

## Κεφάλαιο 5ο

### Εισαγωγή στην Θεωρία της Διδασκαλίας

Οι σημειώσεις αφορούν στο μάθημα ‘Διδασκαλία των Μαθηματικών και Λύση Προβλήματος’. Έχουν γραφεί με σκοπό να αναδείξουν συνοπτικά τις κυριότερες συνιστώσες του διδακτικού έργου που έχουν επισημανθεί στην έρευνα μέχρι σήμερα. Στο κείμενο έγινε προσπάθεια να συνδυαστούν δύο αλληλοσυνδεόμενες οπτικές γωνίες, δηλαδή να δούμε το διδακτικό έργο τόσο από την πλευρά του διδάσκοντα όσο και από την πλευρά του ερευνητή. Τέλος, για τον διδάσκοντα χρησιμοποιούμε ισοδύναμα και τους όρους δάσκαλος ή καθηγητής χωρίς καμιά εννοιολογική διαφορά.

#### 1. Εισαγωγή

Η ανάπτυξη της σκέψης απαιτεί την παρουσία μιας κατάστασης που προκαλεί δισταγμό, σύγχυση, αμφιβολία, γενικότερα μια νοητική δυσκολία. Η κατάσταση αυτή, με τη σειρά της, προκαλεί μια ανισορροπία (disequilibrium, κατά τον Piaget) η οποία πρέπει να αποκατασταθεί, επειδή η αναζήτηση της βεβαιότητας είναι μια ψυχολογική δύναμη που καθοδηγεί τη μάθηση.

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι ο όρος **αβεβαιότητα (uncertainty)** αντιπροσωπεύει τους όρους δισταγμός, ασάφεια, σύγχυση, αμφιβολία, νοητική δυσκολία κλπ, τότε διαπιστώνουμε ότι ο όρος αυτός συναντάται τόσο στις επιστήμες π.χ. Φυσική, στα Μαθηματικά, αλλά και στη Μαθηματική Εκπαίδευση. Για παράδειγμα, στη Φυσική υπάρχει η γνωστή αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg (the uncertainty principle of Heisenberg). Στα Μαθηματικά η αβεβαιότητα έχει συνδεθεί με την απώλεια της ‘αντικειμενικής αλήθειας’ που υποτίθεται ότι εξέφραζαν μέχρι την εμφάνιση των μη ευκλείδειων γεωμετριών, βλέπε π.χ. Kline (1980).

Στη μαθηματική εκπαίδευση η αβεβαιότητα συναντάται σχεδόν σε όλες τις εκδοχές της διδασκαλίας και της μάθησης όπως: Αβεβαιότητα ως προς τη διδασκαλία, δηλαδή ο δάσκαλος ποτέ δεν μπορεί να είναι βέβαιος ως προς το τι έχουν κατανοήσει οι μαθητές από το μάθημα σε σχέση με τους στόχους. Αβεβαιότητα ως προς την επιλογή της κατάλληλης διδακτικής προσέγγισης. Αβεβαιότητα ως προς την αξιολόγηση των μαθητών, αβεβαιότητα ως προς το διδακτικό περιεχόμενο, δηλαδή ως προς τις επιλογές του προγράμματος σπουδών και που θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας, αβεβαιότητα ως προς τη θέση και το ρόλο του καθηγητή στην τάξη, αβεβαιότητα ως προς τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να βελτιώσουμε τη διδασκαλία μας, βλέπε π.χ. Floden (1988). Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε την αξιολόγηση, ένα ζήτημα που προκαλεί εντάσεις και αμφισβητήσεις. Ας σκεφτούμε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα και ότι η αξιολόγηση των μαθητών μας στο θέμα αυτό μας δίνει κάποια αποτελέσματα. Πόσο βέβαιοι είμαστε για τα συμπεράσματα τα οποία βασίσαμε στην αξιολόγηση αυτή; Μια αξιολόγηση, π.χ. ένα τεστ, είναι αρκετό; Μια πρώτη αντίδραση θα ήταν να κάνουμε περισσότερα τεστ του ίδιου τύπου. Τότε κατά παράδοξο τρόπο η αβεβαιότητα αντί να λυθεί θα αυξηθεί! Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι δεν γνωρίζουμε την επίδραση της αξιολόγησης στη μαθησιακή διαδικασία ή μήπως την γνωρίζουμε; Ας σκεφτούμε ότι η μάθηση συνεχίζεται κατά τη διάρκεια της αξιολόγησης, ένα γεγονός γνωστό στην έρευνα ιδιαίτερα στις συνεντεύξεις με ένα μαθητή, όπου αναζητούμε να προσδιορίσουμε τη σκέψη του μαθητή μέσα από ερωτήσεις. Από την άλλη μεριά, αν αλλάξουμε το μοντέλο διδασκαλίας μας, είναι πιθανόν να δούμε ότι εκείνοι, που τους είχαμε ‘κατατάξει’ ως

