ισχύει το μοντέλο των αναλόγων ποσών αλλά κάποιο άλλο, το οποίο μάλιστα θα γίνει αμέσως μετά αντικείμενο μελέτης και ερμηνείας.

Δραστηριότητα 5^η: Πατήστε το κουμπί

Γέμισε



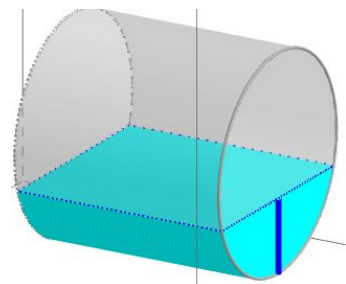
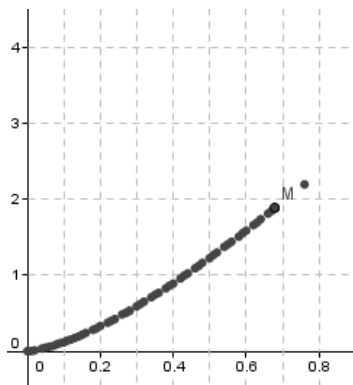
1. Τι ήταν ή τι δεν ήταν αναμενόμενο για σας και γιατί;
.....
2. Σε ποιά διάστημα «φαίνεται» η γραφική να είναι ευθεία;
.....
3. Θεωρείτε ότι αυτό συμβαίνει πραγματικά; Αιτιολογείστε.
.....
4. Τι συμβαίνει στη γραφική στο σημείο με τετμημένη 1m;
.....
5. Πώς θα το ερμηνεύατε αυτό;
.....
6. Πώς θα χαρακτηρίζατε τη γραφική κοντά στις ακραίες θέσεις μηδέν και 2m;
.....
7. Γιατί συμβαίνει αυτό;

Εδώ οι μαθητές παρακολουθούν το γέμισμα του κυλίνδρου να εξελίσσεται **ταυτόχρονα** με την αριθμητική μεταβολή των μεγεθών στάθμης-όγκου και το σχηματισμό της γραφικής παράστασης (σχ.1, σχ.2), μια δυνατότητα που μόνο το λογισμικό μπορούσε να μας δώσει.

Όγκος υγραερίου : $V = 1883.653 \text{ lt}$

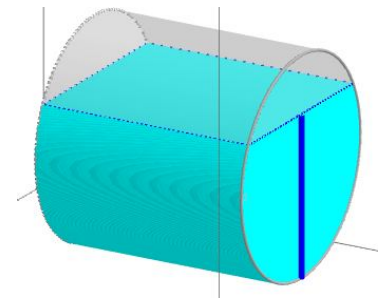
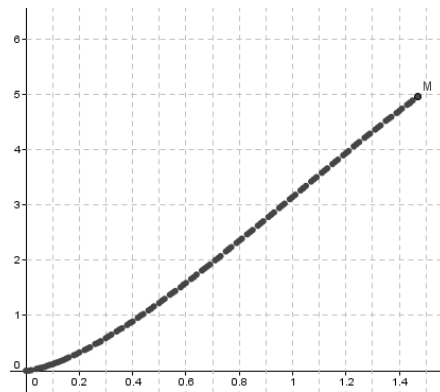
Στάθμη υγραερίου = 68 cm

Σχ. 1



Όγκος υγραερίου : $V = 4949.706 \text{ lt}$

Στάθμη υγραερίου = 147 cm



Σχ. 2

Στόχοι κι αναμενόμενες ενέργειες/δυσκολίες

Οι μαθητές είναι ήδη προϊδεασμένοι και έτοιμοι σχεδόν να αποδεχθούν αυτή τη γραφική παράσταση, αφού έχουν μια καλή προσεγγιστική εικόνα από πριν. Η **επιβεβαίωση όμως είναι αναγκαία για αυτούς** κι ας προέρχεται στην ουσία από έναν Η/Υ, χωρίς να τους ενδιαφέρει πώς έχει «κατασκευαστεί» όλο αυτό. Πέρα από την επιβεβαίωση, μέσα από τα ερωτήματα 1-7 αναμένουμε οι μαθητές να μπορέσουν να «διαβάσουν» τη γραφική παράσταση, δηλαδή να ερμηνεύσουν **μέσα από το πρόβλημα** τη «συμπεριφορά» και τα «κρίσιμα» σημεία της καμπύλης.

Αυτό δεν θα είναι εύκολο, καθώς μαθητές της Γ' Γυμνασίου δεν έχουν έρθει ποτέ σε επαφή με τέτοιες καμπύλες, ούτε τους έχει δοθεί η ευκαιρία μέσα από το αναλυτικό τους να ερμηνεύσουν άλλες καμπύλες μέσα από τέτοιου είδους προβλήματα.

Θα προκαλέσουμε το μαθητή να ερμηνεύσει, να συνδέσει, να εικάσει και να επιβεβαιώσει ή να απορρίψει, άλλοτε με οριζόντια (κυρίως εδώ), κι άλλοτε με κάθετη μαθηματικοποίηση.

Πιο συγκεκριμένα:

- μπορεί η γραφική παράσταση να είναι ευθεία; Δεν είναι μόνο ότι βλέπουμε αλλά και ότι γνωρίζουμε. Αφού έχει καταρριφθεί το μοντέλο των αναλόγων ποσών, δεν θα μπορούσε η γραφική παράσταση να είναι ευθεία. Εδώ, βέβαια μπαίνει και η έννοια «τοπικά», οπότε θα πρέπει οι μαθητές να αναγνωρίσουν και τα υπόλοιπα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη** (ή κάποια από αυτά), πχ. το εμβαδό του κυκλικού τμήματος, το μήκος του τόξου ή της αντίστοιχης χορδής ή το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που σχηματίζει η οριζόντια επιφάνεια του υγρού και τον τρόπο που αυτά μεταβάλλονται.
- να αναγνωριστεί η πιο έντονη καμπυλότητα («ανάποδα» όμως) στα άκρα, και θα αναμέναμε να ερμηνευτεί από τους μαθητές ως γρήγορο ή αργό γέμισμα με αιτιολόγηση που θα στηρίζεται σε ένα από τα υπόλοιπα συμμεταβαλλόμενα μεγέθη**.
- τι συμβαίνει στο σημείο με τετμημένη 1μ; Αυτό που εμείς λέμε σημείο καμπής, οι μαθητές του Γυμνασίου ζητούνται να βρουν δικές τους λέξεις να το περιγράψουν και στοιχεία μέσα από το πρόβλημα για να το ερμηνεύσουν (πιο αργά-πιο γρήγορα ή μεγαλώνει η επιφάνεια-ξαναμικραίνει η επιφάνεια κτλ.)

Στόχευση και αιτιολόγηση

Ο εκπαιδευτικός μπορεί να καθοδηγεί τους μαθητές με κατάλληλες μικρές ή μη συμπληρωμένες ερωτήσεις, όπως πχ. *η καμπύλη είναι πιο..... ή τι συμβαίνει εκεί στην αρχή, όταν αρχίζει... ή στο 1μ είναι στη μέση, τι συμβαίνει εκεί κοντά στη μέση....*

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 5, συνέχεια

8. Αν $V_{\mu} = \Delta V / \Delta h$ είναι ο **μέσος ρυθμός μεταβολής** του όγκου, να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Διάστημα σε cm	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12
Δh (cm)	2	2	2	2	2	2
V_{μ} (lt)						

Διάστημα σε cm	188-190	190-192	192-194	194-196	196-198	198-200
Δh (cm)	2	2	2	2	2	2
V_{μ} (lt)						

Πώς ερμηνεύετε τα αποτελέσματα και πώς τα συνδέετε με τη γραφική παράσταση;

Οι μαθητές συμπληρώνουν και πάλι με τη βοήθεια του λογισμικού τους 2 πίνακες.

Στόχοι κι αναμενόμενες ενέργειες/δυσκολίες

Δίνουμε στους μαθητές ένα «εργαλείο», ένα πίνακα τιμών αντιστοίχισης όγκων ανά 2εκ σε διαφορετικά ύψη. Οι ίδιοι μπορούν να πειραματιστούν και σε άλλες υψομετρικές διαφορές. Στόχος μας είναι οι μαθητές να αντιληφθούν πιο βαθιά, να συνειδητοποιήσουν ότι:

- οι ίσες υψομετρικές διαφορές δεν δίνουν αντίστοιχα ίσους όγκους, κάτι που συνέβαινε στον οριζόντιο κύλινδρο.
- οι ίσες υψομετρικές διαφορές δίνουν αυξανόμενο αντίστοιχο όγκο, καθώς τα ύψη πλησιάζουν τη μέση (1μ) και στη συνέχεια πάνω από τη μέση (1μ) του κυλίνδρου δίνουν σταδιακά μικρότερους αντίστοιχους όγκους καθώς ο κύλινδρος κοντεύει να γεμίσει.

Θέλουμε οι μαθητές να:

- συνδέσουν τους πίνακες με τη γραφική παράσταση, «δένοντας» ερμηνείες του προηγούμενου ερωτήματος όπως πχ. *αφού χρειάζεται λιγότερο όγκο όσο πλησιάζει το υγρό τα 2μ άρα γεμίζει πιο γρήγορα....γι' αυτό η καμπύλη είναι πιο.....*
- να εμπλέξουν για μια ακόμα φορά τα υπόλοιπα μεγέθη πιο συνειδητά, όπως πχ. *κοντά στα 2 μέτρα ο όγκος ανά 2 εκ. μικραίνει, γιατί μικραίνει..... η επιφάνεια, ή το εμβαδό του κυκλικού τμήματος από πάνω..... ή γιατί πάνω από τη μέση η χορδή ξαναμικραίνει.....*
- γενικότερα, ένας αναστοχασμός σε παρατηρήσεις, ερμηνείες και επιβεβαίωση κάποιων εικασιών.

Στόχευση και αιτιολόγηση

Καθοδηγούμε τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις με τα προηγούμενα ερωτήματα. Ενισχύουμε τον αναστοχασμό και ζητάμε πιο τεκμηριωμένες και αναλυτικές αιτιολογήσεις.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ 5.

9. Συνοψίζοντας, υπάρχουν **κοινά** στοιχεία μπορείτε να βρείτε στη μεταβολή του όγκου του υγραερίου (καθώς η στάθμη ανεβαίνει) στον **κατακόρυφο** και τον **οριζόντιο** κύλινδρο;
-

Μπορείτε να τεκμηριώσετε την άποψή σας γραφικά;



Στο ερώτημα 9 γίνεται μια συνολική σύνδεση και σε επίπεδο οριζόντιας αλλά και κάθετης μαθηματικοποίησης.

