# Μαθηματικά

## Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

| | |
|---|---|
| ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ | **Παναγιώτης Βλάμος,** *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης*<br>**Παναγιώτης Δρούτσας**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης*<br>**Γεώργιος Πρέσβης**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης*<br>**Κωνσταντίνος Ρεκούμης**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης* |
| ΚΡΙΤΕΣ-ΑΞΙΟΛΟΓΗΤΕΣ | **Βασίλειος Γιαλαμάς,** *Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Κ.Π.Α.*<br>**Χαράλαμπος Τουμάσης**, *Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών*<br>**Πολυξένη Ράδου**, *Μαθηματικός, Εκπαιδευτικός Β/θμιας Εκπαίδευσης* |
| ΕΙΚΟΝΟΓΡΑΦΗΣΗ | **Θεοδόσης Βρανάς**, *Σκιτσογράφος - Εικονογράφος* |
| ΦΙΛΟΛΟΓΙΚΗ ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ | **Ευγενία Βελάγκου**, *Φιλόλογος, Εκπαιδευτικός Ιδιωτικής Εκπαίδευσης* |
| ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΥΠΟΕΡΓΟΥ ΚΑΤΑ ΤΗ ΣΥΓΓΡΑΦΗ | **Γεώργιος Πολύζος**, *Πάρεδρος ε.θ. του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου* |
| ΕΞΩΦΥΛΛΟ | **Γεώργιος Μήλιος**, *Ζωγράφος - Χαράκτης* |
| ΠΡΟΕΚΤΥΠΩΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ | ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΠΑΤΑΚΗ |

**Γ΄ Κ.Π.Σ.** / **ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ** / **Ενέργεια 2.2.1.** / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α:
«Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ
**Δημήτριος Γ. Βλάχος**
*Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ.,*
*Πρόεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
**Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης**
*Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*

Αναπληρωτές Επιστημονικοί Υπεύθυνοι Έργου
**Γεώργιος Κ. Παληός**
*Σύμβουλος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*
**Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου**
*Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου*

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

**Παναγιώτης Βλάμος**
**Παναγιώτης Δρούτσας**
**Γεώργιος Πρέσβης**
**Κωνσταντίνος Ρεκούμης**

# Μαθηματικά

## Β′ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ
ΑΘΗΝΑ

# Πρόλογος

Το βιβλίο **«Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου»** περιλαμβάνει την ύλη που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.

Αποτελείται από δύο μέρη τα οποία θα μελετηθούν παράλληλα και αρκετές φορές συμπληρωματικά.

Στο πρώτο μέρος, η Άλγεβρα ξεκινά με εξισώσεις και ανισώσεις α' βαθμού, ενώ στο δεύτερο μέρος η Γεωμετρία ξεκινά με τα εμβαδά επίπεδων σχημάτων τα οποία οδηγούν στο Πυθαγόρειο θεώρημα. Στη Γεωμετρία το Πυθαγόρειο θεώρημα θα μελετηθεί μόνο για ρητούς αριθμούς και κατόπιν θα αποτελέσει τη βάση για την εισαγωγή των άρρητων αριθμών στο δεύτερο κεφάλαιο της Άλγεβρας. Γνωρίζοντας τους πραγματικούς αριθμούς μπορούμε να μελετήσουμε την Τριγωνομετρία, η οποία καταλαμβάνει τις περισσότερες παραγράφους του δεύτερου κεφαλαίου του δευτέρου μέρους, το οποίο ολοκληρώνεται με τα διανύσματα.

Στη συνέχεια η πορεία των δύο μερών του βιβλίου γίνεται σχεδόν ανεξάρτητη. Το πρώτο μέρος ολοκληρώνεται με την παρουσίαση βασικών συναρτήσεων και την περιγραφική Στατιστική, ενώ το δεύτερο με τη μέτρηση κύκλου και τη μελέτη και μέτρηση γεωμετρικών στερεών.

Οι συγγραφείς

# Περιεχόμενα

## ΜΕΡΟΣ Α’

### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ



### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο - ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ



### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο - ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ



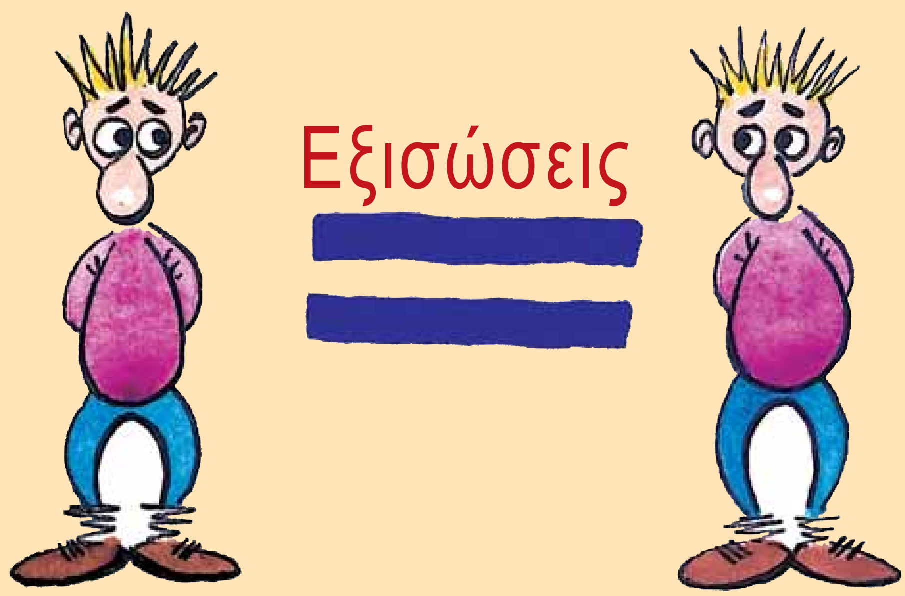
## ΜΕΡΟΣ Β’

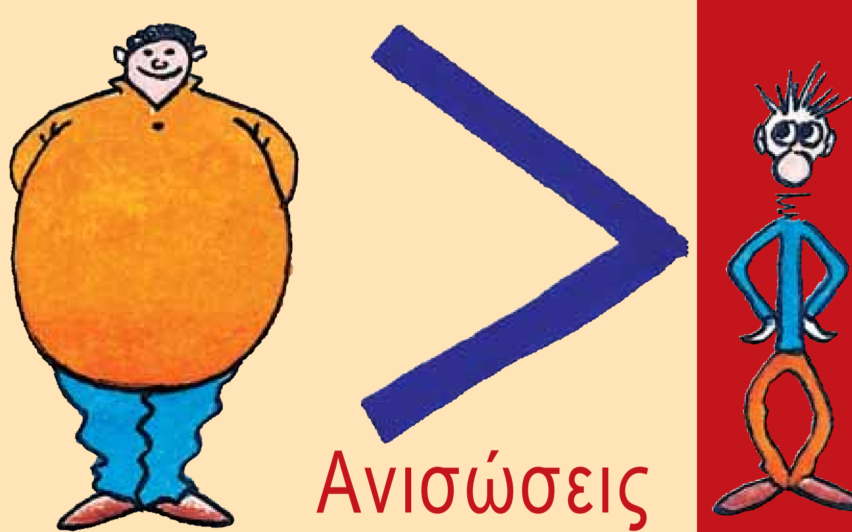
### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - ΕΜΒΑΔΑ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ - ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

# Περιεχόμενα

## ΜΕΡΟΣ Α΄

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο



# ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ



*Λίγα πράγματα είναι γνωστά για τη ζωή του μεγάλου έλληνα μαθηματικού* ***Διόφαντου,*** *που έζησε στην Αλεξάνδρεια τον 3ο μ.Χ. αιώνα. Οι εργασίες του όμως είχαν τεράστια σημασία για τη θεμελίωση της Άλγεβρας και εκτιμήθηκαν πολύ τους επόμενους αιώνες. Από τα 13 έργα που έγραψε σώθηκαν μόνο τα 10 (τα 6 σε ελληνικά χειρόγραφα και τα 4 σε αραβική μετάφραση).*
*Το πιο διάσημο από τα έργα του είναι τα «****Αριθμητικά****» (6 βιβλία). Πρόκειται για το αρχαιότερο ελληνικό έργο στο οποίο για πρώτη φορά χρησιμοποιείται μεταβλητή για την επίλυση προβλήματος. Προς τιμήν του μια ειδική κατηγορία εξισώσεων ονομάζεται «****Διοφαντικές εξισώσεις****».*

*Όταν πέθανε, οι μαθητές του -κατά παραγγελίαν του- αντί άλλου επιγράμματος, συνέθεσαν ένα γρίφο και τον έγραψαν πάνω στον τάφο του. Ιδού λοιπόν το Επίγραμμα του Διόφαντου.*

«ΔΙΑΒΑΤΗ ΣΕ ΑΥΤΟ ΤΟΝ ΤΑΦΟ ΑΝΑΠΑΥΕΤΑΙ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ. ΣΕ ΕΣΕΝΑ ΠΟΥ ΕΙΣΑΙ ΣΟΦΟΣ, Η ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΘΑ ΔΩΣΕΙ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ. ΑΚΟΥΣΕ

- Ο ΘΕΟΣ ΤΟΥ ΕΠΕΤΡΕΨΕ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΝΕΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΝΑ ΕΚΤΟ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ.
- ΑΚΟΜΗ ΕΝΑ ΔΩΔΕΚΑΤΟ ΚΑΙ ΦΥΤΡΩΣΕ ΤΟ ΜΑΥΡΟ ΓΕΝΙ ΤΟΥ.
- ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΕΝΑ ΕΒΔΟΜΟ ΑΚΟΜΑ ΗΡΘΕ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΤΟΥ Η ΜΕΡΑ.
- ΤΟΝ ΠΕΜΠΤΟ ΧΡΟΝΟ ΑΥΤΟΥ ΤΟΥ ΓΑΜΟΥ ΓΕΝΝΗΘΗΚΕ ΕΝΑ ΠΑΙΔΙ.
- ΤΙ ΚΡΙΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΝΕΑΡΟ ΤΟΥ ΓΙΟ. ΑΦΟΥ ΕΖΗΣΕ ΜΟΝΑΧΑ ΤΑ ΜΙΣΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΑΤΕΡΑ ΤΟΥ ΓΝΩΡΙΣΕ ΤΗΝ ΠΑΓΩΝΙΑ ΤΟΥ ΘΑΝΑΤΟΥ.
- ΤΕΣΣΕΡΑ ΧΡΟΝΙΑ ΑΡΓΟΤΕΡΑ Ο ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ ΒΡΗΚΕ ΠΑΡΗΓΟΡΙΑ ΣΤΗ ΘΛΙΨΗ ΤΟΥ ΦΤΑΝΟΝΤΑΣ ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΖΩΗΣ ΤΟΥ».

*Σύμφωνα μ' αυτό το επίγραμμα, πόσα χρόνια έζησε ο Διόφαντος; Αν x παριστάνει την ηλικία του Διόφαντου, όταν πέθανε, τότε το παραπάνω πρόβλημα παριστάνεται από την*

*εξίσωση:* $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x.$

*Στο κεφάλαιο αυτό θα μάθουμε να λύνουμε τέτοιες εξισώσεις (καθώς και ανισώσεις).*
*Θα αναζητήσουμε επίσης τρόπους να εφαρμόζουμε τη μέθοδο αυτή, για να λύνουμε προβλήματα της καθημερινής ζωής.*

# 1.1. Η έννοια της μεταβλητής - Αλγεβρικές παραστάσεις

## Μεταβλητή

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

*Η ομιλία σε κινητό τηλέφωνο κοστίζει 0,005 € το δευτερόλεπτο. Πόσο κοστίζει ένα τηλεφώνημα διάρκειας 10 δευτερολέπτων, ένα άλλο διάρκειας 15 δευτερολέπτων και ένα άλλο διάρκειας 27 δευτερολέπτων;*

### Λύση

Εύκολα βέβαια βρίσκουμε ότι:

- Ένα τηλεφώνημα διάρκειας 10 δευτερολέπτων κοστίζει $10 \cdot 0{,}005 = 0{,}05$ €.
- Ένα τηλεφώνημα διάρκειας 15 δευτερολέπτων κοστίζει $15 \cdot 0{,}005 = 0{,}075$ €.
- Ένα τηλεφώνημα διάρκειας 27 δευτερολέπτων κοστίζει $27 \cdot 0{,}005 = 0{,}135$ €.

Μπορούμε λοιπόν να σκεφτούμε ότι το κόστος ενός τηλεφωνήματος θα είναι: **(διάρκεια τηλεφωνήματος) · 0,005 €**. Για ευκολία, συμβολίζουμε με το γράμμα **x** τη διάρκεια του τηλεφωνήματος (σε δευτερόλεπτα), οπότε καταλήγουμε ότι το κόστος για κάθε τηλεφώνημα διάρκειας x δευτερολέπτων είναι: **x · 0,005 €**.

Το γράμμα **x** που παριστάνει έναν οποιοδήποτε αριθμό, λέγεται **μεταβλητή**.

Φυσικά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα (ελληνικά ή λατινικά) για να παραστήσουμε μεταβλητές: y, z, t, α, β, γ, ...

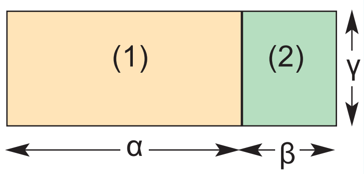
## Αλγεβρικές παραστάσεις - Αναγωγή ομοίων όρων

- Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς, λέγεται, όπως γνωρίζουμε, **αριθμητική παράσταση**.
  Για παράδειγμα, η παράσταση $2 \cdot 3 - 4 \cdot (-3) + 5$ είναι μια αριθμητική παράσταση. Ομοίως, η παράσταση $\dfrac{5 \cdot 8 + 4 \cdot 3}{2(-7) + 6 \cdot 9}$ είναι μία αριθμητική παράσταση.