π.χ. μέτριους, τώρα να αναδεικνύουν ικανότητες που δεν αναμέναμε. Οι Streefland & Heuvel-Panhuizen (1999), παρατηρούν ότι όσο πιο εντατικά ερευνούμε την εμφάνιση ενός συγκεκριμένου μαθησιακού φαινομένου τόσο περισσότερο επηρεάζουμε την παρουσία του! Τέλος, η Gerofsky (1996), παρατηρεί ότι η κατάσταση στη διδασκαλία των μαθηματικών, όπου έχουμε επαναληπτικούς κύκλους πρόβλημα – λύση του προβλήματος κατά τους οποίους πρέπει να φθάσουμε γρήγορα στη λύση, δεν επιτρέπει την παρουσία της αμφιβολίας, της προβληματικής κατάστασης, την ανάπτυξη της αβεβαιότητας. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα η διαπραγμάτευση και η επικοινωνία στην τάξη να εκφράζεται με όρους ‘σωστό’ ή ‘λάθος’, κάτι που περιορίζει τους στόχους και την εμβέλεια της διδασκαλίας.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η αβεβαιότητα είναι η αιτία της απαρχής των μαθηματικών συλλογισμών, *μια συνθήκη αναγκαία αλλά όμως όχι και επαρκής*, όπως θα αναφέρουμε και πιο κάτω.

Στις επόμενες παραγράφους θα παρουσιάσουμε τα ακόλουθα ζητήματα:

1. Οι τύποι της αβεβαιότητας κατά τη λύση προβλήματος και η αλληλοσυνδεσή τους.
2. Η αβεβαιότητα στη διδασκαλία των Μαθηματικών και οι τρόποι λύσης-υπέρβασής της. Εδώ θα εξετάσουμε το ζήτημα λαμβάνοντας υπόψη την ‘τριάδα’ των αλληλοσυμπλεκόμενων όρων: αβεβαιότητα, διαπραγμάτευση, δυποκειμενικότητα.
3. Οι στρατηγικές της λύσης προβλήματος και το πώς εντάσσονται στην διδασκαλία.
4. Θα αναπτύξουμε το διδακτικό μοντέλο ‘διδάσκοντας ανάμεσα στα θρανία’. Θεωρούμε το μοντέλο αυτό ως θεμελιακό, επειδή διαπλέκεται συνεχώς με άλλα διδακτικά μοντέλα με πολλούς τρόπους.

## 2. Τύποι αβεβαιότητας και σχέσεις μεταξύ τους

Η Zaslavsky (2005) βλέπει την αβεβαιότητα συνδεδεμένη με τη ‘γνωστική αντιπαράθεση-σύγκρουση’ (cognitive conflict) και κατά συνέπεια με την ανάπτυξη νέας γνώσης. Έτσι λοιπόν χρησιμοποιεί την αβεβαιότητα ως ‘οδηγό’ για την ανάπτυξη προβλημάτων τα οποία στοχεύουν στην γνωστική σύγκρουση. Μέσα από την έρευνα με τέτοιου είδους προβλήματα διαπίστωσε τους ακόλουθους τύπους αλληλοσυνδεδεμένων περιπτώσεων αβεβαιότητας, συνδέοντας ταυτόχρονα τους τύπους αυτούς με μια δυναμική διαδικασία μάθησης:

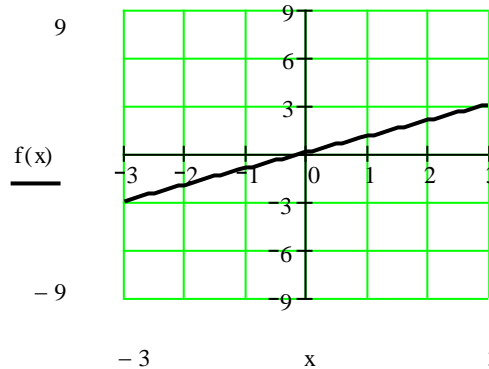
### 1. *Αντιθετικοί-ανταγωνιστικοί ισχυρισμοί (competing claims):*

Εδώ έχουμε δύο ή περισσότερα επιχειρήματα τα οποία μπορούν να αναπτυχθούν από αποτελέσματα, ορισμούς, ‘πιστεύω’, υποθέσεις, a priori προσδοκίες, ισχυρισμούς, που δημιουργούν διαφορετικές οπτικές στο ίδιο θέμα. Για παράδειγμα, βλέπε το πρόβλημα στο σχήμα 1, Zaslavsky (2002). Στον τύπο αυτόν ανήκει και η περίπτωση όπου ο μαθητής έχει μια παρανόηση ή ένα ‘πιστεύω’ που έρχεται σε αντίθεση με ένα αποτέλεσμα.