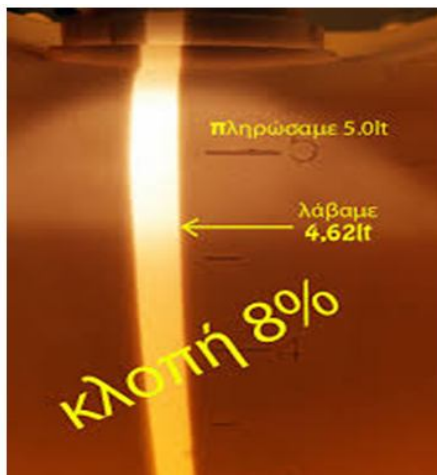
Στο 1^ο ερώτημα, αν υπάρχουν κοινά στοιχεία, θέλουμε οι μαθητές να αναγνωρίσουν μέσα από την πραγματική κατάσταση ότι υπάρχουν τρεις θέσεις όπου συμβαίνει ακριβώς το ίδιο: στην αρχή, όταν η δεξαμενή είναι άδεια, στο τέλος όταν αυτή είναι γεμάτη και ακριβώς στη μέση όπου έχουμε τη μισή ποσότητα.

Στο 2^ο ερώτημα και μέσα από τη γραφική τεκμηρίωση, θέλουμε οι μαθητές να αναγνωρίσουν μέσα στα μαθηματικά τι σημαίνει ίδιοι όγκοι ($V=y$) στην ίδια στάθμη (στάθμη x), δηλαδή να καταλάβουν ότι οι δυο γραφικές παραστάσεις, αν και διαφορετικές, έχουν 3 κοινά σημεία.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αυτό, βέβαια συμβαίνει εδώ, γιατί έχουμε προνοήσει να έχουν το ίδιο ύψος οι κύλινδροι και την ίδια χωρητικότητα.

Επιστρέφοντας στον υπάλληλο του βενζινάδικου το Γιώργο.....

Τι πρέπει να κάνει τελικά ο Γιώργος ώστε να διασταυρώσει τις ενδείξεις της ράβδου με τις ενδείξεις του βυτίου και της δεξαμενής για να σιγουρευτεί ότι δεν τον κλέψανε;



Στο κλείσιμο της παρέμβασης κι ενώ οι μαθητές δεν έχουν ξεφύγει από την πραγματική κατάσταση ως προς το ότι έχουμε μια μεγάλη δεξαμενή με υγραέριο (κάποιο υγρό, τέλος πάντων) και μελετάμε μεταβολές όγκου και στάθμης υγρού, θέλουμε να διαπιστώσουμε μέσα από την επαναφορά του αρχικού προβλήματος, κατά πόσο η όλη διαδικασία βοήθησε τα παιδιά να απαντήσουν στο ερώτημα που θέσαμε και που μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε για να τους βοηθήσουμε:

- Αν ήσουν εσύ ο Γιώργος (ο υπάλληλος), τι είδους βοήθεια θα ζητούσες;
- Αν ήθελες να βοηθήσεις τον Γιώργο, τι θα του πρότεινες να κάνει;
- Αν ήσουν ιδιοκτήτης του βενζινάδικου, τι έπρεπε να παρέχεις στον Γιώργο;

Δεν μπορούμε να περιμένουμε κάποια συγκεκριμένη απάντηση, ούτε είναι αυτό το ζητούμενο. Κυρίως μας ενδιαφέρει αν θα υπάρξει απάντηση, κι αν μέσα από αυτή θα μπορεί να φανεί κατά πόσο έπαιξε ρόλο η συνολική δραστηριότητα.

Θεωρητικό πλαίσιο

Σύμφωνα με τους Artigue & Blomj s, διερευνητική μάθηση (IBE - inquiry-based education) είναι η παιδαγωγική η οποία στηρίζεται στη διερεύνηση. Πρόκειται για τη διδασκαλία όπου οι μαθητές καλούνται να εργαστούν με μεθόδους παρόμοιες με αυτές που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί και γενικά οι επιστήμονες. Η εμφάνιση αυτής της τάσης είναι πολύ έντονη τα τελευταία χρόνια στην Ευρώπη όπου έχει ήδη δρομολογηθεί σχεδιασμός με στόχο την εφαρμογή της εκπαίδευσης μέσω έρευνας στα μαθηματικά και στις επιστήμες γενικότερα.

Πρόκειται για μια εντελώς διαφορετική προσέγγιση της γνώσης, όπου τόσο οι μαθητές όσο και οι εκπαιδευτικοί αφήνουν του παραδοσιακούς τους ρόλους: Οι μαθητές θέτουν ερωτήματα, εξερευνούν, εμπλέκονται, εξηγούν, επεκτείνουν, εκτιμούν, συνεργάζονται (Artigue & Blomj s, 2013). Οι εκπαιδευτικοί ενθαρρύνουν την εξερεύνηση, παροτρύνουν, καθοδηγούν.

Οι περισσότεροι ερευνητές συμφωνούν ότι μια από τις βασικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές όταν διδάσκονται μαθηματικά είναι η αδυναμία σύνδεσης με την πραγματική ζωή. Ο Gravemeijer διαπιστώνει ότι η δυσκολία στο να μαθαίνει κάποιος μαθηματικά οφείλεται συχνά σε αυτό που θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε ως κενό ανάμεσα στην εμπειρία της καθημερινής ζωής και σε αυτό που χαρακτηρίζουμε φορμαλιστικά μαθηματικά. Ο ίδιος όμως δεν βλέπει την καθημερινή εμπειρία και τα φορμαλιστικά μαθηματικά σαν διαφορετικές οντότητες. Αντίθετα αυτό στο οποίο θα πρέπει να στοχεύουμε είναι μια διαδικασία προοδευτικής ανάπτυξης στην οποία τα φορμαλιστικά μαθηματικά έρχονται στην επιφάνεια σαν μια φυσική επέκταση της εμπειρικής πραγματικότητας των μαθητών (Gravemeijer, 1999).

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα λεγόμενα του Gravemeijer συμπυκνώνουν τις βασικές αρχές της RME. Ενώ σύμφωνα με τον Freudenthal και σύμφωνα με την αρχή της *reinvention*, μια πορεία μάθησης πρέπει να χαρακτηί, μέσα από την οποία οι μαθητές μπορούν να βρουν μόνοι τους τα μαθηματικά (που επιδιώκεται να γνωρίσουν).

Αυτή η διαδικασία της μαθηματοποίησης είναι το ζητούμενο: Στόχος και μέσο.

Ο Treffers (1978) αναφέρεται σε μια διαδικασία οργάνωσης, εμπλοκής, αναγνώρισης ομοιοτήτων και διαφορών, «συστηματικής προσέγγισης», συμβολισμού, γενίκευσης μέσα από μια συγκεκριμένη λύση. Τονίζει, όμως ότι δεν είναι μια διαδικασία που δεν πρόκειται να αναδυθεί από μόνη της αλλά πρέπει να καθοδηγηθεί και υποστηριχθεί μέσα από συγκεκριμένες διδακτικές μεθόδους (Treffers, 1978).

Ο ίδιος (Treffers, 1978) μιλάει για οριζόντια και κατακόρυφη μαθηματοποίηση, μια διάκριση που υιοθετεί αργότερα και ο Freudenthal (Freudenthal, 1991), λέγοντας ότι η οριζόντια μαθηματοποίηση οδηγεί από τον κόσμο της ζωής στον κόσμο των συμβόλων: Από κόσμο όπου κάποιος ζει, δρα (και υποφέρει), στον κόσμο όπου τα σύμβολα σχηματοποιούνται, ανασχηματίζονται και γίνονται αντικείμενα χειρισμού (Freudenthal, 1991). Στην οριζόντια

μαθηματοποίηση, επομένως οι μαθητές καλούνται να βρουν τα μαθηματικά εργαλεία που θα τους βοηθήσουν να μεταφέρουν τα δεδομένα ενός πραγματικού προβλήματος στη γλώσσα των μαθηματικών. Από την άλλη πλευρά, η κατακόρυφη μαθηματοποίηση είναι άρρηκτα δεμένη με την ιδέα των 'learning strands' ή τροχιών μάθησης (Menon). Πρόκειται λοιπόν για μια διαδικασία όπου τα χρησιμοποιούμενα μαθηματικά εργαλεία οργανώνονται, αναθεωρούνται και γίνονται αντικείμενο επεξεργασίας.

To mascil project

Το mascil project στοχεύει στην προώθηση της εφαρμογής της IBL στα σχολεία. Σε τάξεις όπου εμφανίζεται η διερευνητική μάθηση οι μαθητές έχουν ενεργό ρόλο. Θέτουν ερωτήματα, εξερευνούν καταστάσεις, βρίσκουν το δρόμο τους προς την επίλυση προβλημάτων. Προκειμένου να πραγματοποιηθεί αυτή η εφαρμογή της IBL και να γίνει η σύνδεση των μαθηματικών με το χώρο εργασίας, το mascil ακολουθεί μια ολιστική προσέγγιση (mascil).

Η χρήση των DGS

Η διερευνητική μάθηση υποστηρίζεται και υλοποιείται με τη βοήθεια και τη χρήση διαφόρων εργαλείων. Τα DGS μπορούν να παρέχουν ένα περιβάλλον ιδιαίτερα βοηθητικό, δίνοντας τη δυνατότητα εξερεύνησης, διερεύνησης και πειραματισμού.

Σύμφωνα με τους Marrades και Gutierrez (2000), η συνεισφορά των DGS είναι διττή: Κατά πρώτον παρέχουν ένα περιβάλλον στο οποίο οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν ελεύθερα. Μπορούν πολύ εύκολα να ελέγξουν την ορθότητα των διαισθήσεων και των εικασιών τους κατά τη διαδικασία αναζήτησης κανονικοτήτων, γενικών ιδιοτήτων κτλ. Κατά δεύτερον τα DGS προσφέρουν στους μαθητές μη παραδοσιακούς τρόπους προκειμένου να μάθουν και να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες και μεθόδους, δίνοντας τη δυνατότητα να δουν όσα παραδείγματα χρειάζονται μέσα σε μερικά δευτερόλεπτα, παρέχοντας τους άμεση ανατροφοδότηση.

Ανάλυση Παρέμβασης

Αρχικά οι μαθητές διάβασαν το πρόβλημα που έπρεπε να αντιμετωπίσουν, να μαθηματικοποιήσουν.

Φύλλο εργασίας

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Ο Γιώργος εργάζεται σε ένα βενζινάδικο. Κατά την παραλαβή υγραερίου με άδεια δεξαμενή, ο προμηθευτής του παραδίδει 7.000 λίτρα (ποσότητα που καταγράφεται στον μετρητή του βυτίου). Ο Γιώργος προκειμένου να επιβεβαιώσει την ποσότητα που παρέλαβε (πέρα από την ένδειξη του μετρητή της δεξαμενής), πρέπει να μετρήσει με τη διαβαθμισμένη σε εκατοστά (cm) ράβδο, βυθίζοντάς την από ειδική υποδοχή μέσα στην κυλινδρική δεξαμενή του υγραερίου προκειμένου να διαπιστώσει πόσο έχει ανεβεί η στάθμη του υγρού. Με ποιόν τρόπο ο Γιώργος θα μπορέσει να κάνει τη διασταύρωση χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις της ράβδου;

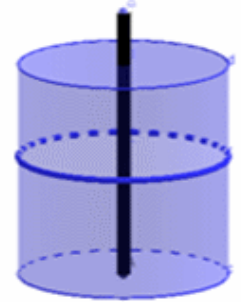


Το σημείο που πρέπει να τονιστεί είναι ότι το πρόβλημα περιέχει μόνο ένα αριθμητικό δεδομένο: Η παραλαβή ήταν 7000 λίτρα. Με την πρώτη ανάγνωση οι μαθηματικές έννοιες που εμπλέκονται δεν φαίνονται στο πρόβλημα, εκτός από την έννοια του κυλίνδρου.