- Μια παράσταση που περιέχει πράξεις με αριθμούς και μεταβλητές ονομάζεται **αλγεβρική παράσταση**.
  Για παράδειγμα, η παράσταση $2 \cdot x - 4 \cdot x + 5$ είναι μια αλγεβρική παράσταση. Οι προσθετέοι λέγονται **όροι** αυτής.
  Ομοίως, η παράσταση $\dfrac{2 \cdot x - 4}{3 \cdot x^2 + 5}$ είναι μία αλγεβρική παράσταση. **Πώς κάνουμε όμως τις πράξεις σε μια αλγεβρική παράσταση;** Στο σημείο αυτό μπορεί να μας βοηθήσει λίγο η Γεωμετρία! Ας θυμηθούμε, λοιπόν, τα εμβαδά των ορθογωνίων:

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

*Στο διπλανό σχήμα δύο ορθογώνια (1) και (2) είναι «τοποθετημένα» έτσι ώστε να σχηματίζουν ένα μεγάλο ορθογώνιο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου.*




### Λύση

Για να βρούμε το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου, υπάρχουν δύο τρόποι:

➤ **1ος τρόπος:**
Το μεγάλο ορθογώνιο έχει βάση α + β και ύψος γ, άρα το εμβαδόν του είναι:

**(α + β) · γ**

➤ **2ος τρόπος:**
Το εμβαδόν του (1) είναι: **α · γ**.
Το εμβαδόν του (2) είναι: **β · γ**.
Άρα το εμβαδόν του μεγάλου ορθογωνίου είναι:

**α · γ + β · γ**

Φυσικά, και οι δύο τρόποι θα πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή: **(α + β) · γ = α · γ + β · γ**, που είναι η γνωστή **επιμεριστική ιδιότητα,** η οποία μπορεί να γραφεί και στη μορφή:

**α · γ + β · γ = (α + β) · γ**

Στη μορφή αυτή, η επιμεριστική ιδιότητα μπορεί να μας βοηθήσει να κάνουμε εύκολα πράξεις στις αλγεβρικές παραστάσεις:

***Παράδειγμα:***

7 · α + 8 · α = (7 + 8) · α = 15 · α
x + 4 · x – 2 · x = (1 + 4 – 2) · x = 3 · x
5 · t – 6 · t – 8 · t = (5 – 6 – 8) · t = –9 · t

**Η διαδικασία αυτή με την οποία γράψαμε σε απλούστερη μορφή τις παραπάνω αλγεβρικές παραστάσεις, ονομάζεται «αναγωγή ομοίων όρων».**

***Παρατήρηση:***

*Όταν γράφουμε αλγεβρικές παραστάσεις, συνήθως δε βάζουμε το σύμβολο (·) του πολλαπλασιασμού μεταξύ των αριθμών και των μεταβλητών ή μεταξύ των μεταβλητών. Γράφουμε δηλαδή 3xy αντί για 3·x·y. Επίσης, γράφουμε 2(4xy – 1) + 3(2 – 5x) αντί για 2·(4·x·y – 1) + 3·(2 – 5·x).*
*Το σύμβολο του πολλαπλασιασμού θα χρησιμοποιείται βέβαια, για τον πολλαπλασιασμό αριθμών: 3 · 5 ή 3·(–5).*

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

*Να γράψετε με απλούστερο τρόπο τις παραστάσεις:*
*(α) 2x + 5x, (β) 3α + 4α – 12α, (γ) ω + 3ω + 5ω + 7ω.*

**Λύση:** Έχουμε ότι:
(α) 2x + 5x = (2 + 5)x = 7x
(β) 3α + 4α – 12α = (3 + 4 – 12)α = –5α
(γ) ω + 3ω + 5ω + 7ω = (1 + 3 + 5 + 7)ω = 16ω.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

*Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: (α) $4y + 3x - 2y + x$, (β) $y + 2\omega - 3y + 2 + \omega + 5$.*

**Λύση:** Έχουμε ότι:

(α) $4y + 3x - 2y + x = 4y - 2y + 3x + x = (4 - 2)y + (3 + 1)x = 2y + 4x$

(β) $y + 2\omega - 3y + 2 + \omega + 5 = y - 3y + 2\omega + \omega + 2 + 5 = (1-3)y + (2+1)\omega + (2+5) =$
$= -2y + 3\omega + 7.$

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

*Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 2(x + 3) - 4(x - 1) - 8$, όταν $x = -0{,}45$.*

**Λύση:** Απλοποιούμε πρώτα την παράσταση Α:

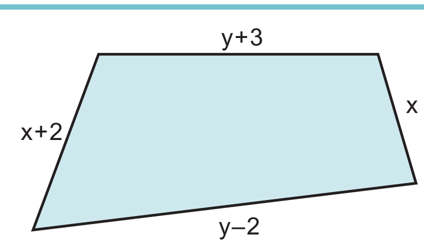
$A = 2(x + 3) - 4(x - 1) - 8 =$
$= 2x + 6 - 4x + 4 - 8 = 2x - 4x + 6 + 4 - 8 = -2x + 2$

Επομένως, όταν $x = -0{,}45$, είναι: $A = -2\cdot(-0{,}45) + 2 = 0{,}9 + 2 = 2{,}9$.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

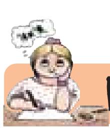
*Να υπολογίσετε την περίμετρο του παρακάτω τετραπλεύρου, όταν $x + y = 10$.*

**Λύση:** Η περίμετρος του τετραπλεύρου είναι ίση με:




$\Pi = x + (y + 3) + (x + 2) + (y - 2) =$
$= x + y + 3 + x + 2 + y - 2 =$
$= x + x + y + y + 3 + 2 - 2 = 2x + 2y + 3 =$
$= 2(x + y) + 3$

Επειδή $x + y = 10$, είναι $\Pi = 2\cdot 10 + 3 = 20 + 3 = 23$.



## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

**1.** Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α του διπλανού πίνακα με ένα στοιχείο της στήλης Β.

| ΣΤΗΛΗ Α | ΣΤΗΛΗ Β |
|---|---|
| α) $2x+5x-3x$ | i) $-4x$ |
| β) $x-3x+4x$ | ii) $-5x$ |
| γ) $-x+3x-6x$ | iii) $4x$ |
| δ) $-2x+4x-7x$ | iv) $2x$ |

**2.** Για κάθε αλγεβρική παράσταση της 1ης στήλης του διπλανού πίνακα, δίνονται τρεις απαντήσεις Α, Β και Γ, από τις οποίες μία μόνο είναι σωστή. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

| | Α | Β | Γ |
|---|---|---|---|
| α) $2x-4x+6x=$ | $12x$ | $-2x$ | $4x$ |
| β) $3y-3y+4y=$ | $4y$ | $10y$ | $-5y$ |
| γ) $-5\alpha+3\alpha-\alpha=$ | $3\alpha$ | $-3\alpha$ | $9\alpha$ |
| δ) $3\alpha-4\beta+4\beta-5\alpha=$ | $8\alpha+8\beta$ | $2\alpha$ | $-2\alpha$ |

**3.** Να αντιστοιχίσετε κάθε παράσταση της στήλης Α με την ίση της παράσταση που βρίσκεται στη στήλη Β.

| ΣΤΗΛΗ Α | ΣΤΗΛΗ Β |
|---|---|
| α) $(3x + 5) + (x - 6)$ | i) $-4x + 11$ |
| β) $(-3x + 5) - (x - 6)$ | ii) $-4x + 1$ |
| γ) $(-3x + 5) - (x + 6)$ | iii) $-4x - 1$ |
| δ) $-(3x + 5) - (x - 6)$ | iv) $4x - 1$ |

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1** Να χρησιμοποιήσετε μεταβλητές για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:
α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 12.
β) Το άθροισμα δύο αριθμών πολλαπλασιασμένο επί 9.
γ) Την περίμετρο ενός ορθογωνίου, που το μήκος του είναι 2 m μεγαλύτερο από το πλάτος του.

**2** Να χρησιμοποιήσετε μια μεταβλητή για να εκφράσετε με μια αλγεβρική παράσταση τις παρακάτω φράσεις:
α) Το συνολικό ποσό που θα πληρώσουμε για να αγοράσουμε 5 κιλά πατάτες, αν γνωρίζουμε την τιμή του ενός κιλού.
β) Την τελική τιμή ενός προϊόντος, αν γνωρίζουμε ότι αυτή είναι η αναγραφόμενη τιμή συν 19% ΦΠΑ.

**3** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $20x - 4x + x$
β) $-7α - 8α - α$
γ) $14y + 12y + y$
δ) $14ω - 12ω - ω + 3ω$
ε) $-6x + 3 + 4x - 2$
στ) $β - 2β + 3β - 4β$

**4** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $2x - 4y + 3x + 3y$
β) $6ω - 2ω + 4α + 3ω + α$
γ) $x + 2y - 3x - 4y$
δ) $-8x + ω + 3ω + 2x - x$

**5** Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις Α, Β και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή τους:
α) $Α = 3(x + 2y) - 2(2x + y)$, όταν $x = 1$, $y = -2$.
β) $Β = 5(2α - 3β) + 3(4β - α)$, όταν $α = -3$, $β = 5$.

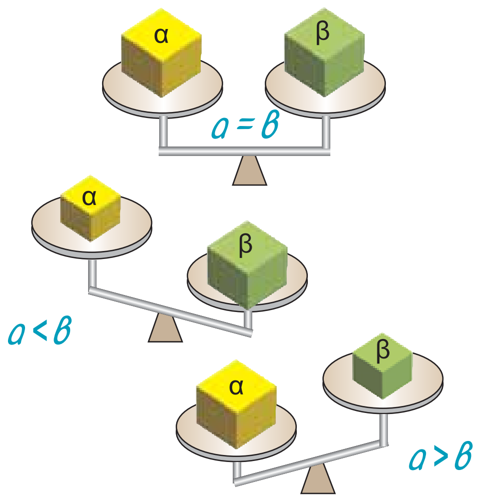
**6** Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:
α) $Α = 2(α-3β) + 3(α + 2β)$, όταν $α = 0{,}02$ και $β = 2005$.
β) $Β = 3(x + 2y) + 2(3x + y) + y$, όταν $x + y = \frac{1}{9}$.

**7** Οι διαιτολόγοι, για να εξετάσουν αν ένα άτομο είναι αδύνατο ή παχύ, χρησιμοποιούν τον αριθμό $\frac{Β}{υ^2}$ (δείκτης σωματικού βάρους ή body mass index, δηλαδή BMI), όπου Β το βάρος του ατόμου και υ το ύψος του σε μέτρα. Ανάλογα με το αποτέλεσμα αυτό, το άτομο κατατάσσεται σε κατηγορία σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα:


| | ΓΥΝΑΙΚΕΣ | ΑΝΔΡΕΣ |
|---|---|---|
| **Κανονικό βάρος** | 18,5 - 23,5 | 19,5 - 24,9 |
| **1ος βαθμός** παχυσαρκίας | 23,6 - 28,6 | 25 - 29,9 |
| **2ος βαθμός** παχυσαρκίας | 28,7 - 40 | 30 - 40 |
| **3ος βαθμός** παχυσαρκίας | πάνω από 40 | πάνω από 40 |

Να χαρακτηρίσετε:
α) Το Γιώργο, με βάρος 87 κιλά και ύψος 1,75 μέτρα.
β) Την Αλέκα, με βάρος 64 κιλά και ύψος 1,42 μέτρα.
γ) Τον εαυτό σας.

# 1.2. Εξισώσεις α′ βαθμού



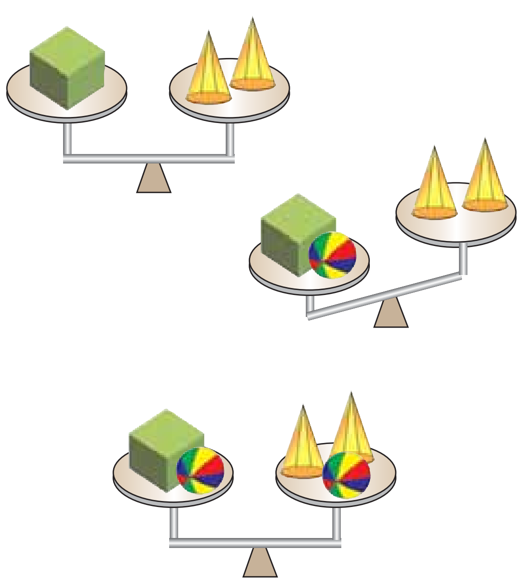

## Χρήσιμες ιδιότητες πράξεων

Μια σχέση ισότητας ή ανισότητας είναι στην ουσία μια ζυγαριά, η οποία είτε ισορροπεί, είτε γέρνει από τη μία πλευρά, είτε γέρνει από την άλλη.

Αν α και β παριστάνουν τα βάρη των αντικειμένων του σχήματος, τότε θα ισχύει μία μόνο από τις σχέσεις:

$$\alpha = \beta, \quad \alpha < \beta, \quad \alpha > \beta$$

Για να χειριστούμε σωστά μια ισότητα, είναι χρήσιμο να έχουμε υπόψη μας μερικούς βασικούς κανόνες.



**ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1**

*Ο Γιώργος έχει μια ζυγαριά που ισορροπεί, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Πρόκειται δηλαδή για έναν κύβο που έχει βάρος ίσο με το βάρος δύο κώνων. Προσθέτει στο δίσκο της ζυγαριάς όπου βρίσκεται ο κύβος, μια μπάλα, οπότε η ζυγαριά γέρνει προς αυτή την πλευρά. Πόσες μπάλες πρέπει να τοποθετήσει στο δίσκο της ζυγαριάς όπου βρίσκονται οι δύο κώνοι, για να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά;*

### Λύση

Για να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά, πρέπει βέβαια να τοποθετήσει και στην άλλη πλευρά το ίδιο βάρος, δηλαδή μία μπάλα.
Δηλαδή: ένας κύβος και μία μπάλα ισορροπούν με 2 κώνους και μία μπάλα.
Το συμπέρασμα αυτό μπορούμε να το διατυπώσουμε ως γενικότερο κανόνα για τις ισότητες.

Άρα:

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας **προσθέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή: Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

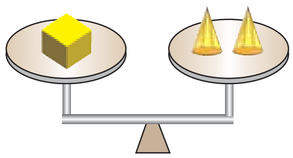
Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το ίδιο ισχύει και για την αφαίρεση.

