



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικό και Καποδιστριακό
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διδακτική Μαθηματικών Ι

Ενότητα 1: Γενετική επιστημολογία και Διδακτική των Μαθηματικών

Γιώργος Ψυχάρης

Σχολή Θετικών επιστημών

Τμήμα Μαθηματικό

Γενετική επιστημολογία και Διδακτική των Μαθηματικών

Κονστρουκτιβισμός

Βασικές θεωρητικές παραδοχές

Η κονστρουκτιβιστική θεωρία εκπορεύεται κατά κύριο λόγο από την αντίστοιχη θεωρητική εργασία του Piaget σχετικά με την εννοιολογική ανάπτυξη της μάθησης, σύμφωνα με την οποία η μάθηση είναι προϊόν αλληλεπίδρασης, που περιλαμβάνει την ανακάλυψη και τη δημιουργία.

Η γνώση στο κονστρουκτιβιστικό μοντέλο δεν συνιστά ένα στατικό σώμα που υπάρχει πλατωνικά εκτός του μαθητευόμενου, αλλά θεωρείται ως ένα δυναμικό σύνολο εννοιών που η αποδοχή τους προέρχεται από τη διαρκή διαπραγμάτευση σε μια μαθησιακή κοινότητα. Η θέση αυτή αρμόζει επακριβώς στη διδακτική κατάσταση των μαθηματικών: οι δάσκαλοι πρέπει να λειτουργούν σα να υπάρχουν τα μαθηματικά αντικείμενα και να πρέπει να ανακαλυφθούν, ενώ τα παιδιά χρειάζεται να τα κατασκευάσουν. Η **μάθηση** αναδεικνύεται έτσι ως μια **κατασκευή της εμπειρίας**, ενώ η ποικιλία των ερμηνειών που μπορεί να προέλθουν από διαφορετικούς ανθρώπους αποκλείει κάθε μεταβιβαστικό μοντέλο για την προσέγγισή της.

Οι απαρχές του κονστρουκτιβισμού στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης βρίσκονται στις αρχές της δεκαετίας του 70 και αναπτύχθηκαν, κατά κύριο λόγο, από τον Ernst von Glasersfeld (1987a, 1991, 1995a, 1995b) στο πλαίσιο της σταδιακής αμφισβήτησης του ότι τα μαθηματικά συνιστούν ένα έτοιμο σύνολο γνώσεων, το οποίο παρουσιάζεται στους μαθητές με την έννοια της αναδρομικότητας, δηλαδή ανεξάρτητα από τον τρόπο κατασκευής του. Οι διαφορετικές μορφές των συμπεριφοριστικών ερευνών, που επικρατούσαν μέχρι τότε, στάθηκαν ανεπαρκείς να δώσουν απαντήσεις σε επιστημολογικά ερωτήματα σχετικά με τη φύση της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών, ενώ παράλληλα η σχετική ερευνητική εμπειρία αναδείκνυε την πολυπλοκότητα παραγόντων που μέχρι τότε είχαν αγνοηθεί ή ουδετεροποιηθεί στην έρευνα όπως για παράδειγμα ο ρόλος της γλώσσας, του πλαισίου, των χρησιμοποιούμενων μέσων κ.λπ. Η κονστρουκτιβιστική θεωρία περιγράφει τη μάθηση των μαθηματικών ως μια **εσωτερική και ιδιοσυγκρασιακή κατασκευαστική διαδικασία**, στην οποία ο μαθητευόμενος κατασκευάζει και αποδίδει νόημα στη μαθηματική γνώση.