Σκοπίμως δε δόθηκε η τοποθέτηση του κυλίνδρου (κάθετη ή οριζόντια) και η εμπλοκή των μαθητών με το πρόβλημα έγινε με τα διαδοχικά ερωτήματα που ακολουθούσαν στο φύλλο εργασίας. Έτσι, αρχικά οι μαθητές κλήθηκαν να απαντήσουν σε κάποια απλά ερωτήματα που αφορούσαν την γνωστή s' αυτούς περίπτωση του κάθετα τοποθετημένου κυλίνδρου.

Δραστηριότητα 1^α : Θεωρούμε ότι η δεξαμενή υγραερίου έχει σχήμα κυλίνδρου ύψους **2m** και τοποθετημένου κατακόρυφα. Αν μεταξύ 10cm και 20cm έχουμε όγκο **314 lt**, πόσος πιστεύετε θα είναι ο όγκος

1. Μεταξύ 20 cm και 30 cm;
2. Μεταξύ 30 cm και 40 cm;
3. Μεταξύ 20 cm και 40 cm;
4. Μεταξύ 20 cm και 23 cm;



Στόχος της δραστηριότητας αυτής ήταν να δούμε εάν οι μαθητές θα αναγνώριζαν ποια ποσά μεταβάλλονται και πως αυτά συνδέονται. Αναμέναμε από τους μαθητές να αναγνωρίσουν τα ανάλογα ποσά και να τα ονομάσουν. Τονίζουμε ότι η έννοια των ανάλογων ποσών είναι γνωστή στους μαθητές από τις τάξεις του Δημοτικού. Στην Γ΄ Γυμνασίου οι μαθητές δεν ασχολούνται με τα ανάλογα ποσά. Αυτό το θεωρήσαμε σημαντικό, καθώς ασχολούνται με ένα πρόβλημα το οποίο δεν αποτελεί μία συγκεκριμένη εφαρμογή της διδακτέας ύλης και κατά κάποιο τρόπο μαρτυρούν τον τρόπο εργασίας. Επομένως, οι μαθητές καλούνται, τις γνώσεις που έχουν αποκτήσει στα σχολικά χρόνια να τις θέσουν σε εφαρμογή για την επίλυση ενός αγνώστου σ' αυτούς προβλήματος. Το δεδομένο που τους δίνεται είναι ότι μεταξύ 10 και 20 η ποσότητα είναι γνωστή, 314 λίτρα. Ζητείται η ποσότητα μεταξύ 30-40 και 20-40.

Ας δούμε αναλυτικά, από τις απομαγνητοφωνήσεις, την πορεία εργασίας των μαθητών σε κάθε ομάδα.

Ομάδα Α

00:00	E	Το διαβάσατε, έτσι;	
	M	Ναι, ναι.	
00:09	E	Και πως σας φάνηκε;	
	M	Περίπλοκο.	
00:11	E	Περίπλοκο; Γιατί;	
00:13	M1	Βασικά, δεν ξέρουμε τι θα κάνουμε εδώ πέρα.	Δείχνει ερώτημα από τη δραστηριότητα 1(το α).
00:14	E	Δεν ξέρεις τι να κάνεις.	
00:15	M	Ναι, ναι.	

Ομάδα Γ

02:30	E	Ας υποθέσουμε αυτή είναι η δεξαμενή, ας υποθέσουμε είναι ένας κύλινδρος-τον είδαμε τον κύλινδρο-κατακόρυφος και σιγά σιγά (δεν έχει τίποτα, είναι άδειος) γεμίζει, μπορείτε να το φανταστείτε;
02:56	M1	Πρέπει να βρούμε τον όγκο γενικά;
	E	Ένα ένα, θεωρούμε ότι η δεξαμενή είναι κυλινδρική, ότι το ύψος είναι 2 μέτρα και είναι κατακόρυφη. Αν ξέρετε ότι από 10 ως 20 εκ. ο όγκος είναι ...(μπορείτε να σημειώνετε στα χαρτιά ή να κάνετε κι ένα σχήμα)... ωραία σημείωσε από 10 ως 20 εκ. σας λέει ότι έχουμε 314 λίτρα, είναι δεδομένο αυτό, μπορείτε να απαντήσετε στα υπόλοιπα ερωτήματα;
04:22	M1	Από το 20 και 30 θα κάνουμε εμβαδό =.....
	E	Τι σας είπα; Αντώνη, μην παρασύρεστε.....
	M2	Μήπως είναι +314....

Στην Πρώτη ομάδα οι μαθητές εμφάνιζαν πρόβλημα κατανόησης των ζητούμενων. Η εμπλεκόμενη μαθηματική έννοια ήταν απλή. Οι μαθητές έπρεπε να εντοπίσουν, όπως τονίσαμε στο στόχο μας, τα ανάλογα ποσά. Στην Τρίτη ομάδα παρατηρούμε ότι οι μαθητές προσπαθούν να συνδυάσουν το σχήμα με έναν τύπο που θα τους εξασφαλίσει και το αποτέλεσμα του ερωτήματος.

Βλέπουμε τον μαθητή να εφαρμόζει κατευθείαν τύπο εύρεσης όγκου κυλίνδρου, το οποίο δεν θα ωφελούσε στην επίλυση του προβλήματος. Στη Δεύτερη ομάδα η παρατήρηση των ανάλογων ποσών έγινε αμέσως αντιληπτή από τους μαθητές. Οι μαθητές της Α και Γ ομάδας παρουσίασαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τον τρόπο εργασίας τους στα ερωτήματα αυτά. Στην Α ομάδα οι μαθητές για να αιτιολογήσουν την ποσότητα που βρίσκεται μεταξύ των 20-30, 30-40 και 20-40 έδωσαν διαισθητικές απαντήσεις. Η διαφορά είναι ίδια και στο άλλο η διαφορά είναι διπλάσια. Έκαναν δηλαδή χρήση των ανάλογων ποσών και δεν θεώρησαν απαραίτητα ότι αυτό χρειάζεται κάποια αιτιολόγηση. Στη συνέχεια προχώρησαν στην εύρεση ποσότητας μεταξύ 20-23.

Ομάδα Α

04:09	M1	Από 20-23 τώρα ...Α
04:14	M1	Με κάτι θα πρέπει να διαιρέσουμε εδώ πέρα λογικά.
04:16	E	Ωραία, ποιο;
04:19	M1	Το 314 με το, το
04:22	M2	Με το 3.
04:25	E	Το 314 με το 3;
04:27	M	Ε όχι, όχι ... Με το 7;
04:29	E	Γιατί με το 7;
04:40	M2	Γιατί τόση είναι η διαφορά από το 23 μέχρι το 30
04:41	E	Εσείς έχετε βρεί ότι από 20 μέχρι 30 είναι 314.

04:43	M	Ναι
04:48	E	Και επίσης από 30-40 είναι τόσο.
04:50	M	Ναι
04:53	E	Οπότε τι θέλετε να βρείτε τώρα; Θέλετε να βρείτε από 20-23.
04:57	M2	Ναι, ναι οποτε θα βγεί λιγότερο. Θα βγεί μικρότερο το νούμερο.
04:59	E	Θα είναι μικρότερο το νούμερο.Εσείς θέλετε ποσότητα από τα 20-23. Πως μπορείτε να τη βρείτε. Κάτι μου είπατε με διαιρέσεις.
05:07	M1	Ναι το 314 με ποιόν αριθμό όμως ...(γελάνε)
05:15	E	Άκουσα με το 3, άκουσα με το 7 ...
05:20	M2	Με το 7 μήπως; Για να βγάλουμε αυτό το μέρος που δεν το χρειαζόμαστε
05:27	M1	Μήπως να βρούμε το 23 στο 20 και στο 30 πόσο αντιστοιχεί. Είναι το 1/7.Κάτι τέτοιο. Να βρούμε το μέρος
05:45	M2	Ας πούμε στο 20 και στο 30 το ενδιάμεσο είναι το 25 το 1/2
05:51	M1	Ναι, ναι.
05:55	M1	Το 23 τότε τι μέρος είναι. Το 1/6;
05:58	M2	Δεν ξέρω τι είναι το 23 ...
05:03	M	Είναι πολύπλοκο ...
05:50	E	Αυτή η ποσότητα από 20 – 30 είναι πόσο;
06:12	M	314
06:19	E	Και εσείς θέλετε από το 20-23
06:21	M	Ναι
06:24	E	Επομένως φάχνετε μεταξύ 20-23 την ποσότητα που αντιστοιχεί. Πόσο είναι η διαφορά από 20-30;
06:28	M2	10
06:38	M2	Άρα $10 - 3 = 7$. Οπότε με το 7 θα διαιρέσουμε
06:47	E	$10-3=7$. Αλλά αν διαιρέσω το 314 με το 7 τι βρίσκω;
06:50	M1	Χωράει ...
06:58	E	Όχι αυτό εντάξει. Αλλά το αποτέλεσμα τι πληροφορία μου δίνει.
07:03	M1	Την ποσότητα ανάμεσα στο 20 και το 23

07:11	E	Εσύ διαίρεσες το 314 με το 7. Τα 314 λίτρα όμως σε ποιο διάστημα περιέχονται;
-------	---	---

Ο διάλογος αυτός θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως το πρώτο σημαντικό κρίσιμο σημείο της παρέμβασής μας. Το ερώτημα είναι αρκετά απλό και για μαθητές του Δημοτικού, ωστόσο δύο καλές μαθήτριες δυσκολεύονται να δώσουν μία απάντηση. Ψάχνουν να δουν τι μέρος του όλου αποτελεί το διάστημα 20-23 έχοντας ως γνωστό διάστημα το 20-30.

Όπως βλέπουμε δεν σκέφτονται σε καμία περίπτωση να εργαστούν με ανάλογα ποσά και την αναγωγή στη μονάδα. Η ανάγκη αυτή θα προκύψει μετά από διαδοχικές ερωτήσεις του εκπαιδευτή και με την εισαγωγή ενός άλλου βοηθητικού προβλήματος (μοίρασμα καραμελών σε 10 παιδιά, πόσα θα πάρουν τα 3).

Την ίδια δυσκολία βλέπουμε να αντιμετωπίζουν και στη Γ ομάδα.

Ομάδα Γ

08:09	E	Τώρα, 20 – 23; Εδώ πόσο είναι η υψομετρική διαφορά;
	M1	Λιγότερο από 314 πάντως...
	E	Όχι τα λίτρα, η υψομετρική διαφορά, πριν ήταν 10, πάλι 10, εκεί ήταν το ίδιο, μετά τα κάναμε 20 δηλ. το διπλάσιο, τώρα εδώ είναι από τα 20 στα 23 δηλ. η διαφορά είναι 3. Πώς θα κολλήσουμε τα προηγούμενα; Πριν είπατε διπλάσιο.... καθαρίσατε..... Τώρα εδώ;
	M1	Αναγωγή στη μονάδα;
	M2	Το 1/3 μου φαίνεται.....
	E	Είπες αναγωγή στη μονάδα... εσύ Χαρά τι λες;
	M2	Μήπως είναι από το 314 το 1/3;
08:48	E	Το 1/3 γιατί;
	M2	Το 1 κάπι..... τα 2/3
	E	Τα 2/3.... πάλι θα πούμε γιατί;
	M1	Αναγωγή στη μονάδα;
09:00	E	Ωραία, αναγωγή λέει ο Αντώνης. Για κάντε το στο πρόχειρο και πείτε μου αν υπάρχει κι άλλος τρόπος
	M1	Στα 10 μέτρα
	E	Στα 10 εκ.....