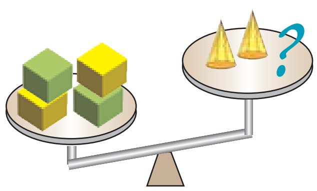
Άρα:

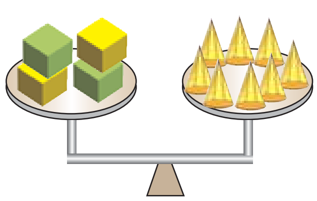
Αν και από τα δύο μέλη μιας ισότητας **αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή: Αν $\alpha = \beta$ τότε $\alpha - \gamma = \beta - \gamma$.

**ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2**

*Ο Γιώργος ξέρει ότι ένας κύβος ισορροπεί με δύο κώνους. Αν βάλει 4 κύβους στη μία πλευρά, πόσους κώνους πρέπει να βάλει στην άλλη πλευρά, ώστε να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά;*







**Λύση**

Αφού τετραπλασίασε το βάρος στη μία πλευρά, για να ισορροπήσει και πάλι η ζυγαριά, πρέπει να τοποθετήσει τετραπλάσιο βάρος και στην άλλη πλευρά, δηλαδή πρέπει να τοποθετήσει 8 κώνους.

Γενικά:

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας **πολλαπλασιαστούν** με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

Αν $\alpha=\beta$ τότε $\alpha\cdot\gamma=\beta\cdot\gamma$.

Ομοίως:

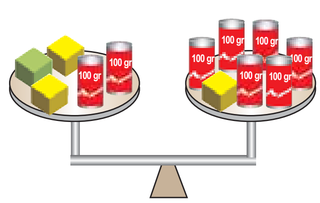
Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας **διαιρεθούν** με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

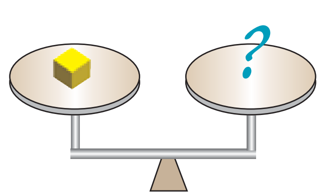
Αν $\alpha=\beta$ τότε $\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma}$ με $\gamma\neq 0$.

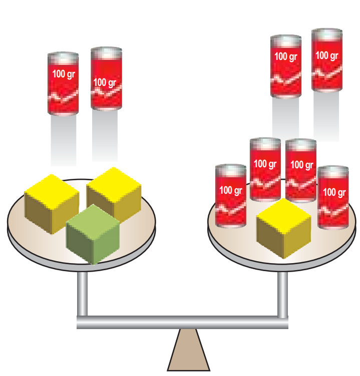
## Η έννοια της εξίσωσης

**ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3**

*Η διπλανή ζυγαριά ισορροπεί! Μπορείτε να βρείτε πόσο ζυγίζει ένας κύβος; Τα βαρίδια ζυγίζουν 100 γραμμάρια το καθένα.*





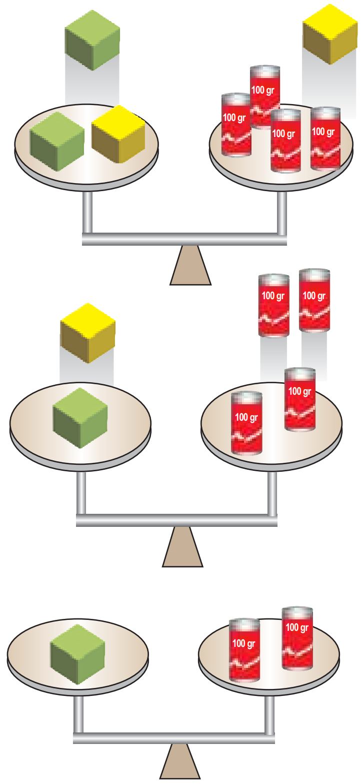


**Λύση**

Για να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα, θα πρέπει να προσπαθήσουμε να απομονώσουμε στον ένα δίσκο της ζυγαριάς έναν κύβο, φροντίζοντας όμως η ζυγαριά να ισορροπεί.

➤ **1ο βήμα:**

Καταρχάς, παρατηρούμε ότι στον ένα δίσκο της ζυγαριάς υπάρχουν δύο βαρίδια των 100 γραμμαρίων το καθένα, και στον άλλο δίσκο υπάρχουν έξι. Επομένως, μπορούμε να αφαιρέσουμε δύο βαρίδια από κάθε δίσκο χωρίς να "χαλάσουμε" την ισορροπία της ζυγαριάς.



➤ **2ο βήμα:**
Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι μπορούμε με τον ίδιο τρόπο ν' αφαιρέσουμε έναν κύβο από κάθε δίσκο χωρίς πάλι να διαταραχθεί η ισορροπία της ζυγαριάς.

➤ **3ο βήμα:**
Τώρα έχουν μείνει δύο κύβοι στον ένα δίσκο και τέσσερα βαρίδια στον άλλο. Για να βρούμε πόσο βάρος έχει ο ένας κύβος, μπορούμε να σηκώσουμε έναν κύβο από τον ένα δίσκο (δηλαδή το μισό βάρος ενός δίσκου) και δύο βαρίδια από τον άλλο δίσκο (δηλαδή το μισό βάρος του άλλου δίσκου). Διαιρέσαμε, λοιπόν, τα βάρη και των δύο δίσκων δια 2, οπότε η ζυγαριά συνεχίζει να ισορροπεί.

Άρα, ένας κύβος ζυγίζει 200 γραμμάρια.

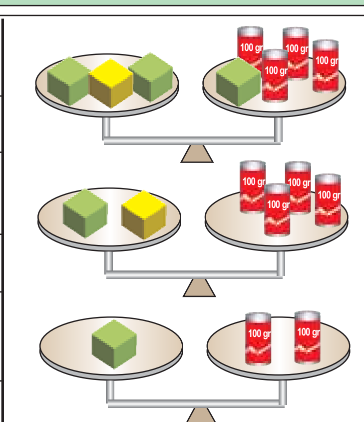
Ας δούμε τώρα μια «*μαθηματική*» λύση του παραπάνω προβλήματος:

Ας πούμε ότι κάθε κύβος ζυγίζει x κιλά.
Τότε, στον αριστερό δίσκο της ζυγαριάς βρίσκονταν στην αρχή 3x + 200 γραμμάρια και στο δεξιό δίσκο x + 600 γραμμάρια. Αφού η ζυγαριά ισορροπεί, θα είναι: $3x + 200 = x + 600$.

Η ισότητα αυτή, που περιέχει τον άγνωστο αριθμό x, ονομάζεται **εξίσωση.**

Η παράσταση 3x + 200 λέγεται **πρώτο μέλος** της εξίσωσης, ενώ η παράσταση x + 600 λέγεται **δεύτερο μέλος** αυτής.

Για να βρούμε τώρα τον άγνωστο αριθμό x, λύνουμε την εξίσωση.

| **Εξίσωση 3x + 200 = x + 600** | **Περιγραφή λύσης** | |
|---|---|---|
| $3x+200-200=x+600-200$ | Αφαιρούμε το 200 και από τα δύο μέλη της εξίσωσης |  |
| $3x = x + 400$ | Κάνουμε τις πράξεις | |
| $3x - x = x + 400 - x$ | Αφαιρούμε το x και από τα δύο μέλη της εξίσωσης | |
| $(3-1)x = 400$ άρα $2x = 400$ | Αναγωγή ομοίων όρων | |
| $\frac{2x}{2} = \frac{400}{2}$ | Διαιρούμε με το 2 και τα δύο μέλη της εξίσωσης | |
| $x = 200$ | Απλοποιούμε τα κλάσματα | |

Άρα, ο κάθε κύβος ζυγίζει 200 γραμμάρια.

***Επαλήθευση:***

*Πράγματι, στον αριστερό δίσκο της ζυγαριάς υπάρχουν 3·200 + 200 = 600 + 200 = 800 γραμμάρια και στο δεύτερο δίσκο υπάρχουν 200 + 600 = 800 γραμμάρια. Δηλαδή, η ζυγαριά ισορροπεί.*

Στην παραπάνω λύση της εξίσωσης $3x + 200 = x + 600$ «απομονώσαμε» το x στο πρώτο μέλος της εξίσωσης, προσθέτοντας ή αφαιρώντας και στα δύο μέλη τον ίδιο αριθμό. Η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει πιο γρήγορα με τη βοήθεια του εξής πρακτικού κανόνα:

Σε μία εξίσωση μπορούμε να **«μεταφέρουμε»** όρους από το ένα μέλος στο άλλο, **αλλάζοντας το πρόσημό τους**.

Δηλαδή: $3x+200 = x+600$ ← Μεταφέρουμε το +x στο πρώτο μέλος, οπότε γίνεται -x. Επίσης, μεταφέρουμε το +200 στο δεύτερο μέλος, οπότε γίνεται -200.

$3x-x = 600-200$

$2x = 400$ ← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.

$\frac{2x}{2} = \frac{400}{2}$ ← Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου και απλοποιούμε τα κλάσματα.

Άρα $x = 200$

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

*Να λυθεί η εξίσωση: $2(x-1)+3(2-x)=4(x+2)$.*

**Λύση:** Έχουμε διαδοχικά:

$2x - 2 + 6 - 3x = 4x + 8$ ← Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$2x - 3x - 4x = 8 + 2 - 6$ ← Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$-5x = 4$ ← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

$\frac{-5x}{-5} = \frac{4}{-5}$ ← Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου

Άρα $x = -\frac{4}{5}$

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

*Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{y+1}{2} + y = \frac{2y+3}{3} + 2$.*

**Λύση:** Σε αυτή την εξίσωση έχουμε και παρονομαστές.
Μπορούμε, όμως, να πάρουμε μια εξίσωση χωρίς παρονομαστές, αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με ένα κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 2 και 3. Συνήθως χρησιμοποιούμε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο, το οποίο εδώ είναι το 6. **Η διαδικασία αυτή λέγεται απαλοιφή παρονομαστών**.

$6\left(\dfrac{y+1}{2}+y\right)=6\left(\dfrac{2y+3}{3}+2\right)$ ← Απαλοιφή παρονομαστών: πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το 6

$6\,\dfrac{y+1}{2}+6y=6\,\dfrac{2y+3}{3}+6{\cdot}2$ ← Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$3(y+1)+6y=2(2y+3)+12$ ← Απλοποιούμε τα κλάσματα

$3y+3+6y=4y+6+12$ ← Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$3y+6y-4y=6+12-3$ ← Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$5y=15$ ← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

$\dfrac{5y}{5}=\dfrac{15}{5}$ ← Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου

Άρα $y=3$

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

*Να λυθεί η εξίσωση: $2(3-x)+4(x-1)=2x+5$.*

**Λύση:** Έχουμε διαδοχικά:

$$6-2x+4x-4=2x+5$$
$$-2x+4x-2x=5-6+4$$
$$0x=3$$

**Στην περίπτωση αυτή, δε μπορούμε να λύσουμε ως προς x διαιρώντας με το συντελεστή του αγνώστου, γιατί, όπως γνωρίζουμε, δε γίνεται διαίρεση με το 0.**

Παρατηρούμε, όμως, ότι για κάθε τιμή του x, το πρώτο μέλος της εξίσωσης ισούται πάντα με 0, οπότε δε μπορεί να είναι ίσο με 3. Επομένως, η εξίσωση αυτή δεν έχει καμία λύση. Μια τέτοια εξίσωση λέγεται **αδύνατη**.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

*Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{3}{5}-\dfrac{2x+1}{10}=\dfrac{5-2x}{10}$.*

**Λύση:** Έχουμε διαδοχικά:

$10\,\dfrac{3}{5}-10\,\dfrac{2x+1}{10}=10\,\dfrac{5-2x}{10}$ ← Απαλοιφή παρονομαστών: πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το 10

$2{\cdot}3-(2x+1)=5-2x$ ← Απλοποιούμε τα κλάσματα

$6-2x-1=5-2x$ ← Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)

$-2x+2x=5-6+1$ ← Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους

$0x=0$ ← Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

**Στην περίπτωση αυτή επίσης, δε μπορούμε να λύσουμε ως προς x διαιρώντας με το συντελεστή του αγνώστου, γιατί όπως γνωρίζουμε, δε γίνεται διαίρεση με το 0.**

Παρατηρούμε όμως, ότι η εξίσωση $0x = 0$ επαληθεύεται για όλες τις τιμές του x.

Για παράδειγμα: $0 \cdot 2 = 0$, $0 \cdot 3 = 0$, $0 \cdot (-7) = 0$ κ.τ.λ. Δηλαδή, κάθε αριθμός είναι λύση της εξίσωσης. Μια τέτοια εξίσωση λέγεται **ταυτότητα**.