### 2. *Άγνωστος τρόπος επίλυσης ή αμφίβολο αποτέλεσμα (Unknown path or questionable conclusion)*

Το δεύτερο είδος αβεβαιότητας αντιστοιχεί στην αναζήτηση (inquiry) σε διερευνητικά έργα (exploration tasks) και σε προβλήματα ανοικτού στόχου (open-ended problems). Η φύση της διερεύνησης συνίσταται στην έρευνα για ευρήματα (patterns, διασυνδέσεις, σχέσεις) άγνωστα στον μαθητή, για τα οποία έχει ή όχι διαισθητικές ιδέες ως προς το τι αναμένει. Το είδος αυτό της αβεβαιότητας παρουσιάζεται ιδιαίτερα σε εργασίες με τον υπολογιστή. Η διερεύνηση αυτού του είδους ξεκινά από μια εικασία και, διαμέσου πειραματισμών που σκοπεύουν στον

έλεγχο διαφορών περιπτώσεων της εικασίας, καταλήγει σε (1): Απόρριψη της εικασίας και διατύπωση μιας εναλλακτικής ή (2): Σε ενίσχυση της εικασίας και στην ανάγκη της υποστήριξής της με διευκρινίσεις και απόδειξη. Βλέπε π.χ. το πρόβλημα στο σχήμα 2:



Στο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x)=x$

- Η ευθεία διχοτομεί τη γωνία των αξόνων;
- Η γωνία  $\omega$  προσδιορίζεται από τη σχέση  $\varepsilon\phi(\omega)=1$  ή  $\varepsilon\phi(\omega)=\frac{1}{3}$ ;

Σχήμα 1

### Πρόβλημα

Να ερευνήσετε αν σε δεδομένο τρίγωνο  $AB\Gamma$  υπάρχει σημείο  $\Delta$  μέσα στο τρίγωνο, τέτοιο ώστε να διαιρεί το  $AB\Gamma$  σε τρία τρίγωνα που έχουν το ίδιο εμβαδόν.

- Η απάντηση εξαρτάται από το είδος του τριγώνου; Αν ναι, με ποιον τρόπο;
- Αν υπάρχει τρίγωνο στο οποίο έχουμε ένα σημείο  $\Delta$  με την ιδιότητα αυτή, τότε να ερευνήσετε αν υπάρχουν άλλα σημεία με την ίδια ιδιότητα. Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

Σχήμα 2

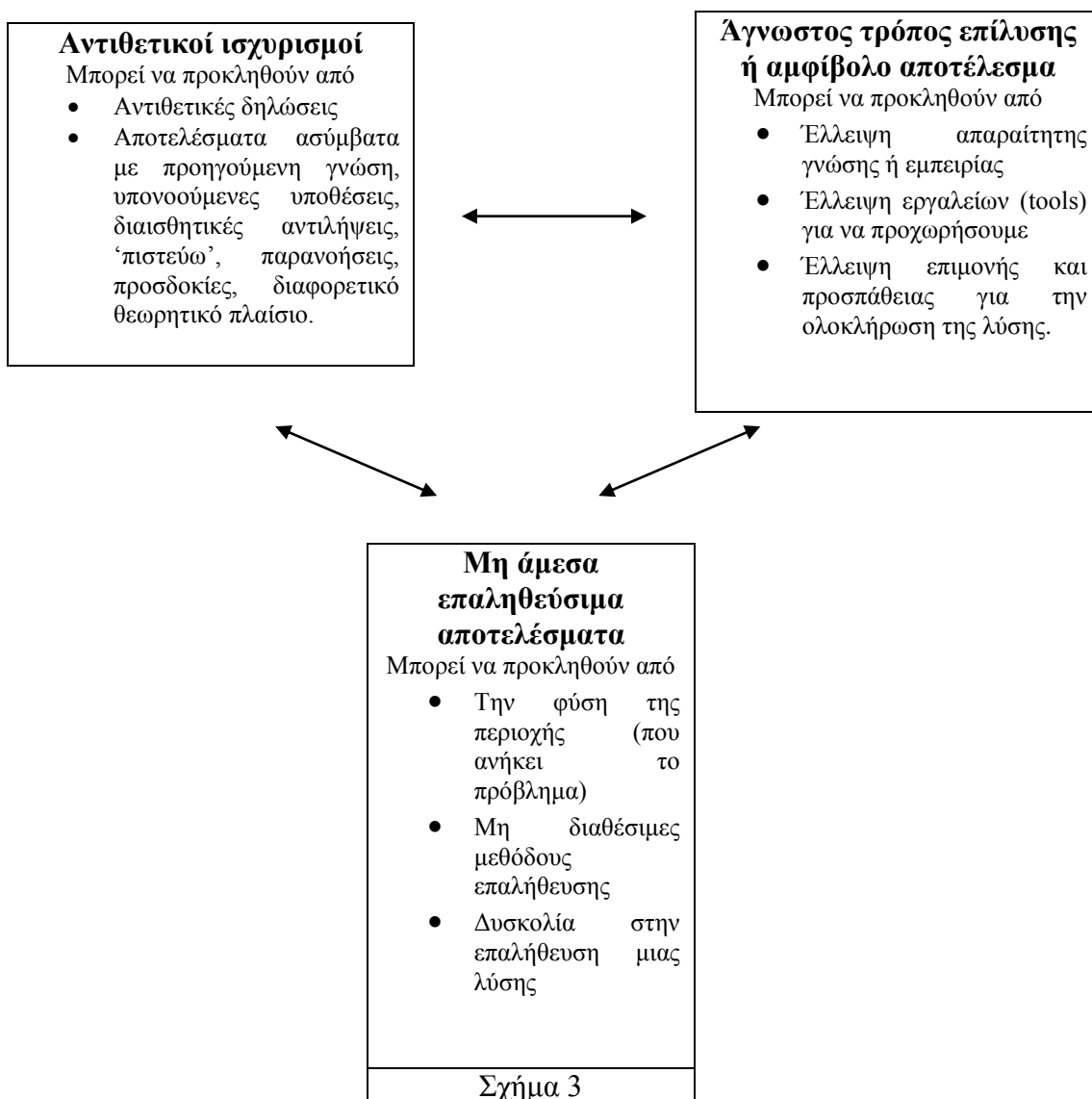
### 3.Μη άμεσα επαληθεύσιμα αποτελέσματα (Non-readily verifiable outcomes)