Και εδώ οι μαθητές προσπαθούν να βρουν ποιο μέρος του όλου είναι το διάστημα. Αναφέρονται στο διάστημα 20-23 και το βλέπουν ως το $\frac{1}{3}$ του ολικού. Ωστόσο και στις δύο ομάδες καταλήγουν, έπειτα από συζήτηση, στην μέθοδο των τριών. Την εφαρμόζουν αυτή τη μέθοδο, αλλά δεν θεωρούν απαραίτητο ότι τα ποσά θα πρέπει να είναι ανάλογα. Μάλιστα, στην πρώτη ομάδα θεωρούν ότι έχουν πάντοτε τη δυνατότητα να εφαρμόσουν τη μέθοδο αυτή.

Ομάδα Α

07:55	E	Δηλαδή αν υποθέσουμε ότι 10 παιδιά έχουν 200 καραμέλες και θέλεις να δεις πόσες καραμέλες έχουν τα 3 παιδιά, διαιρείς το 200 με το 7; Με το 3; Τι κάνεις για να το βρεις;
08:00	M2	Α μπορούμε να κάνουμε και αυτό που ξέρεις τα 3 και βρίσκεις το 1
08:02	E	Τη μέθοδο των τριών;
08:03	M2	Ναι
08:05	E	Μπορείς να την εφαρμόσεις πάντα αυτήν;
08:08	M1	Όχι πάντα
08:10	M2	Γιατί όχι πάντα;
08:18	E	Δηλαδή όταν ένας άνθρωπος είναι 20 χρονών και έχει ύψος 1.70 όταν γίνει...
08:19	M2	Α, θα πρέπει να είναι ανάλογα τα ποσά.
08:22	E	Ωραία πρέπει να είναι ανάλογα. Εδώ εσείς πιστεύετε ότι είναι ανάλογα;
08:25	M	Ναι, ανάλογα είναι.

Το δεύτερο σημαντικό κρίσιμο σημείο είναι ότι οι μαθητές φαίνεται να έχουν καταλάβει γιατί θα πρέπει τα ποσά να είναι ανάλογα για να εφαρμόσουν τη μέθοδο των τριών, ωστόσο η χρήση της γίνεται τελείως φορμαλιστικά.

Ο εκπαιδευτικός προσπαθεί να δει εάν υπάρχει νοηματοδότηση των εμπλεκόμενων εννοιών. Γίνεται λόγος για ανάλογα ποσά, αλλά δεν έχει αναφερθεί ποια ποσά είναι ανάλογα. Γενικά, από την έρευνα παρατηρείται αυτό το φαινόμενο. Οι μαθητές βρίσκουν αποτελέσματα αλλά δεν είναι σε θέση να αιτιολογήσουν τι είναι αυτά που βρήκαν και να δώσουν νόημα στα μαθηματικά σύμβολα και αποτελέσματα.

Αυτό φάνηκε ξεκάθαρα και στον παρακάτω διάλογο:

Ομάδα Α

08:27	E	Ποια ποσά είναι ανάλογα;	
08:29	M2	Αυτά που όταν ...	
08:31	E	Όχι – όχι τον ορισμό. Εδώ στο πρόβλημα ποια είναι τα ανάλογα ποσά.	
08:36	M1	Το 20 και το 30;	
08:39	M2	Το 20 με το 314;	
08:40	E	Δηλαδή η ποσότητα με τι; με το ύψος;	
08:41	M2	Με τον όγκο;	
08:48	M2	Δεν ξέρω ...	Γελάνε αμήχανα
08:49	E	Σας έχω προβληματίσει ε;	
08:50	M	Λίγο	
08:57	M2	Ναι αφού εδώ πέρα όταν διπλασιάζεται η ποσότητα διπλασιάζεται και ο όγκος.	(Δεν έχουν συνειδητοποιήσει ότι όγκος είναι η ποσότητα)
09:13	E	Εννοείς ότι όταν έχεις ένα ύψος 10 έχεις ποσότητα 314. Τώρα που έχεις πόσο;	Σημειώνει σε χαρτί τη μέθοδο των τριών.
09:17	M	3	
09:19	E	3 τότε πόσο θα έχεις;	
09:21	M	Χ, θα κάνουμε χιαστί.	
09:28	E	Ωραία κάνω χιαστί. Πως θα το βρώ τώρα;	
09:31	M1	$10x = 314$	
09:33	E	Και με τι πρέπει να διαιρέσω για να βρω το χ;	

09:38	M	Με το 10	
09:41	E	Τελικά ο αριθμός που ψάχναμε για να διαιρέσουμε ήταν το 10.	
09:43	M	Aaaa	
09:46	E	Γιατί; Το καταλάβατε γιατί πρέπει να διαιρέσουμε με το 10;μπορείτε να δώσετε μία εξήγηση σ'αυτό;	
09:53	M1	Γιατί είναι ανάλογα τα ποσά. Οπότε για να το βρούμε..	
10:02	E	Άρα πολύ απλά στα 10 είχαμε 314 και εμείς θέλαμε να βρούμε το 1	
10:11	M2	Σωστά όντως. Πρέπει να βρούμε πόσο έχει το 1 και μετά πόσο έχουν τα τρία.	

Βλέπουμε από το διάλογο ότι για τους μαθητές οι μαθηματικές έννοιες και οι έννοιες της καθημερινότητας αποτελούν δύο διαφορετικά πράγματα. Δεν αντιλαμβάνονται ότι ο όρος «ποσότητα» που αναφέρουν είναι ο όγκος, με αποτέλεσμα να χαρακτηρίσουν την ποσότητα και τον όγκο ως τα δύο ανάλογα ποσά. Βλέπουμε, λοιπόν ότι ο όρος «όγκος» φέρνει στη σκέψη των μαθητών έναν μαθηματικό τύπο, κάποιες πράξεις που πρέπει να κάνουν για να τον προσδιορίσουν, ενώ η έννοια ποσότητα δεν χρειάζεται κάτι τέτοιο.

Οι μαθητές κάνουν πράξεις χωρίς να ξέρουν γιατί τις κάνουν. Βλέπουμε ότι διαιρούν το 314 με το 3 ή το 7 και δεν μπορούν να αιτιολογήσουν για ποιο λόγο κάνουν τη διαίρεση αυτή. Το αξιοσημείωτο είναι ότι και στις τρεις ομάδες, οι οποίες εργάστηκαν χωριστά, προέκυψε το ίδιο ζητούμενο των ανάλογων ποσών. Οι μαθητές δεν βλέπουν την ανάγκη αιτιολόγησης. Αυτό φάνηκε και στην δεύτερη ομάδα.

Ομάδα Β

M1	Στα 10cm η διαφορά είναι 314 l άρα στο ένα εκατοστό είναι 31,4l. Και μετά επι τρία πάει...94,2;
E	Ωραία! Προχωρήστε...
M1	Τώρα θα κάνουμε πάλι το 314 επί το 110 και θα βρούμε για το ...
E	Όλη αυτή η ευκολία προκύπτει επειδή τα ποσά είναι...
M2	Ανάλογα.

Στο σημείο αυτό παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές είχαν πιεστεί λίγο. Το πρόβλημα τους φαίνονταν μία σπαζοκεφαλιά. Ακόμα δεν είχε γίνει η σύνδεση με το χώρο εργασίας. Αυτό το αντιληφθήκαμε όταν τα παιδιά προσπαθούσαν να εκτιμήσουν κάποιες ποσότητες και δεν τους ενδιέφερε εάν θα γινόταν κάποιο λάθος.

Δεν είχαν συνειδητοποιήσει ότι λάθος στον όγκο σημαίνει απώλεια χιλιάδων ευρώ. Αυτό φροντίσαμε να το τονίσουμε σε διάφορα σημεία. Ενδεικτικά παραθέτουμε τα εξής :

ΟΜΑΔΑ Β

E	Ανάμεσα στα 20 και 30;
M2	Στα 20 με 30; Περίμενε...
M1	Τελικά δεν μπορούμε να βρούμε κάτι ας πούμε πόσο είναι ακριβώς σε 10...Πρέπει να βρούμε ακριβώς πόσο; Όχι στο περίπου ας πούμε...
E	Αφού τα λίτρα αυτά κοστίζουν χρήματα είναι καλό να ξέρουμε τι ακριβώς γίνεται. Δεν παίζουμε με τα λεφτά!
M2	Οκ...εεε

Η μαθήτρια αναφέρει ότι θα μπορούσαν να βρουν στο περίπου. Εδώ έχουμε ένα χάσμα που μεσολαβεί μεταξύ προβλημάτων της καθημερινότητας και των σχολικών προβλημάτων. Ένα λάθος σε ένα σχολικό πρόβλημα μπορεί να κοστίσει μία μονάδα λιγότερη στον βαθμό, αλλά ένα αντίστοιχο λάθος σε προβλήματα του χώρου εργασίας μπορεί να επιφέρει απώλεια χιλιάδων ευρώ.

ΟΜΑΔΑ Β

E	Ωραία , επομένως έχει μια δεξαμενή και κάνει μια παραλαβή 7000lt, του λέει αυτός ότι τόσα σου δώσαμε...
M	Ναι
E	Και αυτός όμως θέλει να το διαπιστώσει επειδή δεν ξέρει τι παρέλαβε και δεν υπάρχει κάποια ένδειξη ή κάποιον μετρητή, αλλά και μετρητή να είχε πρέπει να ξέρει αυτός επακριβώς ότι τόσα πήρε .
M	Ναι
E	Γιατί μιλάμε για χιλιάδες ευρώ εδώ πέρα ότι μπορεί να χάσει σε περίπτωση που έχει γίνει κάποιο λάθος. Ωραία;
M	Ναι
E	Ωραία . Η δεξαμενή έχει σχήμα;
M	Κυλινδρικό

Στη συνέχεια, αφού δόθηκε ιδιαίτερη έμφαση στην κατανόηση ότι τα ποσά όγκος – ύψος στάθμης είναι ανάλογα, προχωρήσαμε στη δεύτερη δραστηριότητα.

Ο στόχος της ήταν οι μαθητές να δουν την σχέση που συνδέει αυτά τα δύο ανάλογα ποσά και να τα δουν πλέον ως μία συνάρτηση. Θέλαμε να δουν οι μαθητές την αλληλεξάρτηση των δύο μεγεθών και ποιος τύπος τα συνδέει. Στη συνέχεια να προχωρήσουν στην κατασκευή της γραφικής παράστασης.

Παραθέτουμε τη δεύτερη δραστηριότητα:

Δραστηριότητα 2^η : Α) Τι όγκο έχουμε όταν το ύψος της στάθμης είναι 110cm;

.....