Ο κονστρουκτιβισμός του Piaget οδήγησε στη θεωρία του **ριζοσπαστικού κονστρουκτιβισμού** για τη μάθηση των μαθηματικών (von Glasersfeld, 1991, 1995, Davis et al. 1990), που προσδιορίζεται από δύο υποθέσεις:

1. Η γνώση δεν προσλαμβάνεται ούτε 'συλλαμβάνεται' παθητικά μέσω των αισθήσεων ή της επικοινωνίας από το περιβάλλον, αλλά κατασκευάζεται ενεργητικά από το υποκείμενο.
2. - Η γνώση είναι μια διαδικασία προσαρμογής, με τη βιολογική έννοια του όρου, τείνοντας στη βιωσιμότητα;

- Η γνώση υποβοηθά την οργάνωση του κόσμου των εμπειριών και όχι ενός προϋπάρχοντος κόσμου, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από τον γνώστη (Κολέζα, 2009). Ο Von Glaserfeld (1995b) υποστήριξε ότι οι εννοιολογικές κατασκευές του υποκειμένου δεν είναι αυθαίρετες. Αντίθετα η όλη διαδικασία ελέγχεται και ρυθμίζεται από τους περιορισμούς του πλαισίου στο οποίο λαμβάνει χώρα. Αυτή η διαδικασία ρύθμισης είναι απαραίτητη προκειμένου να υπάρξει επικοινωνία μεταξύ των υποκειμένων. Στην περίπτωση της επικοινωνίας για καθημερινά πράγματα ή καταστάσεις, το άτομο μαθαίνει βαθμιαία (αλληλεπιδρώντας με άλλους ανθρώπους που μιλούν την ίδια γλώσσα) να προσαρμόζει τις έννοιές του ώστε να υπάρχει μια συμβατικότητα μεταξύ των μελών της κοινότητας. Όταν όμως πρόκειται για έννοιες των μαθηματικών, δηλαδή για έννοιες που είναι αντικείμενα αφαίρεσης μέσω νοητικών διαδικασιών, είναι πολύ δυσκολότερο να επιβεβαιωθεί η συναίνεση. Ως εκ τούτου για τη διδασκαλία των αφηρημένων εννοιών ο εκπαιδευτικός επιδιώκει τη δημιουργία μιας ποικιλίας πλούσιων εμπειρικών καταστάσεων, ώστε οι μαθητές να έχουν την ευκαιρία να διερευνήσουν τυχόν εννοιολογικές αποκλίσεις και να προβούν σε κατάλληλες αφαιρέσεις.

Ο σχεδιασμός της διδασκαλίας δεν γίνεται θεωρώντας ότι οι μαθητές θα ερμηνεύσουν μια κατάσταση με ένα συγκεκριμένο τρόπο. Η διδασκαλία σχεδιάζεται για να δημιουργήσει ένα δυναμικό περιβάλλον, το οποίο θα ευνοήσει την εξέλιξη των μαθητών προς μια ιδιαίτερη κατεύθυνση (που αποτελεί και το στόχο της διδασκαλίας) αλλά που θα επιτρέψει ταυτόχρονα μια ποικιλία μορφών κατανόησης σε σχέση με το επίπεδο του κάθε μαθητή τη συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Το περιεχόμενο της διδασκαλίας αποτελεί αντικείμενο συζήτησης και ερμηνείας από τους μαθητές. Οι εκπαιδευτικοί δεν θα πρέπει να θεωρήσουν ότι οι μαθητές κατανόησαν αυτό που τους παρουσιάστηκε. Αντίθετα, είναι σημαντικό να προσπαθήσουν να 'αφουγκραστούν' τις ερμηνείες των μαθητών σχετικά με όσα υποτίθεται ότι κατανόησαν.

Η θεώρηση του Piaget

Η κύρια δημιουργική δύναμη στην οικοδόμηση της λογικο-μαθηματικής γνώσης είναι για τον Piaget το ίδιο το υποκείμενο. Η λογικο-μαθηματική γνώση δεν προέρχεται απευθείας από τα πράγματα, αλλά το άτομο την κατασκευάζει σταδιακά, ενεργώντας πάνω στα πράγματα, εγκαθιστώντας σχέσεις μεταξύ τους, νέες σχέσεις μεταξύ αυτών των σχέσεων κ.λπ.