Εδώ έχουμε να κάνουμε με την έλλειψη εμπιστοσύνης ως προς την εγκυρότητα ή όχι των αποτελεσμάτων στη λύση ενός προβλήματος. Η αβεβαιότητα στην περίπτωση αυτή προκύπτει από την απουσία μεθόδων ελέγχου και επιβεβαίωσης των αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα σε προβλήματα πιθανοτήτων και συνδυαστικής έρευνες δείχνουν ότι οι λύτες έχουν ένα αίσθημα αβεβαιότητας ως προς το αν τα αποτελέσματά τους είναι σωστά ή όχι.

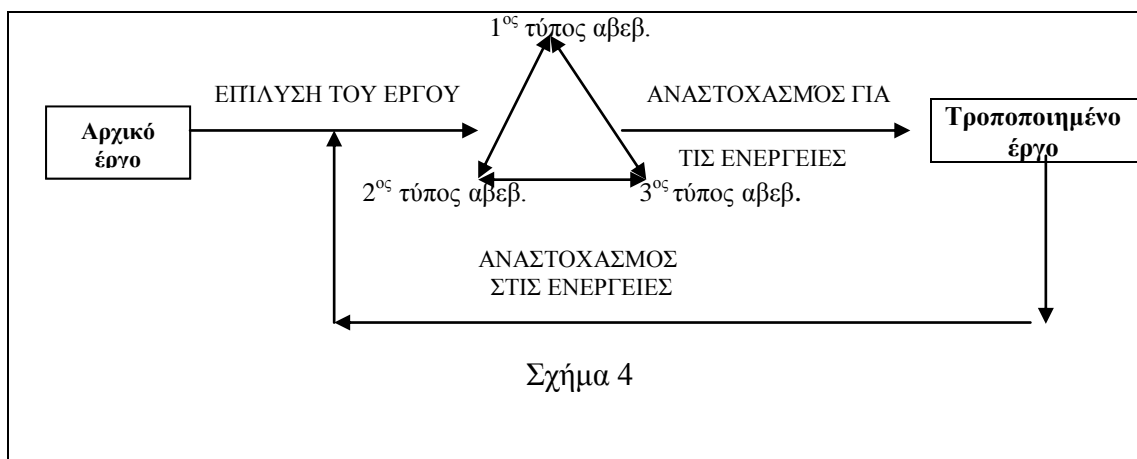
Σημειώνουμε ότι οι τρεις προηγούμενοι τύποι αβεβαιότητας που παρουσιάσαμε συνδέονται μεταξύ τους. Έτσι, π.χ. η αβεβαιότητα ως προς ένα αποτέλεσμα που αφήνει ερωτηματικά (αμφίβολο αποτέλεσμα, 2<sup>ος</sup> τύπος) μπορεί να μετασχηματιστεί σε αβεβαιότητα ως προς την έλλειψη τρόπων επιβεβαίωσης (τρίτος τύπος). Ή μια

αβεβαιότητα 2<sup>ου</sup> τύπου μπορεί να προέρχεται από αντιθετικά επιχειρήματα (1<sup>ος</sup> τύπος).

Βλέπουμε λοιπόν ότι κατά τη διαπραγμάτευση ενός προβλήματος μπορεί να συμβεί 'μετακίνηση' της αβεβαιότητας από έναν τύπο σε άλλον, γεγονός που δείχνει τη δυναμική φύση της αβεβαιότητας, όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα 3 της Zaslavsky (2005, p. 305).



Στο σχήμα 4 παριστάνεται η δυναμική επαναληπτικότητα στο σχεδιασμό του έργου ως αντίδραση στην αβεβαιότητα που αναδύεται κατά την επίλυση ενός προβλήματος, Zaslavsky (2005, p. 316).