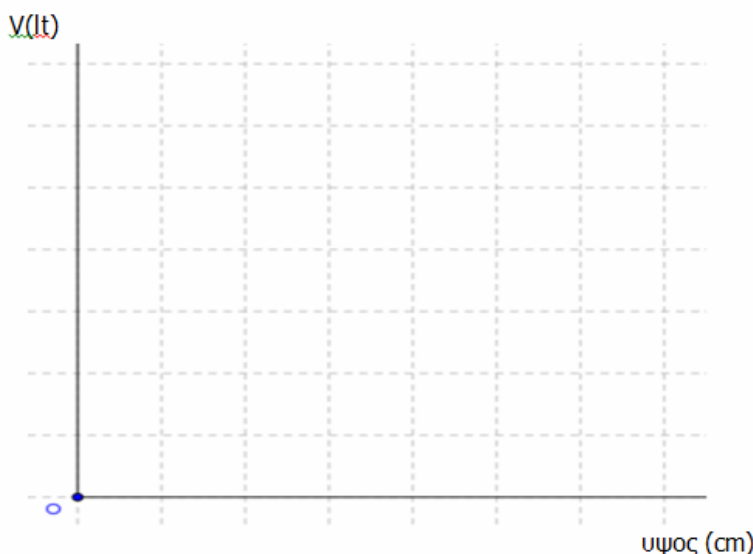
Β) Αν ο όγκος από 500lt μειωθεί σε 200lt, κατά πόσα cm θα έχει πέσει η στάθμη;

.....

Γ) Μπορείτε να υπολογίσετε τον συνολικό όγκο της δεξαμενής και το εμβαδό της βάσης;

.....

Δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του όγκου του υγραερίου σε συνάρτηση με το ύψος της στάθμης καθώς αυτή αυξάνει



Ε) Με ποιό τρόπο μεταβάλλονται τελικά τα δυο μεγέθη (όγκος και στάθμη);

Μπορείτε να γράψετε τύπο;.....

Στο πρώτο και δεύτερο ερώτημα της δραστηριότητας αυτής οι μαθητές συνέχισαν να εργάζονται με αναγωγή στη μονάδα, αφού είχαν διαπιστώσει προηγουμένως ότι τα ποσά ήταν ανάλογα. Αρχικά προβληματίστηκαν λίγο με την εκφώνηση. Πρότειναν να εργασθούν αντίστροφα, αφού η διαδικασία ήταν αντίστροφη και μιλούσε για μείωση όγκου και έτσι δεν είχαν πλέον το γέμισμα της δεξαμενής αλλά το άδειασμά της.

Ομάδα Α

M	Αν ο όγκος από 500 λίτρα μειωθεί σε 200 λίτρα, κατά πόσα cm έχει πέσει η στάθμη;
M1	Να κάνουμε ας πούμε αυτό που κάναμε αλλά το αντίθετο; Στη θέση των cm να βάλουμε τα λίτρα.
E	Ωραία, τι σκέφτεσαι δηλαδή; Πιο συγκεκριμένα.
M	Η διαφορά είναι 300. Όχι, ε ναι 300.
M1	Α, να βρούμε τα 300 πόσα cm είναι.
M1	Όχι;
M2	Ναι αλλά πως;
M2	Καταρχάς δεν ήταν ποτέ 500 για να πέσει από τα 500.
E	Πως;
M2	Τίποτα, τίποτα... βλακεία.
M	Πρέπει να έχουμε κάτι από εκεί για να τα συγκρίνουμε
M1	Λοιπόν αφού στα 31,4 είναι 1 cm στα πόσα cm θα είναι 200;
M2	Ωραία.
M	$200/31,4$
E	Πως το βρήκατε;
M1	Στα 31.4 είναι 1 cm στα 200 πόσο θα είναι.
E	Πολύ ωραία. Άρα πηγαίνετε ουσιαστικά με αναγωγή στη μονάδα.
M	Ναι, ναι.

Ομάδα Γ

E	Λοιπόν πάμε στο β'
M1	Αφού έχει ύψος 2 μέτρα θα είναι... είναι 200 εκ.
E	Πόσα εκ. θα έχει πέσει η στάθμη;
M1	Μπορεί να πάει και κάτω;
E	Τα λίτρα ανεβοκατεβαίνουν, αυξάνονται, μειώνονται...
M1	Δηλαδή θα κάνουμε το ίδιο πράγμα;
E	Εγώ ρωτώ γιατί να μην κάνουμε το ίδιο πράγμα... Τι θεωρείς ότι χαλάει την αναλογία; Δηλαδή αν πέσει κατά 10 εκ. θα μειωθεί τόσο, αν πέσει κατά 20 δεν θα μειωθεί το διπλάσιο;
M1	Ναι
E	Άρα γιατί χαλάει η αναλογία;
M1	Δε χαλάει
E	Δε χαλάει, δε χαλάει...

E	Εδώ, τώρα Αντώνη κατάλαβες τι λάθος έκανες; Κατ' αρχάς έβαλες αναντίστοιχα ποσά... έβαλες στη μια εκατοστά και δίπλα έβαλες λίτρα και δεν πήρες την διαφορά που είναι 300...(έβαλε 200) και θεώρησες ότι χαλάει η αναλογία.... η αναλογία δε χαλάει χωρίς λόγο.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η συζήτηση στην ομάδα Γ.

Ο μαθητής δεν καταλαβαίνει την αντίστροφη πορεία. Πιστεύει ότι ο όγκος της δεξαμενής δεν μπορεί να μειωθεί. Παρατηρούμε εδώ ότι οι μαθητές δεν έχουν κάνει τη σύνδεση με την πραγματική διάσταση του προβλήματος. Αν η δεξαμενή δεν άδειαζε, τότε γιατί να γίνει ο ανεφοδιασμός;

Επίσης δεν είναι σίγουροι εάν σε αυτήν την περίπτωση τα ποσά παραμένουν ανάλογα. Η αντίστροφη διαδικασία σε αυτούς ερμηνεύεται ως ένα ξεχωριστό πρόβλημα με διαφορετικό πλαίσιο εφαρμογής.

Στο επόμενο ερώτημα τους ζητείται ο υπολογισμός του όγκου του κυλίνδρου και το εμβαδόν της βάσης. Η επιλογή του ερωτήματος αυτού έγινε σκόπιμα για δύο λόγους: Ο πρώτος είναι οι μαθητές να κάνουν χρήση των τύπων που έχουν διδαχθεί και να δουν τη χρησιμότητά τους σε προβλήματα. Ο δεύτερος στόχος είναι οι μαθητές να διαπιστώσουν ότι η ύπαρξη τύπου

για ένα μαθηματικό πρόβλημα είναι πολύ σημαντική υπόθεση για την αντιμετώπιση καταστάσεων της καθημερινής ζωής.

Η σημασία θα αναδειχθεί ακόμη περισσότερο όταν οι μαθητές περάσουν στον οριζόντιο κύλινδρο, όπου εκεί δεν γνωρίζουν κάποιον τύπο υπολογισμού του όγκου. Οι μαθητές σ' αυτή τη φάση αντιμετωπίζουν κάποιες δυσκολίες στην επίλυση τύπων και στην αξιοποίηση των δεδομένων του προβλήματος. Υπολογίζουν τον όγκο του κυλίνδρου εφαρμόζοντας ξανά τη μέθοδο των τριών και δεν βλέπουν την ανάγκη χρήσης τύπου (που εδώ δεν θα έδινε απάντηση).

Στη συνέχεια όμως για να βρεθεί το εμβαδόν της βάσης, οι μαθητές στην ομάδα Α για παράδειγμα, ψάχνουν την τιμή της ακτίνας. Εκεί λαμβάνει χώρα μία ενδιαφέρουσα συζήτηση για την τοποθέτηση της ράβδου κατά τη διαδικασία μέτρησης της στάθμης.

Ομάδα Α

E	Ωραία και εδώ σε ρωτάει για το εμβαδόν της βάσης.
M1	A, χα....
E	Ποια είναι η βάση του κυλίνδρου.
M1	Άρα πρέπει να βρούμε το εμβαδόν του κύκλου: πr^2 .
E	Ωραία, ωραία.
M2	Δεν ξέρουμε την ακτίνα, είναι άγνωστο....πρέπει να βρούμε την απόσταση αυτό με αυτό.
M2	Είναι στη μέση αυτό;
E	Δεν ξέρω. Έχει σημασία αυτό;
M2	Άρα δεν θα μετράει ...
E	Δηλαδή εσύ πιστεύεις το εξής: όταν έχω τη δεξαμενή που είναι κύλινδρος και βάλω τη ράβδο, δεν τη βάζω στο κέντρο αλλά τη βάλω εδώ, θα αλλάξουν οι ενδείξεις;
M2	Ναι.
E	Δηλαδή αν δεν τη βάλω στη μέση τη ράβδο και τη βάλω εδώ, πιστεύετε ότι δεν θα έκανε σωστές μετρήσεις;
M1	Δεν έχει σχέση η ράβδος, το κέντρο έχει σχέση.

M2	Η ράβδος δεν έχει σχέση, το κέντρο έχει.
E	Εσύ βλέπεις τη βάση έτσι από πάνω και τοποθετείς έτσι τη ράβδο. Αν την έβαζα διαφορετικά τη ράβδο θα είχα διαφορετικά αποτελέσματα;
M2	Δεν θα άλλαζε κάτι. Το κέντρο μετρά.
E	Άρα δεν έχει σημασία η ράβδος που είναι τοποθετημένη.
M	Ναι, όντως.
M2	Ναι, αλλά το είπα επειδή δεν ξέρουμε το ρ .
E	Ναι, σωστά, δεν το ξέρουμε το ρ .
M2	Και πως θα βρούμε το εμβαδόν της βάσης;
M2	Το π είναι 3,14;
M1	Ναι.
M2	E, πr^2 .
E	Ωραία, αλλά δεν έχετε το ρ , όμως.
M1	Το δέκα.
M2	Υπάρχει τύπος και για το ρ .
E	Για το ρ ;
M2	Δεν υπάρχει ο $\delta = 2\rho$;
E	Αυτό σου λέει απλά ότι η διάμετρος είναι διπλάσιο της ακτίνας.
M1	E, κάτι με το 10 πρέπει να κάνουμε.
E	Εσείς έχετε βρει τον όγκο της δεξαμενής. Που είναι κύλινδρος.

M1	Ναι, 6280.
E	Ξέρετε κάποιον τύπο, μήπως, που να υπολογίζει τον όγκο ενός κυλίνδρου;
M	Στην Τρίτη Γυμνασίου;
E	(Ρωτάει την εκπαιδευτικό εάν έχουν διδαχτεί τον τύπο εύρεσης του όγκου. Η απάντηση ήταν θετική.)
M1	Είναι το εμβαδόν της βάσης επί το ύψος.
M2	Είναι κάτι από τη Φυσική, νομίζω.
E	Για γράψε το, σε παρακαλώ.
E	Ο όγκος ποιος θα είναι;
M2	Είναι το εμβαδόν της βάσης που θα είναι πr^2 επί το ύψος.
E	Ωραία, αυτός θα είναι ο όγκος, έτσι δεν είναι;
E	Για πέστε μου τώρα, μπορείτε μ' αυτόν τον τρόπο να υπολογίσετε το ζητούμενο;
M1	$31.4 * 200 = \dots$
E	Να σας κάνω μία ερώτηση, εσείς τι ψάχνετε;
M1	Το ρ .