Η άποψη του Piaget θεωρήθηκε πρωτοπόρα για την εποχή της διότι, αντίθετα με τις επικρατούσες απόψεις, συνέλαβε τη γνωστική ανάπτυξη ως ποιοτική αλλαγή στον τρόπο με τον οποίο οργανώνεται η γνώση και όχι ως μια ποσοτική συνάθροιση μιας διαρκώς αυξανόμενης ποσότητας γνώσης. Σύμφωνα με τον Piaget, οι ιδέες των παιδιών συγκροτούν ένα γνωστικό σύστημα του οποίου η δομή αλλάζει κατά την προσπάθειά τους να προσαρμοστούν καλύτερα στο περιβάλλον τους.

- Τα στάδια γνωστικής ανάπτυξης

1. Αισθητηριοκινητική περίοδος (από 0 έως 2 ετών περίπου)

Κεντρική η έννοια του αντικειμένου. Στη αρχή μόνο στο οπτικό πεδίο. Προς το τέλος του 2^{ου} έτους ψάχνει το αντικείμενο – ικανότητα για αναπαραστατική σκέψη.

2. Προλειτουργική ή προεγνωσιολογική περίοδος (από 2 έως 7 ετών). Εξωτερική ομοιότητα, και όχι εσωτερική ομοιότητα σχέσεων και αναλογιών. *Προέννοιες*. Ιδιοσυγκρασιακές και στηρίζονται σε ειδικές περιπτώσεις και παραδείγματα, που δεν είναι οργανωμένα σε σύνολα και υποσύνολα με ιεραρχικό τρόπο.

3. Περίοδος τυπικών λειτουργιών ή συγκεκριμένων λογικών ενεργειών. (7 έως 12 ετών). Παιδί ικανό για νοητικές διεργασίες και αντιστρεψιμότητα. Λογική συνόλων (ταξινόμηση ή κατηγοριοποίηση), λογική σχέσεων (συνδυασμός αντικειμένων σύμφωνα με σχέσεις, ράβδοι διαφορετικών μεγεθών) και λογική αριθμών (προσθετικές και πολλαπλασιαστικές συνθέσεις).

4. Περίοδος αφηρημένων νοητικών λειτουργιών ή τυπικών λογικών ενεργειών (μετά τα 12 χρόνια). Οι γνωστικές διαδικασίες αποσυνδέονται από συγκεκριμένα αντικείμενα και γίνονται τυπικές. Δημιουργία υποθέσεων, επαλήθευση, διατύπωση αρχών και κανόνων που μπορούν να εφαρμοστούν περισσότερες από μία περιπτώσεις.

Σύμφωνα με τον Piaget: (α) Η γνωστική λειτουργία εξελίσσεται. (β) Τα στάδια είναι υποχρεωτικά στην διαδοχή τους. (γ) Οι αναμενόμενες ικανότητες από ένα παιδί αντιστοιχούν στο στάδιο της γνωστικής ανάπτυξης στο οποίο βρίσκεται.

Κριτική που δέχτηκε η θεωρία του Piaget:

Κοινωνική συνιστώσα

Νοητικά εμπόδια που αντιστοιχούν σε επιμέρους γνωστικά αντικείμενα.

- *Εσωτερικές διεργασίες: Αφομοίωση, συμμόρφωση και εξισορρόπηση.*

Η κονστρουκτιβιστική προσέγγιση του Piaget ερμηνεύει τη μάθηση και τη γνωστική ανάπτυξη ως μια κατεξοχήν χρονική διαδικασία, που καταλήγει σε ολοένα και περισσότερο πολύπλοκα οργανωμένες δομές, ως αποτέλεσμα στενά συνδεδεμένων διαδικασιών αλληλεπίδρασης μεταξύ του ανθρώπου και του περιβάλλοντος όπως της *αφομοίωσης (assimilation)*, της *συμμόρφωσης ή αναπροσαρμογής (accommodation)* και της *εξισορρόπησης ή αυτορύθμισης (equilibration)*.