### 3. Αβεβαιότητα, διαπραγμάτευση, διποκειμενικότητα (uncertainty, negotiation and intersubjectivity).

Η τάξη είναι ένα σύνθετο σκηνικό όπου κατά την διάρκεια της διδασκαλίας συμβαίνουν συνεχώς μαθησιακές καταστάσεις με διάρκεια μόλις λίγων στιγμών. Μόνον ένας ενημερωμένος δάσκαλος μπορεί να τις παρακολουθήσει και να τις κατανοήσει και από αυτές όχι όλες. Ταυτόχρονα, η κατανόηση των φαινομένων της τάξης προϋποθέτει τη γνώση των αρχών του διδακτικού του μοντέλου, δηλαδή για ποιόν λόγο επέλεξε ο διδάσκων ένα συγκεκριμένο διδακτικό μοντέλο και ποιες είναι οι συνέπειές του, για ποιόν λόγο θα το αλλάξει, ποιους σκοπούς επιδιώκει μέσα από κάθε διδακτική επιλογή. Τις ίδιες δυσκολίες συναντούν όσοι παρακολουθούν μια διδασκαλία. Στην περίπτωση αυτή μάλιστα υπάρχει και η επιπρόσθετη δυσχέρεια ότι θα πρέπει να ερμηνευτούν 'απέξω' οι ενέργειες τόσο του καθηγητή όσο και των μαθητών του στα πλαίσια της συγκεκριμένης κοινότητας, με το συγκεκριμένο θέμα της διδασκαλίας.

Φθάνουμε λοιπόν στην ανάγκη να βρούμε ένα σύστημα 'αποτύπωσης' της πολύ-σύνθετης πραγματικότητας της τάξης, των 'φευγαλέων' στιγμών της διδασκαλίας στις οποίες κερδίζεται ή χάνεται το νόημα, των πολλών 'νημάτων' με τα οποία συνδέονται και αλληλοεπιδρούν ο δάσκαλος με τους μαθητές του αλλά και οι μαθητές μεταξύ τους, τα κίνητρα που δρουν 'κάτω' και έξω από τα επιφανόμενα που παρατηρούμε και οδηγούν τόσο το δάσκαλο όσο και τους μαθητές του σε συγκεκριμένα μοντέλα αλληλεπίδρασης και διαμορφώνουν μια συγκεκριμένη πρακτική στην τάξη.

Στα επόμενα θα βασιστούμε σε πρόσφατη έρευνα που έγινε με σκοπό να αποτυπωθούν τα φαινόμενα της διδασκαλίας και στην οποία πήραν μέρος πολλοί ερευνητές, βλέπε Clarke, (ed), (2001), αλλά και σε άλλες ερευνητικές εργασίες συμβατές με αυτή. Η θεωρία που προκύπτει έχει στοιχεία τόσο από την επικοινωνιακή προσέγγιση (communicational approach) όσο και από την αλληλεπιδραστική (interactionism), ενώ παράλληλα προσπαθεί να οικοδομήσει σχέσεις με την γνωστική θεωρία και ιδιαίτερα με τον ριζοσπαστικό κονστрукτιβισμό.

#### 3.1. Διαπραγμάτευση, διποκειμενικότητα και αβεβαιότητα

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε τους παραπάνω όρους στα πλαίσια της τάξης των Μαθηματικών. Οι όροι αυτοί αλληλοδιαπλέκονται τόσο στο νόημά τους όσο και στα επικοινωνιακά φαινόμενα που περιγράφουν, ώστε είναι αδύνατον να διαχωριστούν. Μόνον για λόγους μεθοδολογικούς θα επικεντρωνόμαστε κάθε φορά

στον πρώτο όρο, στην παράγραφο αυτή στην διαπραγμάτευση, και θα τον εξετάζουμε σε σχέση με τους άλλους δύο.

Προκειμένου να παρουσιαστεί, να συμβεί, η διαπραγμάτευση, στο εξής η Δ, θα πρέπει κάτι να παρουσιαστεί, να συζητηθεί στην τάξη, που να μην μπορεί να λυθεί ή να είναι αβέβαιο.

Η φράση ‘Δ του νόηματος’ χρησιμοποιείται για να περιγράψει τους τρόπους με τους οποίους αναπτύσσεται η μάθηση σε κοινωνικά πλαίσια. Είναι μια κοινωνική διαδικασία που συσχετίζεται με τις πρακτικές των Μαθηματικών στην τάξη και συνδέει την ανάγκη της διαπραγμάτευσης με την παρουσία της αβεβαιότητας. Στην κατάσταση αυτή η διυποκειμενικότητα, στο εξής Δι., θεωρείται ως διαμεσολαβητικός μηχανισμός μέσω της οποίας επιλύεται η αβεβαιότητα, στο εξής Α, και κατασκευάζεται η νέα γνώση. Με άλλα λόγια, επισημαίνουμε εναλλακτικές μορφές Α καθώς και εκείνες τις διαδικασίες όπου συμβαίνει η επίλυση της Α, δηλαδή επισημαίνουμε διαδικασίες όπου η Δι έχει κεντρικό ρόλο. Όταν αναφερόμαστε στην Δι, εννοούμε την αλληλεπίδραση μεταξύ των ατόμων με κάποιον μαθησιακό στόχο, στην προκειμένη περίπτωση μεταξύ των μαθητών. Όλες οι γνώμες είναι καταρχήν ισοδύναμες και η αλληλεπίδραση σημαίνει την ανταλλαγή, ή τη διαπραγμάτευση των γνώμων και των θέσεων, έως ότου υπάρξει συμφωνία ως προς το νόημα του συζητούμενου θέματος, δηλαδή φαίνεται ότι αναπτύσσεται μια αμοιβαία συμφωνία για το νόημα (a mutual or taken-as-shared understanding). Η ερμηνεία της λέξης φαίνεται θα εμπλουτιστεί στο τέλος της παραγράφου 3.3. Πιο συγκεκριμένα, οι διαφορετικές γνώμες προκύπτουν από τη διαφορετική ερμηνευτική ικανότητα του ατόμου μέσα στο συγκεκριμένο κοινωνικό πλαίσιο της μαθητικής κοινότητας, με τους συγκεκριμένους περιορισμούς αλλά και τις δυνατότητες που προσφέρει. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει μια ποικιλία νοημάτων για το ίδιο μαθηματικό αντικείμενο η οποία δημιουργεί ευκαιρίες μάθησης.