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

**1.** Στις παρακάτω ισότητες να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει:

α) $5 + \ldots\ldots = 35$ β) $5 \cdot \ldots\ldots = 35$ γ) $127 - \ldots\ldots = 103$

δ) $32 - \ldots\ldots = 35$ ε) $14 + \ldots\ldots = 5$ στ) $2 \cdot \ldots\ldots + 3 = 17$

**2.** Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

| | ΣΩΣΤΟ | ΛΑΘΟΣ |
|---|---|---|
| α) Η εξίσωση $2x = 6$ έχει λύση τον αριθμό 3. | | |
| β) Η εξίσωση $5x + x = x$ είναι ταυτότητα. | | |
| γ) Οι εξισώσεις $x + 1 = 5$ και $-x + 5 = 1$ έχουν λύση τον ίδιο αριθμό. | | |
| δ) Η εξίσωση $3x = 0$ είναι ταυτότητα. | | |
| ε) Η εξίσωση $0 \cdot x = 0$ είναι αδύνατη. | | |

**3.** Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τη λύση της στη στήλη Β.

| ΣΤΗΛΗ Α | ΣΤΗΛΗ Β |
|---|---|
| α) $-2x = 4$ | i) $-8$ |
| β) $3x = -9$ | ii) $3$ |
| γ) $\frac{1}{2}x = -4$ | iii) $-2$ |
| δ) $2x = 3 + x$ | iv) $-3$ |

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1** Να εξετάσετε αν ο αριθμός που δίνεται είναι η λύση της εξίσωσης:

α) $-2x + 3 = 21$ $\quad x = -7$

β) $3x + 5 = 7{,}5$ $\quad x = 0{,}5$

γ) $-3x + 4 = 7x - 6$ $\quad x = 1$

**2** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x + 21 = 4 + x - 5$

β) $-9 + 7y + y = 1 - 2y$

γ) $3t - 3(t + 1) = t + 2(t + 1) + 1$

**3** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $4(2x + 1) - 6(x - 1) = 3(x + 2)$

β) $3(y + 1) + 2(y - 4) = 2y - (y - 6)$

γ) $6(\omega + 2) + 3 = 3 - 2(\omega - 4)$

**4** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{2x + 3}{2} = \frac{3x - 5}{4}$

β) $\frac{7x - 6}{3} = \frac{5x + 2}{4}$

γ) $\frac{2(x - 1) - 2}{2} = \frac{1 - 3x}{4}$

**5** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{x + 4}{5} - \frac{x - 4}{3} = \frac{1 - 3x}{15} - 2$

β) $\frac{y - 1}{3} - \frac{2y + 7}{6} = y + \frac{1 - 3y}{2}$

γ) $\frac{1}{4}(\omega + 4) - 7 = (1 - \omega)\frac{1}{7} + \frac{\omega - 23}{4}$

**6** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x - \left(\frac{2x}{3} - 5\right) = 6 - \left(\frac{x}{3} - 2\right)$

β) $5 - \left(\frac{t + 1}{2} + \frac{1 + 2t}{3}\right) = 12 - \left(t - \frac{t + 5}{6}\right)$

**7** Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{\frac{1 + x}{2}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ $\quad$ β) $\dfrac{2t - \frac{1}{3}}{2 + \frac{1}{2}} = \dfrac{1 - \frac{t}{2}}{2 - \frac{1}{2}}$

**8** Για ποια τιμή του x είναι Α = Β;

α) αν $A = 5x - 3$, $\quad B = 12 - 2x$

β) αν $A = 2(x - 1) + \frac{3}{2}$, $\quad B = 6 + \frac{x}{3}$

**9** Δίνεται η εξίσωση:

$$\mu(x + 6) - 2 = (2\mu - 1)x + 2$$

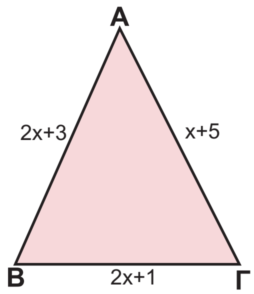
α) Αν $\mu = 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει λύση $x = 8$.

β) Αν η εξίσωση έχει λύση $x = 7$, να αποδείξετε ότι $\mu = 3$.

γ) Αν $\mu = 1$, να λύσετε την εξίσωση.

**10** Δίνεται το παρακάτω τρίγωνο.

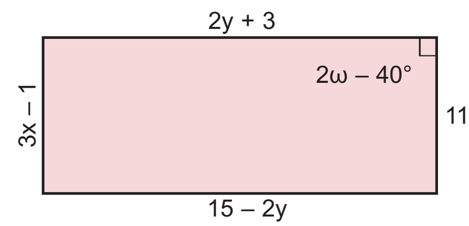
α) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε να είναι ισοσκελές με βάση τη ΒΓ. Ποιο είναι σ' αυτή την περίπτωση το μήκος κάθε πλευράς;




β) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ. Ποιο είναι σ' αυτή την περίπτωση το μήκος κάθε πλευράς;

γ) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του x, ώστε να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΓ.

**11** Δίνεται το ορθογώνιο του παρακάτω σχήματος. Να βρείτε τους αριθμούς x, y και ω (το ω παριστάνει μοίρες).




## ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

*Μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά στα παρακάτω αριθμητικά σταυρόλεξα;*

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | · | | + | 5 | = | 11 |
| · | | · | | · | | · |
| | · | | + | | = | 22 |
| + | | + | | + | | + |
| | · | 2 | + | 4 | = | |
| = | | = | | = | | = |
| 13 | · | 17 | + | 39 | = | |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | · | | + | -2 | = | -11 |
| · | | · | | · | | · |
| -3 | · | | + | | = | -7 |
| + | | + | | + | | + |
| | · | -3 | + | -9 | = | |
| = | | = | | = | | = |
| -14 | · | -6 | + | -1 | = | |

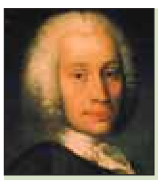
## ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

***Οι εξισώσεις και οι συμβολισμοί τους μέσα στους αιώνες.***

*Κατά την αρχαιότητα η έλλειψη κατάλληλου συμβολισμού είχε εμποδίσει τις λύσεις προβλημάτων με αποτέλεσμα αυτές να θεωρούνται πολύπλοκες και δύσκολες.*

- *Στον περίφημο αιγυπτιακό πάπυρο του Ρηντ (περίπου 1700 π.Χ. - Βρετανικό Μουσείο) περιγράφονται προβλήματα με ιερογλυφικά (διαβάζονται από δεξιά προς τα αριστερά).*
- *Στην Αναγέννηση (15ος - 16ος αιώνας) οι συμβολισμοί απλοποιήθηκαν κατά κάποιον τρόπο:*
  - *Ο Γάλλος Nicolas Chuquet (1445 - 1500) έγραφε: «$12^0$ p $5^1$ ισούται με $20^0$», δηλαδή $12x^0 + 5x^1 = 20x^0$ ή πιο απλά $12 + 5x = 20$.*
  - *Επίσης, ο Γάλλος François Viete (1540 - 1603) έγραφε: «12aq 5a aeq. 23».*
  - *Ο Ιταλός Niccolo Fontana ή Tartaglia (1499 - 1557) έγραφε επίσης: «12 N p 5 R ισούται 20 N».*
- *Ο Γάλλος René Descartes (ή Καρτέσιος 1596 - 1650) στις αρχές του 17ου αιώνα έγραφε «12 + 5z B20». Την εποχή αυτή τα μαθηματικά καθώς και άλλα προβλήματα διατυπώνονται σχεδόν αποκλειστικά με μαθηματικά σύμβολα, γεγονός που συνετέλεσε στην αλματώδη πρόοδο της επιστήμης.*

# 1.3. Επίλυση τύπων

*Ο **Anders Celsius**, γεννήθηκε το 1701 στην Ουψάλα της Σουηδίας.*

*Οι παππούδες του ήταν και οι δύο καθηγητές: ο Magnus Celsius, μαθηματικός και ο Anders Spole, αστρονόμος. Ο πατέρας του Nils Celsius ήταν επίσης καθηγητής της Αστρονομίας. Ο Κέλσιος θεωρήθηκε ταλαντούχος στα Μαθηματικά και σε νεαρή ηλικία (29 ετών το 1730) διορίστηκε καθηγητής Αστρονομίας.*

*Συμμετείχε το 1736 στη διάσημη αποστολή αστρονόμων στο Tornea, στο βορειότερο μέρος της Σουηδίας ("Η αποστολή του Lapland"). Ο στόχος της αποστολής ήταν να επιβεβαιωθεί η πεποίθεση του Newton, ότι η μορφή της Γης είναι ελλειψοειδής που γίνεται επίπεδη στους πόλους, πράγμα που επιτεύχθηκε με αποτέλεσμα να γίνει ο Κέλσιος διάσημος.*

*Για τις μετεωρολογικές παρατηρήσεις του, κατασκεύασε τη γνωστή κλίμακα μέτρησης της θερμοκρασίας, με 100 για το σημείο τήξης του νερού και 0 για το σημείο βρασμού του.*

*Μετά το θάνατό του, που προήλθε από φυματίωση το 1744 (σε ηλικία μόλις 43 ετών), η κλίμακα αντιστράφηκε στη σημερινή της μορφή. Δηλαδή 0 για το σημείο τήξης του νερού και 100 για το σημείο βρασμού του.*

Σε πολλές επιστήμες χρησιμοποιούμε ισότητες που συνδέουν μεταξύ τους μεγέθη. Για παράδειγμα:

Στη Φυσική ο όγκος V με τη μάζα m και την πυκνότητα ρ συνδέονται με τον τύπο $m = \rho \cdot V$.

Στη Γεωμετρία ο όγκος V ενός παραλληλεπιπέδου δίνεται από τον τύπο $V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$, όπου α, β, γ είναι οι τρεις διαστάσεις του.

Στις τραπεζικές συναλλαγές ο τόκος ενός δανείου δίνεται από τον τύπο $T = \dfrac{K \cdot E \cdot t}{100}$, όπου Κ το κεφάλαιο, t ο χρόνος διάρκειας του δανείου και Ε το επιτόκιο της τράπεζας.

Όταν έχουμε έναν τύπο στον οποίο γνωρίζουμε τις τιμές που παίρνουν όλες οι μεταβλητές του εκτός από μία, τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της άγνωστης μεταβλητής. Αυτό γίνεται, αν επιλύσουμε τον τύπο ως προς την άγνωστη μεταβλητή.

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

*Στις Αγγλοσαξονικές χώρες (κυρίως στις ΗΠΑ) για τη μέτρηση της θερμοκρασίας χρησιμοποιούνται οι βαθμοί Φαρενάιτ (°F). Στον υπόλοιπο κόσμο όμως -όπως και στη χώρα μας- χρησιμοποιούνται οι βαθμοί Κελσίου (°C).*

*Η σχέση που συνδέει τους °F και τους °C, είναι:* **$F = 1{,}8C + 32$**

*α) Ένας Αμερικανός που θέλει να ταξιδέψει στην Ελλάδα πληροφορείται ότι, στην Αθήνα έχει θερμοκρασία 20°C. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να μετατρέψει αυτή τη θερμοκρασία σε °F;*

*β) Ένας Έλληνας που θέλει να ταξιδέψει στη Νέα Υόρκη πληροφορείται ότι, εκεί έχει θερμοκρασία 41°F. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να μετατρέψει αυτή τη θερμοκρασία σε °C;*

### Λύση

α) Όταν γνωρίζουμε τη θερμοκρασία σε °C, είναι εύκολο να βρούμε την αντίστοιχη θερμοκρασία σε °F, γιατί ο τύπος **$F = 1{,}8C + 32$** "λειτουργεί αμέσως" (είναι λυμένος, όπως λέμε, ως προς F).

– Για $C = 20$ είναι:

$$F = 1{,}8 \cdot 20 + 32 = 36 + 32 = 68$$

Άρα, στην Αθήνα έχει θερμοκρασία 68°F.

β) Όταν θέλουμε να μετατρέψουμε °F σε °C, τα πράγματα με τον τύπο $F = 1{,}8C + 32$ είναι λίγο πιο δύσκολα:

– Για $F = 41$ είναι $41 = 1{,}8C + 32$ και στη συνέχεια πρέπει να λύσουμε την εξίσωση αυτή ως προς C:

$$41 - 32 = 1{,}8C$$
$$9 = 1{,}8C$$
$$\frac{9}{1{,}8} = \frac{1{,}8C}{1{,}8}$$
$$5 = C$$

Άρα, στη Νέα Υόρκη έχει θερμοκρασία 5°C.

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2

*Να μετατρέψετε σε βαθμούς Κελσίου τις θερμοκρασίες τριών ακόμα Αμερικανικών πόλεων:*

*Βοστώνη: 23°F* *Βαλτιμόρη: 32°F* *Λος Άντζελες: 59°F*

### Λύση

Θα πρέπει, βέβαια, να λύσουμε τρεις εξισώσεις όπως η παραπάνω! **Αντί να επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία τρεις φορές, λύνουμε πρώτα τον τύπο F = 1,8C + 32 ως προς C:**

$$F - 32 = 1{,}8C \text{ ή } \frac{F-32}{1{,}8} = \frac{1{,}8C}{1{,}8}$$

Άρα: $C = \dfrac{F-32}{1{,}8}$.

Ο τύπος $C = \dfrac{F-32}{1{,}8}$ είναι ίδιος (ισοδύναμος) με τον τύπο F = 1,8C + 32, μόνο που «είναι λυμένος» ως προς C.

Επομένως:

- για F = 23 είναι $C = \dfrac{23-32}{1{,}8} = \dfrac{-9}{1{,}8} = -5$
- για F = 32 είναι $C = \dfrac{32-32}{1{,}8} = \dfrac{0}{1{,}8} = 0$
- για F = 59 είναι $C = \dfrac{59-32}{1{,}8} = \dfrac{27}{1{,}8} = 15$

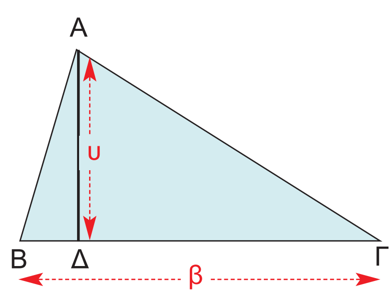
Διαπιστώσαμε ότι, αν έχουμε μία σχέση που συνδέει δύο ή περισσότερες μεταβλητές, μπορούμε (χρησιμοποιώντας τις τεχνικές που μάθαμε στις εξισώσεις) να λύσουμε τη σχέση αυτή ως προς μία μεταβλητή.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ

*Το εμβαδόν ενός τριγώνου με βάση β και ύψος υ, γνωρίζουμε ότι δίνεται από τον τύπο* $E = \frac{1}{2}βυ$. *Να λύσετε τον τύπο αυτόν ως προς β και ως προς υ. Στη συνέχεια να βρείτε:*

*α) Το ύψος ενός τριγώνου που έχει εμβαδόν 12 $cm^2$ και βάση 4 cm.*

*β) Τη βάση ενός τριγώνου που έχει εμβαδόν 35 $cm^2$ και ύψος 7 cm.*




**Λύση:** Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών: $2E = 2\frac{1}{2}βυ$.

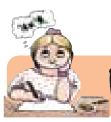
Άρα: $2E = βυ$.

Για να λύσουμε ως προς β, διαιρούμε και τα δύο μέλη με το υ, οπότε: $β = \frac{2Ε}{υ}$.

Για να λύσουμε ως προς υ, διαιρούμε και τα δύο μέλη με το β, οπότε: $υ = \frac{2Ε}{β}$.