Καταρχήν παρατηρούμε την πρώτη παρανόηση που έχουν οι μαθητές όσον αφορά στον ορισμό του ύψους ενός κυλίνδρου. Ως ύψος θεωρούν μόνο την απόσταση των κέντρων των δύο κυκλικών βάσεων. Για αυτό η μαθήτρια θεωρεί απαραίτητο ότι η ράβδος θα πρέπει να είναι τοποθετημένη κάθετα αλλά στο κέντρο της βάσης.

Στη συνέχεια ψάχνουν έναν τύπο εύρεσης της ακτίνας. Αναφέρονται στην σχέση $\delta = 2\rho$. Το βλέπουν ως τύπο και όχι ως μία σχέση που συνδέει δύο μεταβλητές (με την ίδια λογική το $10 = 2*5$ θα ήταν ένας τύπος). Οι μαθητές ψάχνουν το εμβαδόν της βάσης, ωστόσο επικεντρώνονται στην εύρεση της ακτίνας και θεωρούν ότι το εμβαδόν δεν μπορεί να βρεθεί εάν δεν είναι γνωστή η τιμή της ακτίνας.

Γίνεται προσπάθεια από τον καθηγητή με κατάλληλα ερωτήματα να τους υπενθυμίσει ότι γνωρίζουν τον όγκο και ψάχνουν το εμβαδόν, όχι απαραίτητα την ακτίνα.

18:24	E	Ψάχνετε το εμβαδόν και λέτε ότι θέλετε να βρείτε το ρ . Αλλά αν βρείτε κατευθείαν το εμβαδόν, δεν θέλετε το ρ . Που βλέπετε το εμβαδόν στον τύπο;	
18:34	M2	Εδώ, στο πr^2 .	
18:38	E	Ωραία, αυτό μπορεί να είναι ένα γράμμα E.	
18:39	M2	Ναι.	

18:42	E	Άρα ο όγκος είναι το εμβαδόν επί το ύψος.	
18:44	M2	Ναι.	
18:45	E	Μπορείς τώρα να υπολογίσεις το E;	
18:47	M2	Είναι ο όγκος διά το ύψος;	
18:55	E	Ωραία, έτσι δεν είναι;	Γράφουν στο φύλλο εργασίας

Τελικά, με αυτήν την καθοδήγηση οι μαθητές βρίσκουν εύκολα την απάντηση. Το τρίτο σημείο που επικεντρωθήκαμε ήταν η κατασκευή της γραφικής παράστασης. Οι μαθητές γνώριζαν ότι εφόσον δύο ποσά είναι ανάλογα η γραφική τους παράσταση θα είναι ευθεία γραμμή, η οποία θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Όταν ρωτήθηκαν γιατί θα διέρχεται από την αρχή των αξόνων, απάντησαν «επειδή είναι ανάλογα». Και εδώ βλέπουμε ότι οι μαθητές δεν το συνδέουν με το πραγματικό πρόβλημα. Διέρχεται από την αρχή των αξόνων σημαίνει ότι σε όγκο μηδέν θα έχουμε ύψος 0. Ωστόσο, δε δώσαμε ιδιαίτερη σημασία στο γεγονός αυτό, καθώς ο χρόνος πίεζε.

Αφού οι μαθητές ολοκλήρωσαν την πρώτη φάση του φύλλου εργασίας, που ήταν η ενασχόλησή τους με τον κάθετο κύλινδρο, προσπαθήσαμε να τους εισάγουμε στο πραγματικό πρόβλημα και τις πραγματικές συνθήκες του προβλήματος, για να εμφανιστεί η σύνδεση με το χώρο εργασίας.

Οι αντιδράσεις των μαθητών ήταν αναμενόμενες. Παραθέτουμε κάποια αποσπάσματα :

Ομάδα Β

E	Ωραία...Ας προχωρήσουμε. Στην πραγματικότητα η κατάσταση είναι λίγο πιο περίπλοκη γιατί η δεξαμενή δεν είναι όρθια, αλλά οριζόντια. Τι λέτε; Μπορούμε να κάνουμε το ίδιο που θα κάναμε στον κατακόρυφο κύλινδρο;	
M2	Γιατί δεν σηκώνουμε τη δεξαμενή όρθια;	
E	Δεν νομίζω να είναι και τόσο πρακτική λύση αυτή.	
M1	Δεν μπορούμε να βάλουμε τη ράβδο από εδώ, γιατί δεν μετράει. Πρέπει να μετρήσουμε από πάνω.	Εννοεί από το πλάι.
E	Τι λέτε να συμβαίνει τώρα; Πάλι ανάλογα με το ύψος θα αυξάνεται ο όγκος;	
M2	Δεν υπάρχει βάση! Δεν υπάρχει κυκλική βάση! Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο!	Φαίνεται να τους έχει φανεί παράξενο το γεγονός ότι μια τόσο απλή μεταβολή της κατάστασης που καλούνται να αντιμετωπίσουν μεταβάλλει ριζικά τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να αντιμετωπίσουν το πρόβλημα.

Εδώ οι μαθητές καλούνται να μεταφερθούν νοερώς στο χώρο εργασίας. Εντύπωση μας έκανε ότι και οι τρεις ομάδες πρότειναν ο κύλινδρος να γυριστεί κάθετα. Φυσικά, εδώ ευθύνεται η απουσία επαφής με τον πραγματικό χώρο εργασίας.

Στη συνέχεια προκύπτει ένα πρακτικό ζήτημα: Πως θα τοποθετηθεί η ράβδος τώρα για να πάρει σωστές μετρήσεις; Οι μαθητές προτείνουν από τα πλάγια. Στη συνέχεια καταλαβαίνουν ότι αυτό δεν ωφελεί. Η ομάδα αυτή προχωράει κατά πολύ στη σκέψη και οι μαθητές αντιλαμβάνονται κατευθείαν τις αλλαγές που υφίστανται τα δεδομένα του προβλήματος. Δεν υπάρχει βάση, διαπιστώνει η μαθήτρια και επομένως δεν μπορεί να γίνει χρήση τύπου. Το εκπληκτικό είναι ότι για το γνωστό τους σχήμα, τον κύλινδρο, με μία απλή και διαφορετική τοποθέτηση, ο τύπος παύει να ισχύει!

Στην Α ομάδα, ο εκπαιδευτικός, αφού έχουν ολοκληρώσει τις απαντήσεις των προηγούμενων δραστηριοτήτων, τους μεταφέρει στο χώρο εργασίας περιγράφοντας τις συνθήκες που επικρατούν κατά τον ανεφοδιασμό. Προσπαθεί εδώ να επιτύχει τη διερεύνηση και τη σύνδεση με το χώρο εργασίας.

Ομάδα Α

E	Σωστά, όμως δεν είναι αυτή η δεξαμενή, δεν έχει αυτή τη μορφή, δεν το ξέρουμε ακόμα.
E	Λέω όμως, γενικά αν είχε μία τέτοια δεξαμενή, τι κινήσεις θα έπρεπε να κάνει για να διαπιστώσει;
M2	Θα βρίσκαμε τον όγκο;
E	Φαντάσου ότι έχεις ένα δικό σου βενζινάδικο και είσαι επιχειρηματίας, βγάζεις τρελά κέρδη από αυτό.
E	Και σου έρχεται το βυτίο, είναι άδεια η δεξαμενή και σου λέει «σου έφερα αυτή την ποσότητα».
M1	Αφού ξέρω ότι είναι 6280 η χωρητικότητα και μου πει ότι σου έφερα 3140, είναι μέχρι τη μέση, άρα θα ξέρω.
E	Συγγνώμη, ένα λεπτό, εσύ έχεις μία δεξαμενή της οποίας η χωρητικότητα είναι 6280 και σου έρχεται το βυτίο και σου παρέδωσε 500 λίτρα, τι θα κάνεις για να το διαπιστώσεις;
M1	Θα έκανα αυτό των τριών, τη μέθοδο των τριών.
E	Πως θα την έκανες;
M1	6280 στα δύο μέτρα ή στα 200 εκατοστά και στα 500 πόσο;
E	Ναι και θα έβρισκες ένα αποτέλεσμα σε εκατοστά. Που θα σου χρησίμευε αυτό;
M	E...
E	Θα του έλεγες βρήκα τόσα εκατοστά, και;
M1	Θα πήγαινα στα εκατοστά και θα έβλεπα αν...
E	Α, θα έκανες τι δηλαδή;
M1	Να μετρήσω.
E	Να μετρήσεις... Θα έπαιρνες δηλαδή τη ράβδο, θα την έβαζες μέσα και θα έλεγες τι;
M1	Αφού δεν είναι σ' αυτά τα εκατοστά, αν δεν ήταν δηλαδή, με έχεις κλέψει.
E	Α. μπράβο, επομένως θα έκανες μόνη σου τους υπολογισμούς και μετά θα πήγαινες με τη ράβδο να μετρήσεις.

Επισημαίνουμε ότι μέχρι στιγμής δεν έχει γίνει χρήση του λογισμικού. Στη φάση αυτή γίνεται η εισαγωγή των πραγματικών συνθηκών που επικρατούν στο χώρο εργασίας.

Έτσι, δίνεται η παρακάτω δραστηριότητα:



Δραστηριότητα 3^η : Το πρόβλημα που έχει να αντιμετωπίσει ο Γιώργος, είναι λίγο πιο πολύπλοκο γιατί στην πραγματικότητα η δεξαμενή υγραερίου είναι τοποθετημένη **οριζόντια**.

1. Πιστεύετε πως ο τρόπος που μεταβάλλεται **τώρα** ο όγκος του υγραερίου (καθώς αλλάζει η στάθμη), παραμένει ίδιος με πριν;

Με το ερώτημα αυτό θέλουμε πρώτα οι μαθητές να απαντήσουν διαισθητικά για το τι μπορεί να συμβαίνει και εάν η κατάσταση είναι ίδια με πριν. Είδαμε ότι στην ομάδα Β οι μαθητές αντιλήφθηκαν τις μεταβολές πολύ γρήγορα. Δεν συνέβη όμως το ίδιο και στις υπόλοιπες ομάδες.

Ομάδα Α

M	(Διαβάζουν την 3 ^η δραστηριότητα) Πιστεύετε ότι στην περίπτωση του οριζοντίου ο όγκος μεταβάλλεται το ίδιο με πριν;
M1	Ναι, για να μην έχουμε πρόβλημα .
M2	Αφού το ύψος και η βάση είναι ίδια, γιατί να μεταβάλλεται;
M1	Είναι οριζόντια, οπότε δε θα είναι έτσι, αλλά έτσι...
M2	Τον ίδιο όγκο θα έχει μέσα, όμως.
M1	Ναι, αλλά θα είναι λίγο πιο διαφορετικό.
M2	Ναι, το ύψος θα είναι λίγο πιο αυτό από αυτό....
E	Τι εννοείς, το ύψος θα είναι λίγο ποιο αυτό και όχι αυτό;
	...

M1	Μήπως πρέπει να δώσουμε βάση στο μήκος εδώ πέρα αυτή το φορά;
M2	Νομίζω ότι η βάση και το ύψος είναι ίδια.
E	Σκεφτείτε το ...