- Η αφομοίωση είναι η διαδικασία με την οποία καινούρια αντικείμενα ή καταστάσεις ενσωματώνονται στις προϋπάρχουσες δομές γνώσεων.

- Η συμμόρφωση είναι η διαδικασία με την οποία οι δομές των γνώσεων τροποποιούνται για να προσαρμοστούν στις καινούριες καταστάσεις.

- Η εξισορρόπηση ή αυτορύθμιση είναι μια προοδευτική διαδικασία που αφορά την αντιστάθμιση του υποκειμένου στα εξωτερικά ερεθίσματα που δέχεται και την προσπάθεια σχηματισμού ενός συστήματος που διαθέτει εσωτερική συνέπεια και συνάφεια.

Η έννοια του σχήματος στην κονστρουκτιβιστική προσέγγιση του Piaget

Η έννοια του **σχήματος (scheme)** αποτελεί κεντρικό δόμημα της θεωρίας του Piaget (1971). Για τον Piaget ένα σχήμα υποστηρίζεται από μια λογική δομή που αναπτύχθηκε στο νου του παιδιού σύμφωνα με τις προσλαμβάνουσες από το περιβάλλον του και με τη γενετική του κληρονομιά. Το σχήμα είναι ένα εργαλείο δράσης και γενίκευσης.

Για να μοντελοποιήσει τις παρατηρούμενες συμπεριφορές ο Piaget ορίζει τα σχήματα σκέψης και πράξης τα οποία άπαξ και φτάσουν σε ένα ορισμένο επίπεδο συνειδητής ανάπτυξης προσφέρονται ως βάση για την εννοιολόγηση (συγκρότηση εννοιών, conceptualization).

Όταν τα σχήματα συντονίζουν ένα πλήθος ενεργειών, επικεντρώνουν τη προσοχή στις κοινές ιδιότητες των ενεργειών αυτών αναδεικνύοντας αυτά που ονομάζουμε **αναλλοιώτα**. Αποτελούν την απαρχή της διαδικασίας της αφαίρεσης. Για παράδειγμα, η καθημερινή παρατήρηση θα αποκαλύψει στο παιδί ότι τα πράγματα «πέφτουν όταν τα αφήνουμε». Λόγω εξισορρόπησης το σχήμα αυτό θα γίνει πιο σύνθετο μελλοντικά. Για παράδειγμα, θα μπει μελλοντικά στο σχήμα η έννοια του βάρους στη συμπεριφορά των αντικειμένων, στη συνέχεια η έννοια της έλξης μέχρι να καταλήξει σε μια τυποποιημένη κατάσταση της Μηχανικής.

Η έννοια του **σχήματος (scheme)** τίθεται στο επίκεντρο της προσέγγισής μας στην πιαζετική θεωρία καθώς: (α) αποτελεί αναφορά στη γένεση των μηχανισμών κατάκτησης της εμπειρίας (β) αναδεικνύει το συστατικό χαρακτήρα της υπάρχουσας γνώσης και της δράσης στην περαιτέρω δόμηση της γνώσης μέσω της εμπειρίας.

Η θεωρία του σχήματος αναπτύχθηκε ως αποτέλεσμα του συντονισμού και του αναστοχασμού πάνω στις αντανακλαστικές αλληλεπιδράσεις των βρεφών με το περιβάλλον και της γενίκευσης σε κάθε σύνολο δράσεων, αφήνοντας κατά μέρος τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των αντικειμένων στα οποία εφαρμόζεται.

Το σχήμα αποτελείται από τρία μέρη:

- (α) την αναγνώριση μιας συγκεκριμένης κατάστασης,
- (β) τη συγκεκριμένη δραστηριότητα που σχετίζεται με αυτή την κατάσταση και
- (γ) την προσδοκία ότι η συγκεκριμένη δραστηριότητα παράγει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα η εμπειρία του οποίου είναι προϋπάρχουσα.