Μια σχέση ανάμεσα στην διαπραγμάτευση τη διυποκειμενικότητα και την αβεβαιότητα μπορεί να είναι η ακόλουθη:

*Ένα μονοπάτι προς τη γνώση είναι διαμέσου της επίλυσης της αβεβαιότητας. Η διαδικασία της επίλυσης είναι συχνά διαπραγματευτική. Η διαπραγμάτευση διαμεσολαβείται από τη γλώσσα, η οποία, με τη σειρά της προϋποθέτει τη διυποκειμενικότητα. Το ζητούμενο της διυποκειμενικότητας είναι το νόημα.*

Τέλος, ένα διαπραγματευτικό στιγμιότυπο (negotiative event) ορίζεται από έναν αναγνωρίσιμο σκοπό. Ο σκοπός είναι η πραγματοποίηση ενός ενδιάμεσου στόχου μέσα σε ένα επεισόδιο της δραστηριότητας.

Γενικά, μπορούμε να αναγνωρίσουμε τα ακόλουθα επίπεδα ανάλυσης της διαπραγμάτευσης: Ολόκληρο το μάθημα, τη δραστηριότητα, η οποία μπορεί να είναι μία από πολλές άλλες του μαθήματος, το επεισόδιο και το διαπραγματευτικό στιγμιότυπο. Η αναγνώριση του διαπραγματευτικού στιγμιότυπου ως μονάδας ανάλυσης έχει σημαντικές θεωρητικές συνέπειες, δεδομένου ότι ουσιαστικά είναι μια μονάδα αλληλεπίδρασης. Έτσι, αντί να κάνουμε διαχωρισμό των εκφράσεων των ατόμων που συμμετέχουν στην αλληλεπίδραση, το στιγμιότυπο αναγνωρίζει την αλληλεπίδραση καθαυτή ως το αντικείμενο του ενδιαφέροντός μας, οπότε η ανάλυσή μας μπορεί να εστιαστεί στα χαρακτηριστικά και τη δομή του διαπραγματευτικού στιγμιότυπου.

### **3.2. Διυποκειμενικότητα, αβεβαιότητα και διαπραγμάτευση**

Όπως επισημάναμε στην προηγούμενη παράγραφο, στην ανάπτυξη της γνώσης η Δι εισέρχεται ως διαμεσολαβητικός μηχανισμός ο οποίος είναι ουσιαστικός για τη διαδικασία της διαπραγμάτευσης, όπου επιλύεται-αναιρείται η αβεβαιότητα και

κατασκευάζεται η νέα γνώση. Με αυτή την οπτική η Δι είναι αποτέλεσμα μιας διαπραγματευτικής διαδικασίας αλλά, ταυτόχρονα, και προϋπόθεση για τη διαπραγμάτευση. Πράγματι, προκειμένου να αρχίσει η διαπραγματευτική διαδικασία απαιτείται να έχει εγκατασταθεί ήδη μια αλληλεπίδραση μεταξύ των μαθητών που θα υποστηρίξει τη διαδικασία αυτή. Το αποτέλεσμα της Δ θα είναι μια πιο 'πλούσια' μορφή διυποκειμενικότητας. Το επιχείρημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: Η Δ εξαρτάται από κάποιας μορφής επικοινωνία, συνήθως τη γλώσσα, και η επικοινωνία είναι από τη φύση της διυποκειμενική. Έτσι, προαπαιτείται ένα επίπεδο διυποκειμενικότητας μεταξύ δασκάλου-μαθητή και μαθητή-μαθητή προκειμένου να πραγματοποιηθεί η διαπραγμάτευση.