α) Από τον τύπο $υ = \frac{2Ε}{β}$ για Ε = 12 και β = 4 έχουμε: $υ = \frac{2Ε}{β} = \frac{2 \cdot 12}{4} = 6$ (cm).

β) Από τον τύπο $β = \frac{2Ε}{υ}$ για Ε = 35 και υ = 7 έχουμε: $β = \frac{2Ε}{υ} = \frac{2 \cdot 35}{7} = \frac{70}{7} = 10$ (cm).



## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

| | Α | Β | Γ | Δ |
|---|---|---|---|---|
| **1.** Η σχέση **3α = βγ**, αν λυθεί ως προς α, γίνεται: | $α=βγ-3$ | $α=3βγ$ | $α = \frac{βγ}{3}$ | $4x$ |
| **2.** Η σχέση **α = β+γδ**, αν λυθεί ως προς β, γίνεται: | $β=γδ-α$ | $β=α-γδ$ | $β = \frac{α}{γδ}$ | $β = \frac{γδ}{α}$ |
| **3.** Η σχέση **α = β + γδ**, αν λυθεί ως προς γ, γίνεται: | $γ=α-β-δ$ | $γ = \frac{α}{β} - δ$ | $γ = \frac{α-β}{δ}$ | $γ = \frac{αβ}{δ}$ |
| **4.** Η σχέση $\mathbf{α = β\left(1 + \frac{γ}{δ}\right)}$, αν λυθεί ως προς γ, γίνεται: | $γ = \frac{(α-β)δ}{β}$ | $γ=(α-β)δ$ | $γ = \frac{αδ}{β}$ | $γ=(α-β-1)δ$ |

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Να επιλύσετε τους παρακάτω τύπους των Μαθηματικών και της Φυσικής ως προς τη μεταβλητή που ζητείται:

**1** Μήκος κύκλου:
$L = 2πρ$, ως προς ρ.

**2** Περίμετρος ορθογωνίου:
$P = 2x + 2y$, ως προς y.

**3** Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας κυλίνδρου: $Ε = 2πρυ$, ως προς ρ.

**4** Εξίσωση ευθείας:
$αx + βy + γ = 0$, ως προς y, με $β \neq 0$

**5** Εμβαδόν παραλληλεπιπέδου:
$Ε = 2(xy + yω + ωx)$ ως προς ω.

**6** Ταχύτητα στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση: $υ = \frac{S}{t}$ ως προς t.

**7** Εμβαδόν τραπεζίου:
$Ε = \left(\frac{β + Β}{2}\right)υ$, ως προς β.

**8** $S = \frac{α}{1 - λ}$, ως προς λ.

**9** $P = P_0 + εh$, ως προς h.

**10** $Q = mcθ$, ως προς c.

**11** $F = k_C \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, ως προς $q_1$.

**12** $S = υ_0 t + \frac{1}{2}gt^2$, ως προς $υ_0$.

**13** Για ένα ιδεώδες αέριο σε κανονική πίεση, ο όγκος του σε θερμοκρασία θ °C δίνεται από τον τύπο:

$$V = V_0\left(1 + \frac{\theta}{273{,}15}\right),$$

όπου $V_0$ ο όγκος στους 0 °C.

α) Να λύσετε τον τύπο αυτό ως προς θ.

β) Στους 0°C ένα ιδεώδες αέριο έχει όγκο $V_0 = 25$ cm$^3$. Σε ποια θερμοκρασία έχει όγκο 30 cm$^3$;

**14** Εμπειρικές μελέτες για τη χιονόπτωση στη Βρετανία κατέληξαν στο εξής συμπέρασμα: ο αριθμός D των ημερών ενός έτους στη διάρκεια των οποίων πέφτει χιόνι, δίνεται κατά προσέγγιση από τον τύπο:

$D = 0{,}155 \cdot h + 11$,

όπου h είναι το υψόμετρο ενός τόπου σε μέτρα.

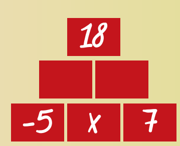
α) Σύμφωνα με αυτό τον τύπο, πόσες ημέρες χιονίζει σε έναν τόπο που είναι παραθαλάσσιος (h = 0);

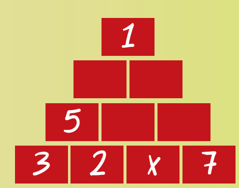
β) Σε ποιο υψόμετρο χιονίζει 6 μήνες το χρόνο (180 ημέρες) και σε ποιο υψόμετρο χιονίζει κάθε ημέρα;

## ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ:

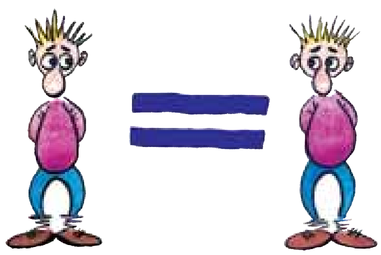
*Στην παρακάτω πυραμίδα κάθε αριθμός είναι ίσος με το άθροισμα των δύο αριθμών που βρίσκονται ακριβώς από κάτω του, όπως φαίνεται στο παράδειγμα.*


*Μπορείτε να βρείτε τον αριθμό x στις παρακάτω πυραμίδες;*




# 1.4. Επίλυση προβλημάτων με τη χρήση εξισώσεων

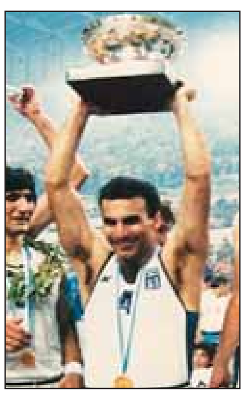


Στην καθημερινή ζωή παρουσιάζονται πολλές φορές προβλήματα με αριθμούς, που η επίλυσή τους είναι πολύ συχνά επίπονη και πολύπλοκη. Στην παράγραφο αυτή, θα μάθουμε να χρησιμοποιούμε μεταβλητές και εξισώσεις, για να απλοποιούμε τη λύση τέτοιων προβλημάτων.
Έχουμε μάθει σε προηγούμενες τάξεις να λύνουμε μερικά από τα προβλήματα αυτά με τη βοήθεια της πρακτικής Αριθμητικής.

**ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1**

### Στον αστερισμό της Δόξας!

*Στις 14 Ιουνίου 1987 η εθνική μας ομάδα μπάσκετ κατέκτησε το Πανευρωπαϊκό Πρωτάθλημα νικώντας στο στάδιο Ειρήνης και Φιλίας, στον τελικό, την πανίσχυρη ομάδα της τότε Σοβιετικής Ένωσης με 103-101. Πρωταγωνιστής και σούπερ - σταρ τής βραδιάς ήταν ο Νίκος Γκάλης που πέτυχε 40 πόντους. Ο Γκάλης είχε σε εκείνο τον αγώνα 22 εύστοχες βολές, από τις οποίες οι 8 ήταν βολές του 1 πόντου και οι υπόλοιπες 14 ήταν βολές των 2 ή των 3 πόντων.*
*Πόσα τρίποντα πέτυχε εκείνο το βράδυ ο Γκάλης;*



**Με πρακτική Αριθμητική:**

*Από τις 22 εύστοχες βολές οι 8 ήταν του 1 πόντου. Επομένως, οι υπόλοιπες 14 ήταν των 2 ή των 3 πόντων. Αν και οι 14 αυτές βολές ήταν των 2 πόντων, τότε ο Γκάλης θα είχε πετύχει εκείνο το βράδυ $8 \cdot 1 + 14 \cdot 2 = 8 + 28 = 36$ πόντους αντί για 40 που πέτυχε στην πραγματικότητα. Αφού πέτυχε $40 - 36 = 4$ επιπλέον πόντους, η διαφορά αυτή οφείλεται στα τρίποντα. Δηλαδή, πέτυχε 4 τρίποντα και $14 - 4 = 10$ δίποντα.*

### Λύση

Έχουμε τα εξής δεδομένα για τον Γκάλη:

- Πέτυχε συνολικά 40 πόντους.
- Είχε 22 εύστοχες βολές από τις οποίες:
  – 8 του 1 πόντου,
  – άγνωστος αριθμός βολών των 2 πόντων,
  – άγνωστος αριθμός βολών των 3 πόντων.

Το πρόβλημα ζητά να προσδιορίσουμε τον αριθμό των βολών των 3 πόντων που πέτυχε ο Γκάλης.

Έστω ότι είχε x επιτυχίες των 3 πόντων και 14 – x επιτυχίες των 2 πόντων. Αφού πέτυχε συνολικά 40 πόντους, έχουμε την εξίσωση:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 1 + (14 - x) \cdot 2 + x \cdot 3 &= 40 \\ 8 + 28 - 2x + 3x &= 40 \\ -2x + 3x &= 40 - 8 - 28 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Άρα, ο Γκάλης εκείνο το βράδυ πέτυχε 4 τρίποντα (και φυσικά 14 – 4 = 10 δίποντα).
Οι αριθμοί αυτοί επαληθεύουν το πρόβλημα:
$8 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 40$.
Από την παραπάνω δραστηριότητα συμπεραίνουμε ότι, η λύση προβλημάτων με τη βοήθεια εξισώσεων περιλαμβάνει τα επόμενα γενικά βήματα:

- **Διαβάζουμε** καλά το πρόβλημα και **διακρίνουμε** τα **δεδομένα** και τα **ζητούμενα.**
- **Χρησιμοποιούμε** ένα γράμμα **(συνήθως το x)** για να εκφράσουμε τον **άγνωστο αριθμό** που πρέπει να προσδιορίσουμε.
- Εκφράζουμε **όλα τα άλλα μεγέθη** του προβλήματος **με τη βοήθεια του x**.
- **Γράφουμε την εξίσωση** του προβλήματος **χρησιμοποιώντας τα δεδομένα** της εκφώνησης.
- **Λύνουμε** την εξίσωση.
- **Ελέγχουμε** αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

*Να βρείτε τον αριθμό που το διπλάσιό του, αν το ελαττώσσουμε κατά 8, δίνει τον αριθμό αυξημένο κατά 9.*

**Λύση:** Ονομάζουμε τον άγνωστο αριθμό x. Το διπλάσιο είναι 2x.
Αν το ελαττώσσουμε κατά 8, είναι $2x - 8$.
Ο αριθμός αυξημένος κατά 9 είναι $x + 9$.
Συνδέουμε τα παραπάνω σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος και προκύπτει η εξίσωση:

$$2x - 8 = x + 9 \quad ή \quad 2x - x = 9 + 8 \quad ή \quad x = 17$$

δηλαδή, ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 17.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

*Μία βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 10 λεπτά. Μια άλλη βρύση γεμίζει την ίδια δεξαμενή σε 15 λεπτά. Σε πόσα λεπτά της ώρας γεμίζει η δεξαμενή, αν ανοίξουν και οι δύο βρύσες;*

**Λύση:** Έστω, ότι και οι δύο μαζί γεμίζουν την δεξαμενή σε x λεπτά. Αφού η πρώτη γεμίζει σε 10 λεπτά, σε ένα λεπτό θα γεμίζει το $\frac{1}{10}$ και σε x λεπτά τα $\frac{x}{10}$ της δεξαμενής. Ομοίως, η δεύτερη βρύση σε x λεπτά θα γεμίσει τα $\frac{x}{15}$ της δεξαμενής. Αφού και οι δύο μαζί θα γεμίσουν τη δεξαμενή, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = 1$$

$$30\frac{x}{10} + 30\frac{x}{15} = 30 \cdot 1$$

$$3x + 2x = 30$$

$$5x = 30$$

$$x = 6$$

Επομένως, και οι δύο βρύσες γεμίζουν την δεξαμενή σε 6 λεπτά.

**Με πρακτική Αριθμητική:**
Η πρώτη βρύση σε ένα λεπτό γεμίζει το $\frac{1}{10}$ της δεξαμενής και η δεύτερη το $\frac{1}{15}$.
Επομένως, και οι δύο μαζί γεμίζουν σε 1 λεπτό το $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{3}{30} + \frac{2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ της δεξαμενής. Αφού σε 1 λεπτό γεμίζει το $\frac{1}{6}$ της δεξαμενής, θα χρειαστούν 6 λεπτά για να τη γεμίσουν ολόκληρη.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

**Η ανιψιά μου η Μαρίζα**

*Η ανιψιά μου η Μαρίζα έγραψε 16 και 18 σε δύο διαγωνίσματα Μαθηματικών.*

*α) Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο τρίτο διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο 18 και στα τρία διαγωνίσματα;*

*β) Μπορεί να βγάλει μέσο όρο 19;*

**Λύση:** Έστω x ο βαθμός που θα πάρει η Μαρίζα στο τρίτο διαγώνισμα. Ο μέσος όρος των τριών διαγωνισμάτων προκύπτει, αν διαιρέσουμε το άθροισμά τους δια 3, δηλαδή: $\dfrac{16 + 18 + x}{3}$ .

α) Για να βγάλει μέσο όρο 18, πρέπει:

$$\begin{aligned} \frac{16 + 18 + x}{3} &= 18 \\ 3 \cdot \frac{16 + 18 + x}{3} &= 3 \cdot 18 \\ 34 + x &= 54 \\ x &= 54 - 34 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Άρα, για να βγάλει μέσο όρο 18, πρέπει να γράψει 20 στο τρίτο διαγώνισμα.

Ο αριθμός αυτός επαληθεύει το πρόβλημα, γιατί $\dfrac{16 + 18 + 20}{3} = 18$.

β) Για να βγάλει μέσο όρο 19, πρέπει $\dfrac{16 + 18 + x}{3} = 19$ άρα $34 + x = 57$ ή $x = 23$.