Ο Von Glaserfeld (1995b) σημειώνει ότι το σχήμα αποτελεί το πρωταρχικό εργαλείο κατανόησης της αφομοίωσης και της συμμόρφωσης.

Μια εμπειρική κατάσταση καταρχήν αναγνωρίζεται ως σημείο εκκίνησης ενός σχήματος (Μέρος α) αν ικανοποιεί τις συνθήκες που το χαρακτήριζαν στο παρελθόν και τότε προκαλεί την αντίστοιχη δραστηριότητα (Μέρος β). Η δραστηριότητα τότε παράγει ένα αποτέλεσμα που ο οργανισμός θα επιχειρήσει να αφομοιώσει με βάση τις προσδοκίες του (Μέρος γ).

Αν ο οργανισμός δεν μπορέσει να το κάνει δημιουργείται στροβιλισμός (perturbation, Piaget, 1974, σ. 264) και ακολουθούν τυχαίες αντιδράσεις με πιθανότερες εκδοχές τις εξής: αν η αρχική κατάσταση ανακτηθεί μπορεί να εξεταστεί και πάλι όχι ως μια σύνθεση εναυσμάτων, αλλά ως μια συλλογή εμπειρικών στοιχείων. Αυτή η ανασκόπηση μπορεί να αποκαλύψει στοιχεία που είχαν παραβλεφθεί με την αφομοίωση. Αν το απρόσμενο αποτέλεσμα της δραστηριότητας είναι απογοητευτικό ένα ή περισσότερα από τα νέα αναγνωρίσιμα στοιχεία μπορεί να επιφέρει αλλαγή στην αναγνώριση και άρα στις συνθήκες που θα ανακινήσουν τη δραστηριότητα στο μέλλον. Εναλλακτικά, αν το απρόσμενο αποτέλεσμα είναι ενδιαφέρον ή ευχάριστο μια νέα αναγνώριση μπορεί να μορφοποιηθεί ώστε να συμπεριλάβει το νέο χαρακτηριστικό, συστήνοντας έτσι ένα νέο σχήμα.

Και στις δυο περιπτώσεις θα υπάρξει μια δράση μάθησης και μπορούμε να μιλάμε για συμμόρφωση. Στη δεύτερη περίπτωση η νέα συνθήκη θα είναι κεντρική στη διαδικασία αναγνώρισης του νέου σχήματος.

Για τον Piaget η έννοια του σχήματος δεν μπορεί να κατανοηθεί σωστά αν δεν δεχτούμε ότι η συμμόρφωση και η αφομοίωση είναι υποκειμενικές διαδικασίες που στηρίζονται σε μη παρατηρήσιμες θέσεις του σκεπτόμενου υποκειμένου. Η αφομοίωση έχει γενικότερη ισχύ καθώς παρακινεί το υποκείμενο να εμπλακεί σε δράσεις με βάση το στόχο ακόμα κι αν, από την πλευρά του παρατηρητή, το έναυσμα μεταβάλλεται.

Οι σύγχρονες θεωρήσεις της διδακτικής των Μαθηματικών αντιμετωπίζουν τη μάθηση ως μια κοινωνική διαδικασία κατά την οποία τα γνωστικά σχήματα των μαθητών εξελίσσονται, αναδιοργανώνονται και εμπλουτίζονται. Αυτή η εξέλιξη των σχημάτων αρχικά εμφανίζεται ως ανάγκη επικοινωνίας, για να εσωτερικοποιηθεί στη συνέχεια ως επανασυγκρότηση και εμπλουτισμός. Αυτό σημαίνει ότι τόσο οι νοητικές κατασκευές των μαθητών όσο και η επίδραση του επικοινωνιακού πλαισίου της τάξης (πρακτικές λόγου) πρέπει να λαμβάνονται υπόψη στο σχεδιασμό της διδασκαλίας.