Κατά τη διαδικασία της αλληλεπίδρασης ή της Δι, οι συμμετέχοντες διαπραγματεύονται τα μαθηματικά τους νοήματα και προσπαθούν να φθάσουν σε μια συμφωνία σχετικά με το ποια αποτελέσματα και ποια επιχειρήματα θα θεωρηθούν ως μαθηματικές λύσεις και κατάλληλες μαθηματικές εξηγήσεις αντίστοιχα (το νόημα του έργου). Κατά τη διαδικασία αυτή ο κάθε μαθητής ρυθμίζει τη δράση του σε συνάρτηση με αυτό που ο ίδιος υποθέτει ότι είναι οι προσδοκίες και οι γνώσεις των άλλων συμμετεχόντων. Παράλληλα, οι αποδέκτες της δράσης την ερμηνεύουν ανάλογα με αυτό που πιστεύουν ότι είναι οι γνώσεις και οι προσδοκίες του υποκειμένου που ενεργεί. Οι ενέργειες των άλλων ερμηνεύονται από τον πρώτο ως προς τις προσδοκίες του και μπορούν να τον οδηγήσουν σε μια αναθεώρηση της δράσης του και των ιδεών του κλπ. Για παράδειγμα, ο μαθητής μπορεί να ερμηνεύσει την αντίδραση του δασκάλου ως αξιολόγηση της σκέψης του παρόλο που η αντίδραση του δασκάλου μπορεί να είναι π.χ. μια έκφραση χαμόγελου σε μια στιγμή που παρατηρεί το μαθητή να ενεργεί, να προσπαθεί δηλαδή να λύσει ένα πρόβλημα. Ο μαθητής τώρα, βλέποντας την αντίδραση του δασκάλου αναπτύσσει διάφορα συναισθήματα, π.χ. θεωρεί ότι η μέθοδος που ακολουθεί είναι λάθος και αλλάζει τον τρόπο επίλυσης ως αντίδραση στην αντίδραση του καθηγητή του. Σε παρόμοια περίπτωση, ένας άλλος μαθητής θα αντιδρούσε προσπαθώντας να ευχαριστήσει το δάσκαλο παρουσιάζοντας κάτι που υποθέτει ότι αναμένει από αυτόν, χωρίς ο μαθητής, ενδεχομένως, να το έχει κατανοήσει. Βλέπε και Voigt (1994) για περισσότερα παραδείγματα.

Η Δι κατανοείται σε συγκεκριμένα πολιτιστικά πλαίσια και ενέργειες και αναγνωρίζεται διαμέσου της ανάλυσης των διαπραγματευτικών στιγμιότυπων. Αν λοιπόν, κατά την ανάλυση ενός διαπραγματευτικού στιγμιότυπου, διαπιστώσουμε ότι οι προτάσεις των συνδιαλεγόμενων είναι ατελείς, δεν είναι σύμφωνες με τη γραμματική και το συντακτικό, οι φράσεις τους είναι σύντομες, συχνά μια λέξη, ο ένας να συμπληρώνει την πρόταση του προηγούμενου του χωρίς να αναφέρεται το αντικείμενο στο οποίο συνδιαλέγονται, τότε μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι υπάρχουν ενδείξεις διυποκειμενικότητας. Και αυτό γιατί η επικοινωνία αυτής της μορφής υποστηρίζεται μόνο επειδή οι συμμετέχοντες στο διάλογο έχουν μια κοινή κατανόηση των αναφορών των προτάσεων ή λέξεων, των ενεργειών ή σχέσεων, χωρίς να χρειάζεται να εκφραστούν ρητά αλλά υπονοούνται και υποστηρίζονται, ενδεχομένως, και από άλλες μορφές επικοινωνίας π.χ. χειρονομίες.

### 3.3. Το νόημα

Προϋπόθεση του νοήματος είναι η κοινότητα, ο σκοπός και η κατάσταση που βρίσκεται υπό διαπραγμάτευση. Είναι άσκοπο να συζητάμε για το νόημα μιας λέξης ή ενός όρου ξεχωριστά από την κοινότητα στην οποία ανήκει ο ομιλών, από τον σκοπό του ή από την συγκεκριμένη κατάσταση. Δεν είναι η λέξη που έχει νόημα αλλά ολόκληρη η έκφραση ή η πρόταση. Σύμφωνα με τον Wittgenstein, βλέπε π.χ.

Sierpinska (1994), η γλώσσα θεωρείται περισσότερο ως μια δραστηριότητα, μια κοινωνική πρακτική, όπου τα νοήματα των φράσεων χαρακτηρίζονται από τη χρήση αυτών των φράσεων. Στην καθημερινή γλώσσα δεν αποδίδουμε νοήματα στις φράσεις με βάση ακριβείς κανόνες, αυτό συμβαίνει μόνον στα μαθηματικά όπου το νόημα των όρων διαμορφώνεται από ένα σύνολο κριτηρίων. Οι ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης προσελκύστηκαν από αυτή τη θέση του Wittgenstein, όχι γιατί είχαν ξεχάσει ότι στα Μαθηματικά οι όροι έχουν ακριβείς ορισμούς αλλά γιατί είχαν υπόψη τους ότι η γλώσσα στην τάξη δεν είναι η τυπική γλώσσα που συναντάμε στα βιβλία ή στα ερευνητικά papers. Η γλώσσα της τάξης έχει πολύ σύνθετη δομή. Το πλαίσιο (context) στο οποίο οι μαθητές μαθαίνουν μαθηματικά είναι πολυδιάστατο, όπου τα νοήματα καθορίζονται όχι μόνον από τις γραπτές λέξεις του βιβλίου ή από τις εκφράσεις του δασκάλου. Το νόημα ενός προβλήματος, για παράδειγμα, εξαρτάται από τους ρόλους που οι μαθητές και ο δάσκαλος αποδίδουν στους εαυτούς τους σε μια δεδομένη κατάσταση. Θα είναι διαφορετικό, αν το πρόβλημα διατυπωθεί από έναν μαθητή, και διαφορετικό, αν διατυπωθεί από το δάσκαλο. Το νόημα εξαρτάται επίσης από την πρόθεση του δασκάλου: Αν δηλαδή με αυτό ο δάσκαλος σκοπεύει στην εισαγωγή ενός νέου θέματος, όπου επιτρέπονται και διαφορετικές προσεγγίσεις, και διαφορετικό, αν με το πρόβλημα αυτό ο δάσκαλος σκοπεύει στην αξιολόγηση των μαθητών. Καθεμιά από τις περιπτώσεις αυτές ορίζει ένα διαφορετικό 'διδασκτικό συμβόλαιο'.