Οι μαθήτριες εδώ προβληματίζονται. Η μία πιστεύει ότι δεν άλλαξε τίποτα, ούτε η βάση, ούτε το ύψος. Δεν συνδέει το πρόβλημα με μία πραγματική κατάσταση. Θεωρητικά ο όγκος του κυλίνδρου δεν αλλάζει. Καθώς, όμως γεμίζει, το μέρος που γεμίζει δεν θα είναι ένας κύλινδρος (μέρος του μεγάλου), αλλά ένα άλλο σχήμα.

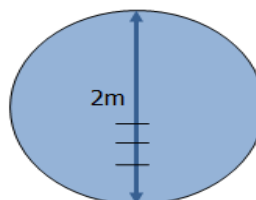
E	Ο τρόπος που μεταβάλλεται. Τι λέτε να εννοεί με αυτό;
M1	Ααα..., αν θα μεταβάλλεται αναλογικά;
E	Ίσως να εννοεί αυτό, γιατί πριν έτσι έγινε, αναλογικά. Τώρα, πιστεύετε θα είναι το ίδιο;
M	Ναι, γιατί όχι;
M1	Απλά έγειρε έτσι, δεν άλλαξε κάτι.
E	Άρα δεν έχει αλλάξει κάτι, λέτε.
M2	Μόνο το βάρος.
E	Το;
M2	Το βάρος.
E	Ποιο βάρος;
M2	Τώρα είναι προς τα δω, ενώ όταν είναι προς τα πάνω είναι αλλιώς.
E	Ωραία, ας πούμε τώρα πως θα τη βάλω τη ράβδο για να μετρήσω. Από που θα τη βάλω;
M1	Έτσι...

E	Συγγνώμη, πως θα τη βάλεις έτσι; Θα στη βρέξει όλη τη ράβδο.
M2	Ωχ, σωστά, σωστά...
M1	Έτσι, από πάνω.
E	Ωραία. Άρα θα τη βάλεις από πάνω τη ράβδο.
M2	Δηλαδή το ύψος είναι άλλο τώρα;
E	Σωστά, το ύψος είναι άλλο.
M1	Και η βάση, δηλαδή ;
M2	Αυτό δεν είναι βάση εδώ πέρα.
E	Αυτό δεν είναι βάση.
M1	Μήπως είναι αυτή η βάση...όχι, όχι βλακεία είπα...
M2	Άρα άλλαξε και η βάση και το ύψος τώρα. Είναι ένα ημικόκλιο, άρα το μισό του κύκλου.

Στη συνέχεια, με κατάλληλες ερωτήσεις του εκπαιδευτικού, οι μαθήτριες διαπιστώνουν τις μεταβολές που έχει υποστεί το πρόβλημα.

2. Ο Γιώργος μετράει το πρωί της Δευτέρας ύψος υγραερίου 90cm και το μεσημέρι 70cm. Την Τρίτη ο συνάδελφος του Γιώργου μετρά το πρωί 60cm και το μεσημέρι 40cm. Η μείωση του όγκου είναι ίδια στις 2 περιπτώσεις και γιατί;

.....



3. Αν μεταξύ 10cm με 15cm, αντιστοιχεί όγκος 100lt, πόσος όγκος αντιστοιχεί στο διάστημα 15cm με 20cm και πόσος στο 10cm με 20cm;
 ΑΠ.: 15-20cm → lt, 10-20cm → lt

4. Μπορείτε να βρείτε διάστημα πλάτους 5cm στο οποίο να μπορείτε με βεβαιότητα να πείτε ότι αντιστοιχούν τα ίδια λίτρα με το διάστημα 10cm-15cm;

.....

Η σύνδεση με το χώρο εργασίας έχει επιτευχθεί μέσω των ερωτημάτων του φύλλου εργασίας. Πλέον οι μαθητές βρίσκονται στη θέση ενός υπαλλήλου που εργάζεται σε πρατήριο υγρών καυσίμων και καλούνται να κάνουν ενέργειες που θα έκανε εκείνος.

Οι μαθητές παρατηρούν ότι η διαφορά είναι 20cm και στις δύο περιπτώσεις, οπότε θεωρούν λογικό ότι η ποσότητα του όγκου που αντιστοιχεί θα είναι η ίδια.

Ομάδα Γ

E	Πάλι 20....Πιστεύετε ότι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε χάσει, έχει ξοδευτεί η ίδια ποσότητα λίτρων;
M1	Ναι.
E	Επειδή είναι το ίδιο ύψος, λες.
M1	Ναι.
E	Εσύ, Χαρά;
M2	Δεν αλλάζει όπως το βλέπω, οπότε μάλλον ναι...

Ομάδα Α

E	Που πιστεύετε ότι θα έχουμε περισσότερο;
M2	E, στο 70-90.
M1	Εγώ γιατί πιστεύω ότι θα είναι ίδιος και στα δύο; E..., όχι;

Ομάδα Β

E	Το 90 με το 60; Να δούμε τη δεξαμενή ξανά; Είναι εδώ στο 90 φουλ και πάει στο 70. Και μετά από το 60 και πάει στο 40.	
M1	Ναι, είναι ίδια η μείωση.	Οι μαθήτριες φαίνονται μπερδεμένες.

Βλέπουμε ότι και στις τρεις ομάδες, οι οποίες εργάστηκαν ανεξάρτητα, οι μαθητές έχουν την ιδέα ότι ο όγκος θα είναι ίδιος. Οι εκπαιδευτικοί ήθελαν να δουν τις διαισθητικές απαντήσεις των μαθητών και στη συνέχεια τους παρότρυναν να σκεφτούν πιο προσεκτικά τις απαντήσεις τους και να σχεδιάσουν ένα σχήμα και στη συνέχεια να πειραματιστούν με το λογισμικό, να γεμίζουν σιγά-σιγά τον κύλινδρο.

Στη συνέχεια κλήθηκαν να περιγράψουν τη διαδικασία για να υπάρχει σύνδεση με το πραγματικό πλαίσιο εργασίας.

Οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι πλέον έχουν να κάνουν με μεταβλητή βάση, ό,τι αυτοί θεωρούν ως βάση, και ότι ο όγκος θα εξαρτάται από την μεταβαλλόμενη βάση κάθε φορά. Πλέον οι μαθητές καταλαβαίνουν ότι τα ποσά δεν είναι ανάλογα. Υπάρχει μία άλλη σχέση που τα συνδέει, την οποία δεν μπορούν να προσδιορίσουν.

Ομάδα Α

M2	Εντάξει, λογικά εδώ, γιατί έχει μεγαλώσει η βάση.
E	Ακριβώς. Άρα έπρεπε τι να κάνουμε, να δούμε στη μέση πρώτα και μετά από κει και πέρα τι συμβαίνει.
M	Ναι.
E	Άρα η διαφορά σε πόντους μεταξύ δύο μπορεί να είναι ίδια, αλλά η ποσότητα δεν είναι ίδια.
M	Ναι.
M2	Άμα ανεβαίνει από το 100 και άλλο, μεταβάλλονται και άλλο τα νούμερα.
E	Ωραία. Άρα πως το σκέφτεστε τώρα καθώς γεμίζει; Ο ρυθμός με τον οποίο γεμίζει;
M2	Δε γεμίζει αναλογικά.

Η ίδια διαπίστωση γίνεται και στις υπόλοιπες ομάδες. Πλέον οι μαθητές μπορούν να εκτιμήσουν, αλλά όχι να υπολογίσουν με ακρίβεια.

Στην επόμενη φάση οι εκπαιδευτικοί ρώτησαν ότι εφόσον τα ποσά δεν είναι ανάλογα, πως πιστεύουν ότι θα είναι τώρα η γραφική παράσταση; Κάνοντας πειράματα με το λογισμικό οι μαθητές δε μπορούσαν να συνδέσουν γραφικά αυτό που έλεγαν προφορικά: Το γεγονός ότι μετά τη μέση το πολύ-πολύ γινόταν λίγο-λίγο. Σαφώς εμείς δεν περιμέναμε οι μαθητές να περιγράψουν επακριβώς αυτή τη διαδικασία, αφού οι γνώσεις τους δεν ήταν επαρκείς για την αιτιολόγηση του φαινομένου. Θέλαμε όμως να δούμε πως θα περιέγραφαν τις μαθηματικές έννοιες του σημείου καμπής, της κυρτής και κοίλης συνάρτησης. Προσπαθούν με απλές και καθημερινές εκφράσεις να περιγράψουν τη μορφή της γραφικής παράστασης με λέξεις όπως «στρίβει», «γυρνάει μετά από την άλλη», «πηγαίνει απότομα», «κάνει έτσι και πάει από δω».

Ομάδα Α

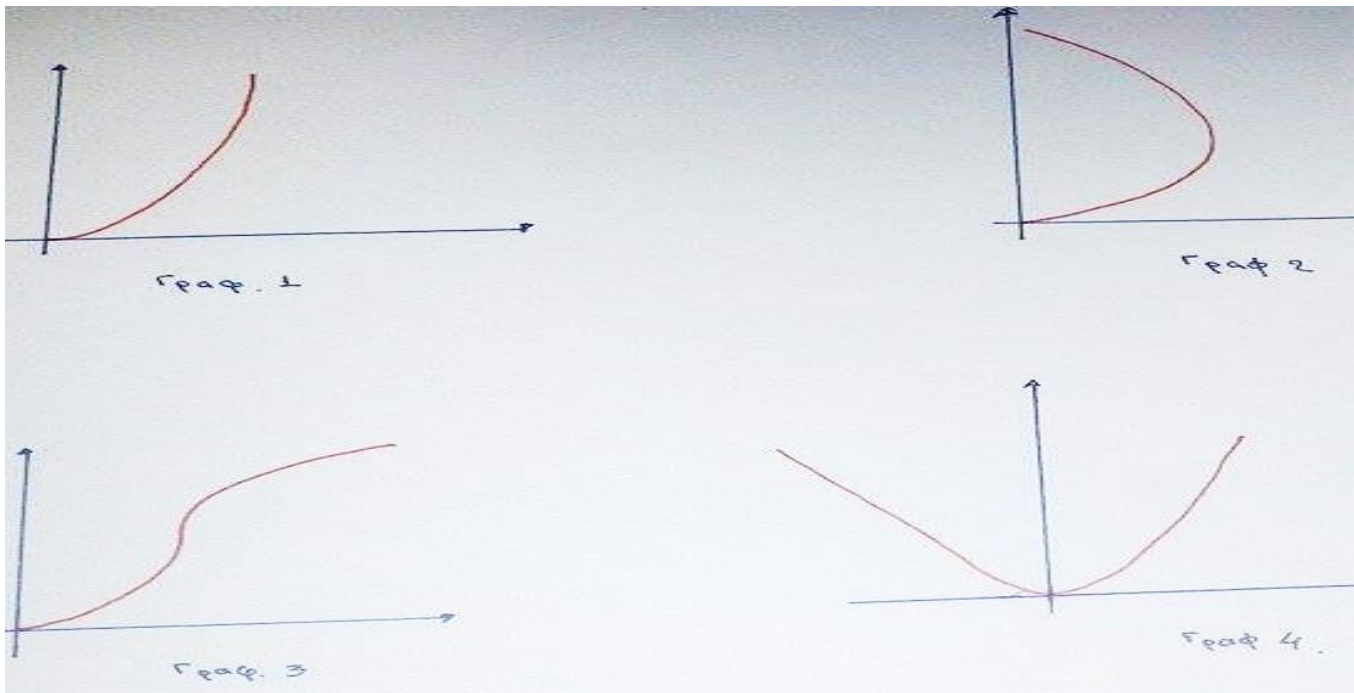
M2	Αλλάζει φορά.
E	Φορά; Οκ, απλά εσείς πέστε μου ό,τι πιστεύετε.
M2	Η καμπύλη γίνεται από την άλλη πλευρά.
M1	Υπάρχει πιο μεγάλη μεταβολή της...εε...της...
E	Κάτι παθαίνει εκεί η γραφική παράσταση.
M1	Αλλάζει η μορφή της;
E	Με ποια έννοια;
M1	Ότι εκεί που πήγαινε σαν ευθεία, πάει και στρίβει.
E	Πάει και στρίβει. Ωραία γράψτε το έτσι όπως το πιστεύετε.