Σχήματα και έννοιες

(Κολέζα, 2009, σελ. 82). Οι διαδικασίες που αναφέραμε πιο πριν αναφορικά με τα σχήματα θα μπορούσε να θεωρηθεί ότι συνεισφέρουν στην **συγκρότηση των εννοιών** μέσα από διαδικασίες **αφαίρεσης**, όταν οι εμπειρίες συνδέονται μεταξύ τους στη βάση των ομοιοτήτων τους.

- Η πρώτη φάση της διαδικασίας αφαίρεσης είναι η αναγνώριση των κοινών χαρακτηριστικών γνωρισμάτων σε ποικίλες καταστάσεις (π.χ. αναλογία)
- Στη δεύτερη φάση, η ομοιότητα 'αφαιρείται' και διαμορφώνεται μια έννοια που «ενσωματώνει» από μια άποψη αυτή τη ομοιότητα.
- Σε μια τρίτη φάση, η μαθηματική έννοια «υπάρχει» ως αυτόνομο αντικείμενο.

Αφαίρεση είναι η νοητική διαδικασία κατά την οποία απομονώνονται τα κοινά στοιχεία συνόλου ομοειδών πραγμάτων, γεγονός που επιτρέπει τον καθορισμό της γενικής έννοιας στην οποία υπάγονται αυτά.

Οι στοιχειώδεις μαθηματικές έννοιες διαμορφώνονται μέσα από διαδικασίες ταξινόμησης και αφαίρεσης όπως και οι καθημερινές έννοιες με μια σημαντική τη διαφορά: τα «αντικείμενα» που ταξινομούνται δεν είναι μόνο καθημερινά αντικείμενα αλλά και αφηρημένες δομές: σχέσεις μεταξύ των καθημερινών αντικειμένων ή των εννοιών. Π.χ. η έννοια του αριθμού είναι το αποτέλεσμα της αφαίρεσης όχι μόνο των ιδιοτήτων ενός συνόλου αντικειμένων αλλά και των ιδιοτήτων των διαδικασιών σε αυτά τα σύνολα. (μετρώντας 3 τελειώνουμε στον ίδιο αριθμό άσχετα με την ταξινόμηση).

Το σχήμα ως θεμέλιο της συγκρότησης μιας μαθηματικής έννοιας

Ο Vergnaud (1998) χρησιμοποιεί το σχήμα ως θεμέλιο λίθο για τη συγκρότηση μιας έννοιας (concept). Μια έννοια χαρακτηρίζεται από την τριάδα (S,I,s) όπου:

- (S) είναι το σύνολο των καταστάσεων που δίνουν νόημα στην έννοια. Κάθε στοιχείο του (S) είναι μια συγκεκριμενοποίηση της έννοιας, ένας από τους αντιπροσώπους της.
- (I) είναι το σύνολο των αμετάβλητων λειτουργιών της έννοιας, το σύνολο των ιδιοτήτων που είναι κοινές στα στοιχεία του (S) και που μας κάνουν να τις εντάσσουμε όλες στην ίδια εννοιολογική κατηγορία.
- (s) είναι ένα σύνολο όρων, ονομασιών ή συμβόλων που υποδηλώνουν την έννοια.

Για παράδειγμα, η έννοια της συνάρτησης στα μαθηματικά περιέχει το σύνολο των συναρτήσεων που ο μαθητής στο δικό του επίπεδο θα χαρακτηρίσει ως τέτοιες, τις ιδιότητες που κάνουν μια σχέση ανάμεσα σε σύνολα να είναι συνάρτηση (ορισμός, το μονοσήμαντο) και ακόμη τις λέξεις και τα σύμβολα που παριστάνουν συνήθως μια συνάρτηση, όπως οι όροι εφαρμογής, ο υπολογισμός, $f(\)$, $X \rightarrow Y$, κλπ...