Φυσικά, επειδή δεν είναι δυνατόν να γράψει βαθμό 23 λέμε ότι, παρόλο που η εξίσωση λύθηκε, η λύση της **απορρίπτεται**.
Δηλαδή, είναι αδύνατον η Μαρίζα να βγάλει μέσο όρο 19.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

*Τρία αδέλφια μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο μικρότερος έλαβε το $\frac{1}{5}$ του ποσού και 12 € ακόμη, ο μεσαίος έλαβε το $\frac{1}{4}$ του ποσού και 8 € ακόμη και ο μεγαλύτερος έλαβε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 6 € ακόμη.*

*Να βρεθεί το αρχικό χρηματικό ποσό και το μερίδιο του καθενός.*

**Λύση:** Έστω x το αρχικό ποσό.

- Ο μικρότερος έλαβε το $\frac{1}{5}$ του ποσού και 12 € ακόμη, δηλαδή $\frac{1}{5}x + 12$.
- Ο μεσαίος έλαβε το $\frac{1}{4}$ του ποσού και 8 € ακόμη, δηλαδή $\frac{1}{4}x + 8$.
- Ο μεγαλύτερος έλαβε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 6 € ακόμη, δηλαδή $\frac{1}{3}x + 6$.

Το άθροισμα των τριών αυτών ποσών είναι το αρχικό ποσό x που μοιράστηκαν. Έτσι, έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{1}{5}x + 12 + \frac{1}{4}x + 8 + \frac{1}{3}x + 6 = x$$

$$\frac{x}{5} + \frac{x}{4} + \frac{x}{3} + 26 = x$$

$$60\frac{x}{5} + 60\frac{x}{4} + 60\frac{x}{3} + 60 \cdot 26 = 60x$$

$$\begin{aligned} 12x + 15x + 20x + 1560 &= 60x \\ 12x + 15x + 20x - 60x &= -1560 \\ -13x &= -1560 \\ x &= \frac{-1560}{-13} \\ x &= 120 \end{aligned}$$

Άρα, το αρχικό ποσό ήταν 120 €.

Ο μικρότερος πήρε $\frac{1}{5} \cdot 120 + 12 = 24 + 12 = 36$ €,

ο μεσαίος πήρε $\frac{1}{4} \cdot 120 + 8 = 30 + 8 = 38$ € και

ο μεγαλύτερος πήρε $\frac{1}{3} \cdot 120 + 6 = 40 + 6 = 46$ €.

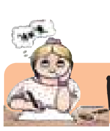
Οι αριθμοί αυτοί επαληθεύουν το πρόβλημα, αφού $36 + 38 + 46 = 120$.

**Με πρακτική Αριθμητική:**

Το $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ του συνολικού ποσού είναι τα $\frac{12}{60} + \frac{15}{60} + \frac{20}{60} = \frac{47}{60}$ του ποσού αυτού.

Άρα, το υπόλοιπο $\frac{13}{60}$ του ποσού είναι το άθροισμα $12 + 8 + 6 = 26$ €.

Αφού τα $\frac{13}{60}$ του ποσού είναι 26, το $\frac{1}{60}$ του ποσού αυτού θα είναι $26 : 13 = 2$ € και τα $\frac{60}{60}$ θα είναι $60 \cdot 2 = 120$ €. Επομένως, το ζητούμενο ποσό είναι 120 €.



## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

**1.** Το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 4 είναι ίσο με το 32. Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις επιλύει το πρόβλημα αυτό;

| | | | |
|---|---|---|---|
| Α | $2x - 4 = 32$ | Β | $2x + 32 = 4$ |
| Γ | $4x - 2 = 32$ | Δ | $2x + 4 = 32$ |

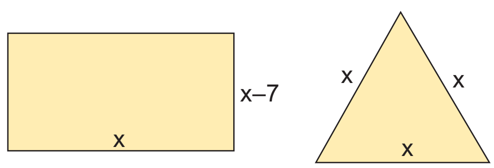
**2.** Ο Κώστας έχει 38 € και ο Γιάννης 14 €. Αγόρασαν από ένα σουβλάκι ο καθένας, οπότε τα χρήματα που έχει τώρα ο Κώστας είναι τριπλάσια από τα χρήματα που έχει ο Γιάννης. Πόσο κοστίζει κάθε σουβλάκι; Ποια από τις παρακάτω εξισώσεις επιλύει το πρόβλημα αυτό;

| | | | |
|---|---|---|---|
| Α | $38 + x = 3x + 14$ | Β | $38 - x = 3(14 - x)$ |
| Γ | $14 - x = 3(38 - x)$ | Δ | $38 = 3 \cdot 14 + x$ |

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1** Να βρεθούν οι οξείες γωνίες ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, αν η μία είναι διπλάσια της άλλης.

**2** Στα παρακάτω σχήματα το ορθογώνιο και το τρίγωνο έχουν ίσες περιμέτρους. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.




**3** Ένας πατέρας είναι 44 ετών και ο γιος του είναι 8 ετών. Μετά από πόσα έτη η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια της ηλικίας του γιου;

**4** Τρεις φίλοι μοιράστηκαν ένα χρηματικό ποσό. Ο πρώτος πήρε το $\frac{1}{4}$ του ποσού, ο δεύτερος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και ο τρίτος πήρε το $\frac{1}{3}$ του ποσού και 100 € ακόμη. Να βρείτε το αρχικό χρηματικό ποσό που μοιράστηκαν και το μερίδιο του καθενός.

**5** Το ρεζερβουάρ ενός αυτοκινήτου περιέχει διπλάσια ποσότητα βενζίνης από το ρεζερβουάρ ενός άλλου αυτοκινήτου. Αν το πρώτο αυτοκίνητο καταναλώσει 34 λίτρα και το δεύτερο 7 λίτρα, θα μείνει ίδια ποσότητα βενζίνης στα δύο αυτοκίνητα. Πόσα λίτρα βενζίνης περιέχει κάθε αυτοκίνητο;

**6** Δώδεκα μικρά λεωφορεία των 8 και 14 ατόμων μεταφέρουν συνολικά 126 επιβάτες. Πόσα λεωφορεία είναι των 8 και πόσα των 14 ατόμων;

**7** Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου είναι 8 m και 12 m. Για να διπλασιάσουμε το εμβαδόν του, αυξάνουμε τη μεγαλύτερη διάσταση κατά 4 m. Πόσο πρέπει να αυξήσουμε τη μικρότερη διάσταση;

**8** Ο Πέτρος και ο Σάκης αμείβονται για την εργασία τους με την ώρα. Ο Πέτρος κερδίζει 2 € την ώρα περισσότερα από τον Σάκη. Όταν ο Πέτρος εργάζεται 7 ώρες και ο Σάκης 5 ώρες, ο Σάκης κερδίζει 26 € λιγότερα από τον Πέτρο. Να βρεθεί το ωρομίσθιο του καθενός.

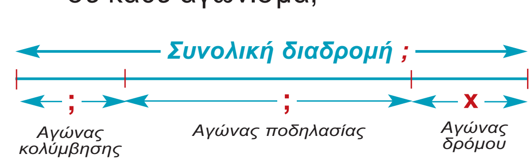
**9** Όλα μου τα στιλό εκτός από 3 είναι μπλε, όλα μου τα στιλό εκτός από 4 είναι κόκκινα, όλα μου τα στιλό εκτός από 5 είναι μαύρα. Πόσα στιλό έχω;

**10** Το τρίαθλο είναι ένα αγώνισμα που περιλαμβάνει έναν αγώνα κολύμβησης, έναν αγώνα ποδηλασίας και έναν αγώνα δρόμου. Η συνολική απόσταση που διανύει ένας αθλητής και στα τρία αγωνίσματα είναι 51,5 km. Ο αγώνας δρόμου

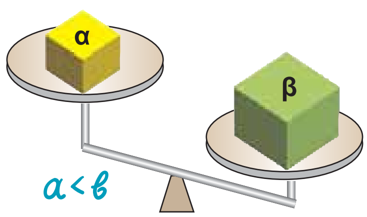
γίνεται σε μία απόσταση που είναι κατά 8,5 km μεγαλύτερη από την απόσταση στην οποία γίνεται ο αγώνας κολύμβησης. Ο αγώνας της ποδηλασίας γίνεται σε τετραπλάσια απόσταση απ' αυτήν του αγώνα δρόμου.

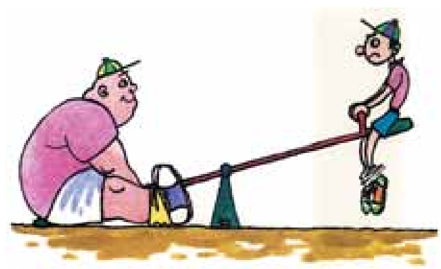
α) Υποθέτοντας ότι το ευθύγραμμο τμήμα x παριστάνει την απόσταση στην οποία γίνεται ο αγώνας δρόμου, να αντιγράψετε και να συμπληρώσετε το σχήμα με τις πληροφορίες της εκφώνησης.

β) Ποια απόσταση διανύει ένας αθλητής σε κάθε αγώνισμα;



# 1.5. Ανισώσεις α′ βαθμού



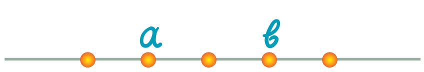
## Ανισώσεις

Όπως γνωρίζουμε, η σχέση που συνδέει τα βάρη μιας ζυγαριάς που δεν ισορροπεί, είναι μία **σχέση ανίσωσης**. Για παράδειγμα, για τα βάρη α και β του διπλανού σχήματος έχουμε την ανίσωση: **α < β** ή ισοδύναμα, την ανίσωση **β > α.**

Μερικές φορές, επίσης, χρησιμοποιούμε το σύμβολο «≤» ή το σύμβολο «≥». Γράφουμε: **α ≤ β**, όταν είναι α = β ή α < β και διαβάζουμε: **«το α είναι μικρότερο ή ίσο του β»**.

***Παρατήρηση:***

*Αν ένας αριθμός α είναι μικρότερος από τον αριθμό β, τότε ο α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β στην ευθεία των αριθμών. Η ίδια ανίσωση βέβαια μπορεί να γραφεί και β > α, γιατί ο β βρίσκεται «πιο δεξιά» από τον α.*

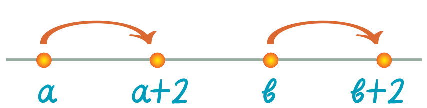


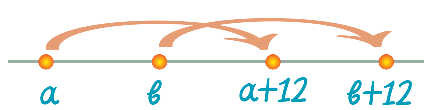

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

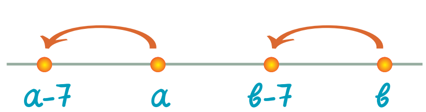

*Δίνονται οι αριθμοί α και β του διπλανού σχήματος.*
*Να συμπληρώσετε ένα από τα σύμβολα «<», «>», «=» στη θέση των κενών.*

*α) α ..... β*     *β) α + 2 ....... β + 2*
*γ) α + 12 ..... β + 12*     *δ) α – 7 ........β – 7*

### Λύση




α) Ο α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β στην ευθεία των αριθμών, οπότε α < β.

β) Ο α + 2 βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β + 2, οπότε α + 2 < β + 2.

γ) Ο α + 12 βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β + 12, οπότε α + 12 < β + 12

δ) Ο α – 7 βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β – 7, οπότε α – 7 < β – 7.

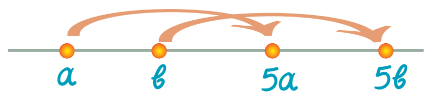
Γενικά, για την πρόσθεση και την αφαίρεση, ισχύει:

Αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης **προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά. Δηλαδή:
Αν **α < β** τότε **α + γ < β + γ** και **α – γ < β – γ**.
Αν **α > β** τότε **α + γ > β + γ** και **α – γ > β – γ**.

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2


*Δίνονται οι αριθμοί α και β του σχήματος.*
*Να συμπληρώσετε ένα από τα σύμβολα «<», «>», «=» στη θέση των κενών.*

*α) α ..... β*     *β) 2α ..... 2β*     *γ) 5α ..... 5β*


**Λύση**

α) Ο α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β, οπότε α < β.

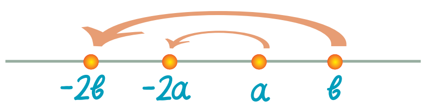
β) Ο 2α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον 2β, οπότε 2α < 2β.

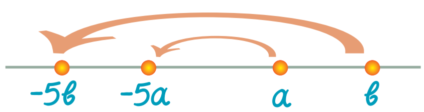
γ) Ο 5α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον 5β, οπότε 5α < 5β.

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3


*Δίνονται οι αριθμοί α και β του διπλανού σχήματος. Να συμπληρώσετε ένα από τα σύμβολα «<», «>», «=» στη θέση των κενών.*

*α) α ........ β      β) –2α ..... –2β      γ) –5α ..... –5β*




**Λύση**

α) Ο α βρίσκεται «πιο αριστερά» από τον β, οπότε α < β.

β) Ο –2α βρίσκεται «πιο δεξιά» από τον –2β, οπότε –2α > –2β.

γ) Ο –5α βρίσκεται «πιο δεξιά» από τον –5β, οπότε –5α > –5β.

Γενικά, ισχύει για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση:

Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την **ίδια φορά**. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha<\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma>0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma}$ και $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\gamma}<\dfrac{\beta}{\gamma}}$.

Αν $\boldsymbol{\alpha>\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma>0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma}$ και $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\gamma}>\dfrac{\beta}{\gamma}}$.

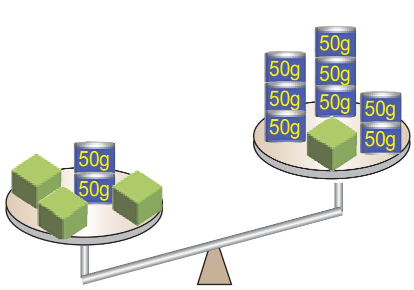
Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την **αντίστροφη φορά**. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha<\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma<0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\gamma}$ και $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\gamma}>\dfrac{\beta}{\gamma}}$.

Αν $\boldsymbol{\alpha>\beta}$ και $\boldsymbol{\gamma<0}$ τότε $\boldsymbol{\alpha\cdot\gamma<\beta\cdot\gamma}$ και $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\gamma}<\dfrac{\beta}{\gamma}}$.