Ομάδα Β

M1	Α! Θα πάει καμπυλωτά. Γιατί δεν είναι ανάλογα. Μπορούμε να βάλουμε αυτά που ξέρουμε σίγουρα για να δούμε πώς πάει.
E	Εννοείτε τιμές; Εντάξει...Πώς θα περιμένατε όμως να πήγαινε; Με το μάτι...Με το μυαλό...
M1	Μάλλον καμπύλη! Με τίποτα ευθεία!
E	Σχεδιάστε. Εσύ πώς θα την έκανες;

Οι εμπλεκόμενες μαθηματικές έννοιες της κυρτότητας, κοίλης συνάρτησης και του σημείου καμπής αποδίδονται περιγραφικά από τους μαθητές. Έχει γίνει αποσύνδεση από το χώρο εργασίας και οι έννοιες έχουν μαθηματικοποιηθεί.

Οι μαθητές σχεδιάζουν πιθανές γραφικές παραστάσεις, αυτές που αποδίδουν καλύτερα τις περιγραφές τους.



Στο γράφημα 3, οι μαθητές πλησίασαν αρκετά το πραγματικό γράφημα της συνάρτησης. Παρόλα αυτά δεν ήταν σίγουροι, διότι έλεγαν ότι δεν είχαν ξαναδεί συνάρτηση με τέτοιο γράφημα. Τελικά οι μαθητές νόμιζαν ότι οι μοναδικές γραφικές παραστάσεις είναι μόνο αυτές που έχουν διδαχθεί και μόνο αυτές μοντελοποιούν τον πραγματικό κόσμο.

Όταν, πλέον πειραματιζόμενοι με το λογισμικό, είδαν την γραφική παράσταση της διαδικασίας. Είναι σημαντικό ότι οι μαθητές για πρώτη φορά σχεδίασαν γραφική παράσταση συνάρτησης που δεν γνωρίζουν τον τύπο και δεν γνωρίζουν ούτε καν εάν τα δύο μεγέθη συνδέονται με κάποια συναρτησιακή σχέση. Δεν αναρωτήθηκαν για αυτό και σ' αυτό το σημείο επιβεβαιώθηκαν οι έρευνες ότι οι μαθητές βλέπουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ως κάτι ξεχωριστό από τον τύπο της.

Στη συνέχεια οι εκπαιδευτικοί επιστρέφουν στο πραγματικό πρόβλημα και ρωτούν τους μαθητές ποια λύση θα πρότειναν να εφαρμόσει ο υπάλληλος του βενζινάδικου. Οι μαθητές κατέληξαν ότι ο μόνος τρόπος θα ήταν μέσω της γραφικής παράστασης ή του πίνακα τιμών. Συγκεκριμένα πρότειναν ο υπάλληλος να βρει μέσω της γραφικής παράστασης τα 7000 λίτρα σε τι ύψος αντιστοιχούν. Στη συνέχεια να κάνει μετρήσεις με τη ράβδο για να διαπιστώσει την σωστή ποσότητα της παραλαβής.

Οι μαθητές επιστρέφουν στο αρχικό πρόβλημα και προτείνουν λύσεις**Ομάδα Β**

M1	Οκ. Άμα ξέρει, ας πούμε, πόσα λίτρα θέλει, θα βάλει να ελέγξει τον όγκο που θέλει, θα βάλει από αυτό να δει πόσο είναι η στάθμη του υγραερίου και μετά θα βάλει να ελέγξει, κάθετα όμως.
M2	Θα δει που αντιστοιχεί, με τη γραφική παράσταση.
E	Άρα, πάει το βυτίο. Του λέει «στάσου μισό λεπτό»...Ελέγχει τη στάθμη της δεξαμενής και βλέπει τον όγκο που αντιστοιχεί. Καταγράφει. Παραλαμβάνει. Και στη συνέχεια τι κάνει;
M1	Μετράει ξανά. Υπολογίζει πόσο όγκο έχει για να βρει τη διαφορά.

Ομάδα Α

M2	Τίποτα να φτιάξει μια γραφική παράσταση;
E	Ωραία, η γραφική παράσταση είναι αυτή. Την έχει φτιάξει λοιπόν και τι θα κάνει;
M2	Ναι, μετά θα δει τι έδειξε και ο όγκος, ώστε να το συνεχίσει μέχρι τα 7000 λίτρα.
E	Ωραία και τι θα κάνει μετά;
M1	Θα κοιτάξει το ύψος.
E	Ωραία, θα κοιτάξει σε τι ύψος αντιστοιχεί.
M	Ναι.
E	Θα πάει μετά να βάλει τη βέργα και θα πρέπει να διαπιστώσει αν...
M	Ναι, σωστά, αν είναι το ίδιο ύψος.
E	Ακριβώς.
M2	Ωραία.
E	Άρα ο μοναδικός τρόπος λύσης για να ελέγξει, είναι...;
M2	Να χρησιμοποιήσει τη βέργα και τη γραφική παράσταση.
E	Ακριβώς, γιατί δεν έχει τύπο. Σας ευχαριστώ πολύ.

Οι μαθητές ρωτήθηκαν στο τέλος για τις εντυπώσεις τους και είπαν ότι ήταν κάτι το οποίο δεν είχαν ξαναδεί και αυτό τους εντυπωσίασε.

Ένα ακόμα στοιχείο που αξίζει να σημειωθεί είναι η χρήση του λογισμικού *Geogebra*. Οι μαθητές μέσω της οπτικοποίησης παροτρύνθηκαν να διερευνήσουν, να κάνουν εικασίες, να τις επιβεβαιώσουν και τελικά να οδηγηθούν στη ζητούμενη μαθηματικοποίηση.

Τι θα αλλάζαμε.

Αυτό που θα θέλαμε να προσθέσουμε στο σενάριο μας θα ήταν η δυνατότητα επίσκεψης των μαθητών σε ένα πρατήριο υγρών καυσίμων. Η επαφή με το χώρο και η συνομιλία τους με τους εκεί εργαζόμενους θα προσέφερε τη δυνατότητα στους μαθητές να δουν από κοντά τις συνθήκες που επικρατούν κατά την παραλαβή του καυσίμου. Μ' αυτόν τον τρόπο η σύνδεση με το χώρο εργασίας θα ήταν πιο ομαλή. Θα μπορούσαμε, φυσικά να είχαμε παρουσιάσει σε βίντεο στιγμιότυπα από την παραλαβή και να το παρουσιάζαμε πριν την παρέμβασή μας.

Τι μάθαμε από το σχεδιασμό, την εφαρμογή και την ανάλυση της παρούσας δραστηριότητας;

Ως εκπαιδευτικοί είμαστε συνηθισμένοι να δίνουμε στους μαθητές προβλήματα από τα σχολικά βιβλία ή βοηθήματα. Δεν είχαμε ποτέ σχεδιάσει ένα πρόβλημα που να προέρχεται από το χώρο εργασίας προκειμένου να μαθηματικοποιηθεί. Οι προβληματισμοί μας ήταν κυρίως πάνω σε αυτό το θέμα, καθώς η τεχνολογία προσφέρει σχεδόν όλα τα απαραίτητα μέσα που χρειάζονται για τις μετρήσεις σε ένα χώρο εργασίας. Έτσι, μέσα από τη μεταξύ μας συνεργασία είδαμε πόση προσοχή χρειάζεται η δομή μίας τέτοιας δραστηριότητας.

Επίσης διαπιστώσαμε ότι η εργασία σε ομάδες των δύο προσφέρει ένα πολύ καλό υλικό για έρευνα και όταν οι ομάδες είναι διαφορετικές παρέχεται η δυνατότητα σύγκρισης αποτελεσμάτων και απαντήσεων των μαθητών.

Τέλος, διαπιστώσαμε ότι οι μαθητές όταν καλούνται να λύνουν προβλήματα που δεν αφορούν την σχολική ύλη και έχουν να κάνουν με την πραγματική ζωή μπορεί να βαριούνται και να κουράζονται. Η υπομονή τους εξαντλείται από την πολύ διερεύνηση και σπεύδουν να δώσουν μία γρήγορη απάντηση. Ωστόσο κατά την εμπάθυσή τους σ' αυτό, παρατηρήσαμε ότι προέκυψαν πλούσιες μαθηματικές έννοιες αλλά και συμπεράσματα για το τι τελικά οι μαθητές έχουν κατανοήσει σε βάθος από τα όσα έχουν διδαχτεί.

Επέκταση της Δραστηριότητας

Θεωρούμε τη δραστηριότητα αυτή άκρως κατάλληλη για εισαγωγή στην μελέτη συνάρτησης σε τάξεις του Λυκείου. Οι έννοιες των σημείων καμπής, κοίλης συνάρτησης, κυρτής, γνησίως αύξουσα και γνησίως φθίνουσα, υπαγορεύονται στους μαθητές χωρίς να εξηγηθεί η σημασία και η χρησιμότητά τους.

Πιστεύουμε ότι με τη δραστηριότητα αυτή δημιουργείται η ανάγκη ύπαρξης τέτοιων ορισμών, όπως διαπιστώσαμε αναλυτικά στην ανάλυση της δραστηριότητας.

Βιβλιογραφία

- 1) Artigue, M, Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education* (2013) 45:797–81 DOI 10.1007/s11858-013-0506-6
- 2) Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education. China lectures. *Mathematics Education Library*, vol.9
- 3) Gravemeijer K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking And Learning*, 1: 155-177.
- 4) Marrades R. & Gudierrez A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics* 44: 87-125.
- 5) Menon U. (2013). Mathematisation-vertical and horizontal. *epiSTEME 5 International Conference to Review Research on Science, Technology and Mathematics Education, Conference Proceedings*. India: Cinnamonteal. P 260-267
- 6) Treffers, A. (1987). Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education: The Wiskobas Project. Dordrecht, The Netherlands: Reidel
- 7) Treffers, A. (1991). Didactical background of a mathematics program for primary education. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 21-57). Utrecht, The Netherlands: Cd-β Press.
- 8) Δέσποινα Πόταρη : Μελέτη συνάρτησης , άρθρο Serpienska.