Τέλος, πραγματικά μια έννοια δεν θα υπάρχει παρά μόνο σε αναφορά με άλλες (έννοιες) και μόνο εάν είναι ικανή να εφαρμοστεί στην εξήγηση και στην πρόβλεψη. Δηλαδή, μια έννοια οφείλει να εισαχθεί μέσα σ' ένα πραγματικό "μοντέλο" που σταδιακά συγκροτείται και γίνεται πολυπλοκότερο.

Για παράδειγμα, η έννοια της συνάρτησης δεν θα λειτουργήσει παρά μόνο εάν μας επιτρέπει να αναγνωρίσουμε άλλα μαθηματικά αντικείμενα που δεν είναι συναρτήσεις και αν μας επιτρέπει να θεωρήσουμε μια συνάρτηση ως ένα αντιπρόσωπο αυτής της έννοιας. Η πρόσβαση σε αυτό το νοητικό επίπεδο είναι μακρόχρονη και γεμάτη από εμπόδια, επιστημολογικά και διδακτικά. Αποδεικνύεται ότι οι φοιτητές μπαίνοντας ακόμα και στο πανεπιστήμιο δεν την έχουν επιτύχει.

Δύο κεντρικά θεωρητικά δομήματα του Vergnaud είναι τα ***Θεωρήματα στην πράξη (theorems-in-action)*** και οι ***Έννοιες στην πράξη (concepts-in-action)***. Αποτελούν τα εννοιολογικά μέρη του σχήματος (ονομάζονται **λειτουργικά αναλλοίωτα, operational invariants**), και αναφέρονται σε σταθερές μέσα σε μια μέσα σε μία ομάδα αντικειμένων σχέσεων ή προβλημάτων που συνδέονται

μ' αυτά. Οι έννοιες στην πράξη αναφέρονται σε κατηγορίες μαθηματικών αντικειμένων (π.χ. η έννοια του τριγώνου) και τα θεωρήματα στην πράξη στα συμπεράσματα που μπορεί να συναγάγουν οι μαθητές μέσω της αλληλεπίδρασή τους τόσο με μαθηματικές αναπαραστάσεις όσο και με τους συμμετέχοντες στο κοινωνικό επίπεδο της τάξης. Υπάρχει διαλεκτική σχέση μεταξύ των εννοιών στην πράξη και των θεωρημάτων στην πράξη καθώς οι έννοιες είναι συστατικά των θεωρημάτων και τα θεωρήματα αποτελούν ιδιότητες που αποδίδουν περιεχόμενο στις έννοιες. Ο Vergnaud μέσω του συγκεκριμένου ορισμού επικεντρώθηκε στο γνωστικό επίπεδο σε μαθηματικές έννοιες περισσότερο, παρά στις γνώσεις των μαθητών.

Αυτές οι τελευταίες παρατηρήσεις οδήγησαν τον Vergnaud να αναπτύξει την ιδέα των **εννοιολογικών πεδίων** (*champs conceptuel*), των οποίων η κατασκευή για τα διάφορα επίπεδα της σχολικής ζωής είναι πραγματικό στοίχημα της μαθησιακής διαδικασίας.

Το εννοιολογικό πεδίο μιας έννοιας

Οι μαθηματικές έννοιες δεν εμφανίζονται μεμονωμένες αλλά ανήκουν σε εννοιολογικά πεδία.

Σύμφωνα με τον Vergnaud, κάθε μαθηματική έννοια θεωρείται το επίκεντρο ενός εννοιολογικού (ή νοητικού) πεδίου (*conceptual field*) και δεν είναι ποτέ αποστασιοποιημένη από τους τρόπους χρήσης της, τους τρόπους αναπαράστασής της και τις συγγενείς έννοιες που προϋποθέτει ο ορισμός και οι χρήσεις της.