# Επίλυση ανισώσεων

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 4




*Στο διπλανό σχήμα η ζυγαριά δεν ισορροπεί! Αν ονομάσουμε x το βάρος κάθε πράσινου κύβου (τα μπλε βαρίδια ζυγίζουν 50 γραμμάρια το καθένα):*

*α) Με τη βοήθεια του x να εκφράσετε με μια σχέση ανίσωσης το γεγονός ότι η ζυγαριά δεν ισορροπεί.*

*β) Τι μπορούμε να πούμε για το βάρος x κάθε πράσινου κύβου;*

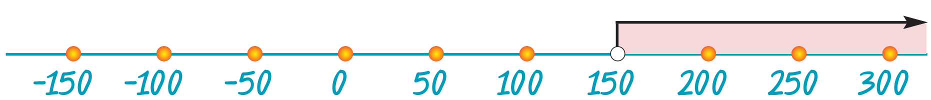
### Λύση

α) Στον 1ο δίσκο της ζυγαριάς υπάρχουν 3 πράσινοι κύβοι και δύο βαρίδια των 50 γραμμαρίων, δηλαδή συνολικό βάρος $3x + 2 \cdot 50 = 3x + 100$ γραμμάρια.
Στον 2ο δίσκο υπάρχει 1 πράσινος κύβος και 8 βαρίδια των 50 γραμμαρίων δηλαδή, συνολικό βάρος $x + 8 \cdot 50 = x + 400$ γραμμάρια.
Ο 1ος δίσκος είναι πιο βαρύς, οπότε ισχύει: $3x + 100 > x + 400$.

β) Η ανίσωση αυτή μπορεί να μας δώσει πληροφορίες για το βάρος x, αν τη λύσουμε με παρόμοιο τρόπο με αυτόν που ακολουθούμε στην επίλυση εξισώσεων.

| ΑΝΙΣΩΣΗ $3x + 100 > x + 400$ | ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΛΥΣΗΣ |
|---|---|
| $3x - x > 400 - 100$ | Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους |
| $2x > 300$ | Κάνουμε τις αναγωγές ομοίων όρων |
| $\frac{2x}{2} > \frac{300}{2}$ | Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου |
| $x > 150$ | Απλοποιούμε τα κλάσματα |

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, από την ανίσωση που βρήκαμε ($x > 150$) δεν μπορούμε να συμπεράνουμε πόσο ακριβώς ζυγίζει κάθε πράσινος κύβος, συμπεραίνουμε όμως ότι το βάρος του είναι οπωσδήποτε μεγαλύτερο από 150 γραμμάρια. Μπορεί να είναι 150,1 γραμμάρια, μπορεί να είναι 200 γραμμάρια ή μπορεί να είναι 1.000 κιλά! Δηλαδή, όταν λύνουμε μία ανίσωση, συνήθως δε βρίσκουμε μία μόνο λύση, αλλά άπειρες! Γι' αυτό παριστάνουμε αυτές τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.




Το λευκό κυκλάκι πάνω ακριβώς από το 150 δείχνει ότι ο αριθμός αυτός δεν είναι λύση της ανίσωσης.

Μια ανίσωση που περιέχει μία μεταβλητή και η οποία αληθεύει για ορισμένες τιμές της μεταβλητής, λέγεται **ανίσωση** με έναν άγνωστο.

Ο τρόπος που ακολουθούμε για να λύσουμε μια ανίσωση, είναι παρόμοιος με τον τρόπο που ακολουθούμε στην επίλυση εξισώσεων. Δηλαδή:

- Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.
- Κάνουμε αναγωγές ομοίων ορων.
- Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου. Αν ο συντελεστής είναι θετικός η ανισότητα δεν αλλάζει φορά, ενώ αν είναι αρνητικός **πρέπει να αλλάξουμε τη φορά της ανίσωσης**.

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

*Να λύσετε την ανίσωση $2(x - 1) - 3(x + 1) \leq 4(x + 2) + 12$.*
*Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.*

**Λύση:** Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$2x - 2 - 3x - 3 \leq 4x + 8 + 12$ ← *Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)*

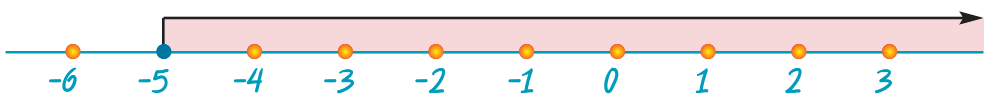
$2x - 3x - 4x \leq 8 + 12 + 2 + 3$ ← *Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους*

$-5x \leq 25$ ← *Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων*

$\frac{-5x}{-5} \geq \frac{25}{-5}$ ← *Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου. **Προσοχή όμως!** Διαιρέσαμε με αρνητικό αριθμό γι' αυτό αλλάξαμε φορά στην ανίσωση.*

$x \geq -5$

Στη συνέχεια, παριστάνουμε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών: Η μπλε τελεία ακριβώς πάνω στο –5 σημαίνει ότι και ο αριθμός αυτός είναι λύση της ανίσωσης.




## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

*Να λύσετε την ανίσωση* $\frac{5-x}{4} + \frac{x+2}{8} \geq x$.
*Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.*

**Λύση:** Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$8\,\frac{5-x}{4} + 8\,\frac{x+2}{8} \geq 8x$$

$$2\,(5-x) + x + 2 \geq 8x$$

$$10 - 2x + x + 2 \geq 8x$$

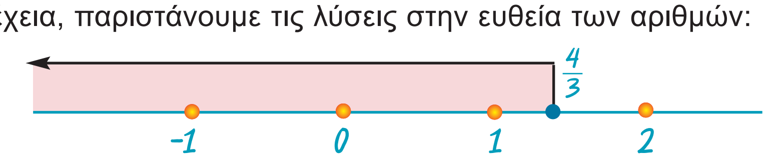
$$-2x + x - 8x \geq -10 - 2$$

$$-9x \geq -12$$

$$\frac{-9x}{-9} \leq \frac{-12}{-9}$$ ← *Διαιρέσαμε με αρνητικό αριθμό, γι' αυτό αλλάξαμε φορά στην ανίσωση.*

$$x \leq \frac{4}{3}$$

Στη συνέχεια, παριστάνουμε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών:




## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

*Να λύσετε την ανίσωση 2(x – 1) – 3 (x + 2) < 4(x + 1) – 5(x – 2).*
*Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.*

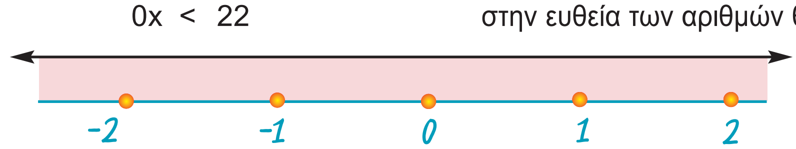
**Λύση:** Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$2x - 2 - 3x - 6 < 4x + 4 - 5x + 10$$

$$2x - 3x - 4x + 5x < 4 + 10 + 2 + 6$$

$$0x < 22$$

Παρατηρούμε ότι, η ανίσωση αυτή **αληθεύει** για **κάθε τιμή** του αριθμού x. Δηλαδή είναι **ταυτότητα**. Η παράσταση των λύσεων αυτών στην ευθεία των αριθμών θα είναι όλη η ευθεία.



## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

*Να λύσετε την ανίσωση $x + 2 + 2(x – 3) > 3x + 4$.*
*Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.*

**Λύση:** Η ανίσωση γράφεται διαδοχικά:

$$\begin{aligned} x + 2 + 2x - 6 &> 3x + 4 \\ x + 2x - 3x &> 4 - 2 + 6 \\ 0x &> 8 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, η ανίσωση αυτή **δεν αληθεύει** για **καμιά** τιμή του αριθμού x.
Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ανίσωση είναι **αδύνατη**.
Στην παράσταση των λύσεων αυτών στην ευθεία των αριθμών δε θα σημειώσουμε τίποτα, γιατί κανένας αριθμός δεν είναι λύση αυτής της ανίσωσης.

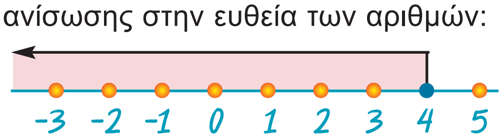
## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

*Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων: $3x – 5 \leq x + 3$ και $4 < 14 + 5x$.*
*Στη συνέχεια, να παραστήσετε τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών.*

**Λύση:** Λύνουμε χωριστά τις δύο ανισώσεις:

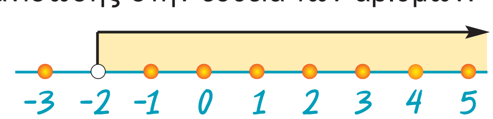
$$\begin{aligned} 3x - 5 &\leq x + 3 \\ 3x - x &\leq 3 + 5 \\ 2x &\leq 8 \\ \frac{2x}{2} &\leq \frac{8}{2} \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

Η παράσταση των λύσεων της πρώτης ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:

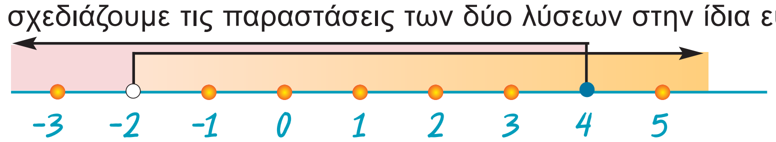



$$\begin{aligned} 4 &< 14 + 5x \\ 4 - 14 &< 5x \\ -10 &< 5x \\ \frac{-10}{5} &< \frac{5x}{5} \\ -2 &< x \end{aligned}$$

Η παράσταση των λύσεων της δεύτερης ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:




Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τις παραστάσεις των δύο λύσεων στην ίδια ευθεία.




Όπως βλέπουμε από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι αριθμοί που βρίσκονται ανάμεσα στο –2 και στο 4. Άρα, είναι οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει: $–2 < x \leq 4$.

***Παρατήρηση:*** *Η σχέση **$–2 < x \leq 4$** είναι μια **διπλή ανίσωση**, γιατί ισχύουν συγχρόνως **και η $x > –2$ και η $x \leq 4$**.*

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6

*Να λύσετε την ανίσωση: $\dfrac{x + 1}{3} \leq 2 \leq \dfrac{3 – x}{2}$.*

**Λύση:** Η ανίσωση $\dfrac{x + 1}{3} \leq 2 \leq \dfrac{3 – x}{2}$ χωρίζεται σε δύο ανισώσεις, οι οποίες πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα ή όπως λέμε, να **συναληθεύουν**: $\dfrac{x + 1}{3} \leq 2$ και $2 \leq \dfrac{3 – x}{2}$.

Λύνουμε χωριστά τις δύο ανισώσεις:

$$\frac{x+1}{3} \leq 2$$

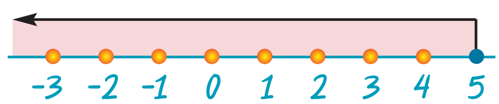
$$3 \cdot \frac{x+1}{3} \leq 3 \cdot 2$$

$$x + 1 \leq 6$$

$$x \leq 6 - 1$$

$$x \leq 5$$

Η παράσταση των λύσεων της πρώτης ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:




$$2 \leq \frac{3-x}{2}$$

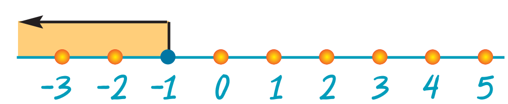
$$2 \cdot 2 \leq 2 \cdot \frac{3-x}{2}$$

$$4 \leq 3 - x$$

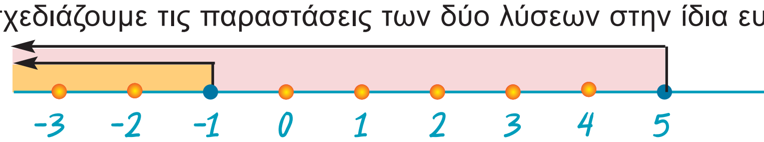
$$x \leq 3 - 4$$

$$x \leq -1$$

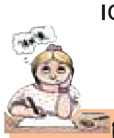
Η παράσταση των λύσεων της δεύτερης ανίσωσης στην ευθεία των αριθμών:




Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τις παραστάσεις των δύο λύσεων στην ίδια ευθεία.




Όπως βλέπουμε από το σχήμα, οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι οι αριθμοί που βρίσκονται από το –1 και αριστερά. Άρα, είναι οι αριθμοί x για τους οποίους ισχύει: $x \leq -1$.



## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

**1.** Να συμπληρώσετε τα κενά:

| | |
|---|---|
| α) Αν $x < 3$, τότε $x + 3$ .............................. | β) Αν $x < -3$, τότε $\frac{x}{2}$ .............................. |
| γ) Αν $x > 5$, τότε $x - 3$ .............................. | δ) Αν $x \leq 6$, τότε $\frac{x}{-3}$ .............................. |
| ε) Αν $x \geq -2$, τότε $2x$ .............................. | στ) Αν $x < 4$, τότε $\frac{3x}{2}$ .............................. |
| ζ) Αν $x < 7$, τότε $-3x$ .............................. | η) Αν $x \leq -\frac{1}{2}$, τότε $-4x$ .......................... |

**2.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σ (σωστή) ή Λ (λανθασμένη):

| | ΣΩΣΤΟ | ΛΑΘΟΣ |
|---|---|---|
| α) Αν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha - 16 < \beta - 16$. | | |
| β) Αν $\alpha < \beta$ τότε $-\alpha < -\beta$. | | |
| γ) Αν $\alpha < 0$ τότε $2\alpha < \alpha$. | | |
| δ) Αν $\alpha > 1$ τότε $\frac{1}{\alpha} > 1$. | | |
| ε) Αν $\alpha < 5$ τότε $\alpha < 8$. | | |
| στ) Η ανίσωση $3x - 5 > 7$ έχει λύση τον αριθμό $x = 4$. | | |
| ζ) Η ανίσωση $x + 500 > x + 499$ αληθεύει για κάθε αριθμό x. | | |
| η) Η ανίσωση $x + 500 > x + 501$ αληθεύει για κάθε αριθμό x. | | |
| θ) Η ανίσωση $2x - 3 < 3x - 2$ έχει λύσεις τους αριθμούς $x < 1$. | | |

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1** Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:
α) $8x + 4 \leq 16 + 5x$
β) $x + 3 > -2$
γ) $-(1 - x) > 2x - 1$
δ) $-7x + 3 \leq 4 - x$

**2** Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:
α) $3(ω - 1) > ω - 2$
β) $2x + 2 - (x - 2) \geq 4 - x$
γ) $3y - 1 - (y + 2) < 2(y + 2) + 1$
δ) $4(t + 5) < t - 4$

**3** Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις τους:
α) $\dfrac{3x - 4}{4} - \dfrac{2 - x}{3} > 1$
β) $2(x + 1) - \dfrac{3}{2}(x + 1) > \dfrac{x}{2}$
γ) $x + 3 + \dfrac{x + 2}{2} - \dfrac{x + 1}{3} > 0$
δ) $\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{x + 1}{2} + \dfrac{x + 1}{3}\right) - \dfrac{x + 7}{6} > 2$
ε) $ω - \dfrac{ω - 2}{2} < \dfrac{ω - 1}{2} - \dfrac{ω - 3}{4}$
στ) $t + \dfrac{t + 1}{4} > \dfrac{2t - 1}{7} + \dfrac{27t}{28}$

**4** Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:
α) $x - 4 < 1$ και $2 - x < 3$
β) $2(x + 1) + x > 6 - 2x$ και
$7x - 8 > 3(x + 3) + 7$
γ) $3x - 1 > 2(1 - x) + 7$ και
$3(1 - x) \geq 6$
δ) $3y - 15 > \dfrac{2}{5}(y + 2)$ και
$\dfrac{2}{3}y - \dfrac{5}{21} < y - 5$
ε) $2x - 1 < 7$ και
$3(x - 1) > -6$ και
$x \geq 3(x - 2)$
στ) $\dfrac{3x - 1}{2} > \dfrac{2x + 1}{3}$ και
$2(3x - 1) + x > -2(x + 5) - 1$ και
$3 + x < 2(x - 3)$

**5** Να λύσετε και να παραστήσετε στην ευθεία των αριθμών τις λύσεις των ανισώσεων:
α) $-7 < 2x + 1 \leq 19$
β) $-1 < 1 - 2x < 3$
γ) $3 \leq 5x + 1 \leq 8$

**6** Για ποιες τιμές του θετικού ακέραιου αριθμού μ, έχουμε ότι ο $Α = 2(μ - 3) - 4$ είναι αρνητικός;

**7** Για ποιες τιμές του αριθμού α, η ανίσωση $2x - 3α + 1 > α(x - 1)$ έχει λύση τον αριθμό $x = 2$;

**8** Η Άννα είχε τριπλάσια χρήματα από τη Μαρία, αλλά δαπάνησε 14 € και τώρα έχει λιγότερα από τη Μαρία. Να αποδείξετε ότι η Μαρία έχει λιγότερα από 7 €.

**9** Ο Γιώργος έχει γράψει δύο διαγωνίσματα με βαθμούς 12 και 14. Τι βαθμό πρέπει να γράψει στο επόμενο διαγώνισμα για να έχει μέσο όρο πάνω από 14;

**10** Μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας «Parlanet» προτείνει στους πελάτες της δύο «πακέτα» συνδρομής:


1ο: πάγιο 7,50 € το μήνα και χρέωση 0,254 € το λεπτό.
2ο: πάγιο 15 € το μήνα και χρέωση 0,204 € το λεπτό.

Από πόσο χρόνο ομιλίας και πάνω συμφέρει το 2ο πακέτο;

**11** Ένα οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου έχει μήκος 80 m, περίμετρο μικρότερη από 240 m και εμβαδόν μεγαλύτερο από 3000 $m^2$. Πόσα μέτρα μπορεί να είναι το πλάτος του;

# Επανάληψη Κεφαλαίου 1

## Εξισώσεις – Ανισώσεις

### Επιμεριστική ιδιότητα:

➤ $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$  ➤ $\alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma = (\alpha + \beta) \cdot \gamma$

Αν προσθέσουμε, αφαιρέσουμε, πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ισότητας με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ισότητα. Δηλαδή:

Αν $\alpha = \beta$, τότε:

$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$

$\alpha - \gamma = \beta - \gamma$

$\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ και

$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$, με $\gamma \neq 0$

Σε μια εξίσωση ή ανίσωση μπορούμε να «μεταφέρουμε» όρους από το ένα μέλος στο άλλο, αλλάζοντας το πρόσημό τους.

Για να λύσουμε μία εξίσωση, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- ➤ **Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών.**
- ➤ **Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.**
- ➤ **Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.**
- ➤ **Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου.**

Για να λύσουμε ένα πρόβλημα με τη βοήθεια εξίσωσης, ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- ➤ **Διαβάζουμε καλά το πρόβλημα και διακρίνουμε τα δεδομένα και τα ζητούμενα.**
- ➤ **Χρησιμοποιούμε ένα γράμμα (συνήθως το x) για να εκφράσουμε τον άγνωστο αριθμό που πρέπει να προσδιορίσουμε.**
- ➤ **Εκφράζουμε όλα τα άλλα μεγέθη του προβλήματος με τη βοήθεια του x.**
- ➤ **Γράφουμε την εξίσωση του προβλήματος χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της εκφώνησης.**
- ➤ **Λύνουμε την εξίσωση.**
- ➤ **Ελέγχουμε αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος.**

Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ανίσωση με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha + \gamma < \beta + \gamma}$ και $\boldsymbol{\alpha - \gamma < \beta - \gamma}$.

Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα δύο μέλη μιας ανίσωσης με τον ίδιο **θετικό** αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι ανίσωση με την **ίδια** φορά. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma}$ και $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}}$, όταν $\boldsymbol{\gamma > 0}$.

Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα δύο μέλη μιας ανίσωσης με τον ίδιο **αρνητικό** αριθμό, τότε προκύπτει ανίσωση με την **αντίστροφη** φορά. Δηλαδή:

Αν $\boldsymbol{\alpha < \beta}$ τότε $\boldsymbol{\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma}$ και $\boldsymbol{\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}}$, όταν $\boldsymbol{\gamma < 0}$.

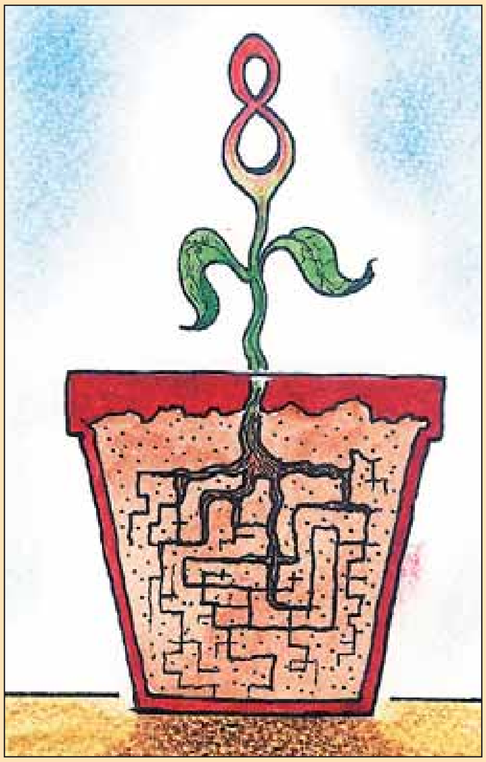
Για να λύσουμε μια ανίσωση, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με αυτήν της επίλυσης εξισώσεων, αλλά πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα **να αλλάζουμε τη φορά της ανίσωσης, όταν διαιρούμε ή πολλαπλασιάζουμε με αρνητικό αριθμό.**

2.1(39-44) 18-12-06 23:08 ™ÂÏ›‰·39

ΜΕΡΟΣ Α΄

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

## Πραγματικοί αριθμοί



# ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ



*Μέχρι τώρα έχουμε συναντήσει φυσικούς, ακέραιους και ρητούς αριθμούς.*

*Στους τελευταίους είχαμε εξετάσει τη δεκαδική τους παράσταση, η οποία ήταν γνωστή σε απλή ή περιοδική μορφή.*

*Υπάρχει όμως και ένα άλλο σύνολο αριθμών, οι άρρητοι, τους οποίους εξετάζουμε στο κεφάλαιο αυτό.*

*Οι άρρητοι μαζί με τους ρητούς σχηματίζουν τους πραγματικούς αριθμούς, οι οποίοι τοποθετούνται με πλήρη τρόπο πάνω σε μια ευθεία που την ονομάζουμε ευθεία των πραγματικών αριθμών. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την εφαρμογή προσεγγίσεων των άρρητων στην επίλυση προβλημάτων.*

# 2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

*Η Πηνελόπη έγινε αρχιτέκτων! Πήρε επιτέλους το δίπλωμά της και γεμάτη όρεξη ρίχνεται στην πρώτη της δουλειά! Πρέπει να χτίσει ένα σπίτι με τετραγωνική βάση σε ένα γωνιακό οικόπεδο. Αφού ρώτησε την Πολεοδομία, πληροφορήθηκε ότι στο συγκεκριμένο οικόπεδο μπορεί κανείς να χτίσει σπίτι εμβαδού 289 $m^2$. Ποιο θα πρέπει να είναι το μήκος x κάθε πλευράς της τετραγωνικής βάσης του σπιτιού;*

### Λύση

Γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $Ε = x^2$.
Άρα πρέπει $x^2 = 289$. Δηλαδή, πρέπει να βρούμε έναν αριθμό x, του οποίου το τετράγωνο να είναι 289.

- Μήπως είναι $x = 10$;
  Τότε όμως $x^2 = 10^2 = 100$ (θέλει πιο πολύ).
- Μήπως είναι $x = 20$;
  Τότε όμως $x^2 = 20^2 = 400$ (θέλει πιο λίγο).
- Μήπως είναι $x = 15$;
  Τότε όμως $x^2 = 15^2 = 225$ (θέλει λίγο πιο πολύ).
- Μήπως είναι $x = 17$;
  Τότε $x^2 = 17^2 = 289$ (αυτό είναι!).

Το σπίτι θα έχει τετραγωνική βάση, πλευράς 17 (m).

Ο θετικός αριθμός 17, του οποίου το τετράγωνο ισούται με 289, ονομάζεται **τετραγωνική ρίζα του 289** και συμβολίζεται με $\sqrt{289}$. Δηλαδή $\sqrt{289} = 17$.


Γενικά:

**Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.**

**Επειδή, $0^2 = 0$, ορίζουμε ως $\sqrt{0} = 0$.**

***Για παράδειγμα:***

$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ γιατί $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

$\sqrt{0,64} = 0,8$ γιατί $0,8^2 = 0,64$

$\sqrt{17,64} = 4,2$ γιατί $4,2^2 = 17,64$

***Σχόλια:***

- ***Δεν ορίζουμε*** *ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός. Για παράδειγμα η* $\sqrt{-25}$ ***δεν έχει νόημα****, γιατί κανένας αριθμός, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δε δίνει αποτέλεσμα –25.*

➤ *Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας, προκύπτει ότι:*

- **Αν $\sqrt{α} = x$, όπου $α \geq 0$, τότε $x \geq 0$ και $x^2 = α$.**
- **Αν $α \geq 0$, τότε $(\sqrt{α})^2 = α$.**

➤ *Σύμφωνα με τα παραπάνω:*

*α) Είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{25} = -5$, παρόλο που $(-5)^2 = 25$, καθώς $-5 < 0$.*

*β) Είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{(-5)^2} = -5$, καθώς $-5 < 0$. Το σωστό είναι $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$.*

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1

*Να βρείτε τους αριθμούς:* $\sqrt{25}$, $\sqrt{49}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{121}$.

**Λύση:** Αν $x = \sqrt{25}$ τότε $x^2 = 25$. Άρα πρέπει να βρούμε ένα θετικό αριθμό του οποίου το τετράγωνο να ισούται με 25. Με δοκιμές βρίσκουμε εύκολα ότι $5^2 = 25$, δηλαδή $x = 5$.
Άρα $\sqrt{25} = 5$.
Ομοίως, βρίσκουμε ότι:
$\sqrt{49} = 7$ γιατί $7^2 = 49$, $\sqrt{64} = 8$ γιατί $8^2 = 64$, $\sqrt{121} = 11$ γιατί $11^2 = 121$.

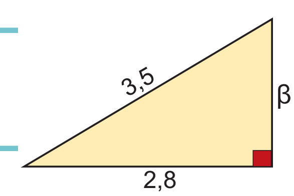
## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

*Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες: α)* $\sqrt{16}$, *β)* $\sqrt{0{,}16}$, *γ)* $\sqrt{0{,}0016}$.

**Λύση:**
α) Γνωρίζουμε ότι $4^2 = 16$. Άρα $\sqrt{16} = 4$.
β) Γνωρίζουμε ότι $(0{,}4)^2 = 0{,}16$. Άρα $\sqrt{0{,}16} = 0{,}4$.
γ) Γνωρίζουμε ότι $(0{,}04)^2 = 0{,}0016$. Άρα $\sqrt{0{,}0016} = 0{,}04$.

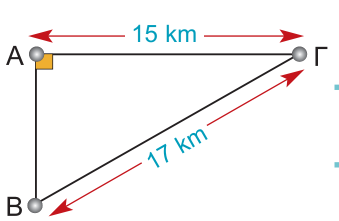
## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3

*Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου του διπλανού σχήματος.*




**Λύση:** Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$β^2 + 2{,}8^2 = 3{,}5^2$ ή $β^2 + 7{,}84 = 12{,}25$ ή
$β^2 = 12{,}25 - 7{,}84$ ή $β^2 = 4{,}41$
Επομένως: $β = \sqrt{4{,}41} = 2{,}1$ γιατί $2{,}1^2 = 4{,}41$.

## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4




*Πόσο απέχει η πόλη Α από την πόλη Β;*

**Λύση:** Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2$ ή $ΑΒ^2 + 15^2 = 17^2$ ή
$ΑΒ^2 + 225 = 289$ ή $ΑΒ^2 = 289 - 225$ ή
$ΑΒ^2 = 64$ οπότε $ΑΒ = \sqrt{64}$ ή $ΑΒ = 8$

Επομένως, η πόλη Α απέχει 8 km από την πόλη Β.