(α) έννοιες που σχετίζονται στενά με αυτήν

(β) ομάδα καταστάσεων στις οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθεί

(γ) ομάδα διαθέσιμων αναπαραστάσεων

Αυτό σημαίνει ότι μία μαθηματική έννοια παίρνει το νόημά της από ένα σύνολο καταστάσεων και προβλημάτων μέσα στις οποίες μπορεί να γενικευτεί. Μια δραστηριότητα που σχεδιάζεται για να οδηγήσει σε νέα γνώση αναπτύσσεται μέσα σε μια σειρά δραστηριοτήτων μέσα από τις οποίες οι μαθητές έχουν εμπειρίες και δημιουργούν ή προσεγγίζουν ή αναπτύσσουν γενικότερες ιδέες.

Το εννοιολογικό πεδίο μιας έννοιας, δηλαδή το σύνολο των καταστάσεων και προβλημάτων μέσα στα οποία η έννοια μπορεί να λειτουργήσει και από το οποίο παίρνει το νόημά της, το αντλούμε συχνά από την ίδια τη μαθηματική επιστήμη (Vergnaud, 1996, 1997).

Μετά από χρόνια, οι Balacheff και Goldin (2002), συμπλήρωσαν την πρόταση του Vergnaud, προσθέτοντας μια τέταρτη πτυχή στον ορισμό του νοητικού πεδίου το οποίο προσδιόρισαν ως εξής:

- P ένα σύνολο προβληματικών καταστάσεων/προβλημάτων
- R ένα σύνολο πράξεων, σχέσεων και αξιωμάτων
- L ένα αναπαραστασιακό σύστημα

- Σ μία δομή ελέγχου

Στην πραγματικότητα, οι Balacheff και Goldin (2002) επεκτείνουν την έννοια του εννοιολογικού πεδίου του Vergnaud, η οποία περιλαμβάνει τα πρώτα τρία στοιχεία, προκειμένου να εντάξουν σ' αυτά ρητά το Σ , το οποίο δηλώνει αυτό που απαιτείται, προκειμένου να γίνουν από τους μαθητές κρίσεις, επιλογές, και να ληφθούν αποφάσεις κατά τη διαδικασία επίλυσης ενός προβλήματος. Οι Balacheff και Goldin συνδυάζουν το Σ με το θεωρητικό δόμημα των 'θεωρημάτων στη πράξη' (theorems in action) του Vergnaud, δηλαδή τα συμπεράσματα που παράγουν οι μαθητές, τα οποία αφορούν σταθερές μέσα σε μία ομάδα αντικειμένων σχέσεων ή προβλημάτων που συνδέονται μ' αυτά. Η ανοιχτή αυτή θεώρηση ως προς το τι μπορεί να χαρακτηριστεί 'νόημα σε χρήση' (conception in use) διατυπώθηκε αρχικά από το Vergnaud, από μία γνωστική οπτική και επικεντρώθηκε σε μαθηματικές έννοιες περισσότερο, παρά στις γνώσεις των μαθητών. Η προσθήκη των Balacheff και Goldin μετατρέπει τον όρο ώστε να είναι κεντρικά χρήσιμος για την περιγραφή της μαθησιακής διαδικασίας μεν αλλά σε σχέση με μαθηματικές έννοιες.

Οι παραπάνω σημειώσεις αποτελούν μέρη από τα ακόλουθα συγγράμματα:

Κολέζα Ε. (2009). *Θεωρία και Πράξη στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Εκδ. Τόπος.

Κλαουδάτος Ν. *Σημειώσεις Διδακτικής Μαθηματικών*. Μαθηματικό Τμήμα ΕΚΠΑ.

Κυνηγός Χ. (2007). *Το Μάθημα της Διερεύνησης*. Ελληνικά Γράμματα.

Σπύρου, Π. *Σημειώσεις μαθήματος Διδακτική Μαθηματικών Ι*. Μαθηματικό Τμήμα ΕΚΠΑ.

Σημειώματα

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Γιώργος Ψυχάρης 2015. Γιώργος Ψυχάρης. «Διδακτική Μαθηματικών Ι. Γενετική επιστημολογία και Διδακτική των Μαθηματικών». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH307>.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.

Διατήρηση Σημειωμάτων

- Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:
- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