Η κοινωνική κατάσταση αλλάζει το νόημα των μαθηματικών όρων γιατί φέρνει την γλώσσα της τάξης κοντά στην καθημερινή γλώσσα αλλά όχι με σαφή τρόπο. Έχουμε την γλώσσα των μαθηματικών τύπων και σχέσεων αλλά και την γλώσσα με την οποία μιλάμε για τους τύπους ή τις σχέσεις. Την γλώσσα με την οποία αξιολογούμε τους μαθητές αλλά και την γλώσσα των μαθηματικών συλλογισμών: Ο μαθητής διατυπώνει ένα μη αληθές συμπέρασμα και ο δάσκαλος του λέει 'λάθος', σαν να ήταν ο δικαστής και ο μαθητής ο κατηγορούμενος. Δηλαδή εδώ έχουμε μια μετατόπιση του νοήματος όπου τα Μαθηματικά μετασχηματίζονται σε ένα είδος 'νομικού πλαισίου' αντί για μια γνώση που προκύπτει από τη συζήτηση. Στο πλαίσιο αυτό, το οποίο καθορίζεται από το 'ο καθηγητής διδάσκει και ο μαθητής μαθαίνει', οι μαθηματικοί όροι μπορεί να αποκτήσουν μια συναισθηματική φόρτιση που μπορεί να αποτελέσει πηγή ανησυχίας για μερικούς ευαίσθητους μαθητές.

Πιο γενικά, οι διαφορετικές γλώσσες της τάξης των Μαθηματικών έχουν κανόνες και λογική που δεν είναι σαφείς, με αποτέλεσμα ο μαθητής πρέπει να μάθει να 'κινείται' με επιτυχία ανάμεσα σε ασαφή όρια, να αναγνωρίζει 'σημάδια'- σημεία που να τον προειδοποιούν ποια γλώσσα χρησιμοποιούμε μια συγκεκριμένη στιγμή. Και τα 'σημάδια' αυτά επίσης είναι ασαφή, μη διαφανή. Μπορεί να βρεθούν στον τόνο της φωνής του δασκάλου και στις χειρονομίες του αλλά και σε άλλες πηγές. Συνεχείς αποτυχίες στην αναγνώριση τέτοιων σημείων είναι επίσης πηγή ανησυχίας, έλλειψης αυτοπεποίθησης και, τέλος, σχολικής αποτυχίας.

Ταυτόχρονα με τα νοήματα που προκαλούνται από το κοινωνικό πλαίσιο, από τους συναισθηματικούς παράγοντες και τη γλώσσα (για την ακρίβεια τις γλώσσες της τάξης), οι μαθηματικοί όροι έχουν ένα περιγραφικό νόημα. Έτσι, σε κάποιο επίπεδο της εκπαίδευσης τα νοήματα δίνονται με σαφή τρόπο από τους ορισμούς. Αλλά ακόμα και τότε τα νοήματα δεν μαθαίνονται με αυτό τον τρόπο. Οι μαθητές θα κατανοήσουν τις λεπτές υποθέσεις του ορισμού μόνο αν συμμετάσχουν στην *πρακτική της τάξης*, δηλαδή στην συζήτηση, στην χρήση των όρων, στην διατύπωση ερωτήσεων, στην λύση προβλημάτων. Μερικές φορές η χρήση των όρων μπορεί να μεταφέρει νοήματα που δεν περιέχονται στους ορισμούς. Αυτά τα νοήματα



παράγονται κατά τη διαδικασία της ‘μεταφοράς’ τους από τη συνήθη γλώσσα στην επιστημονική και επεμβαίνουν στην κατανόηση του νοήματος.

Γενικότερα, το φαινόμενο της επέμβασης έξω-μαθηματικών στοιχείων στους ορισμούς των εννοιών έχει μελετηθεί από τον Vinner (1991). Πιο συγκεκριμένα, πριν από την εισαγωγή μιας έννοιας διαμέσου του ορισμού, η ‘εικόνα της έννοιας’ (concept image, CI) που έχουν οι μαθητές είτε είναι κενή είτε έχει κάποιες συγκεκριμένες ιδέες για το τι περίπου είναι η έννοια αυτή. Με την εισαγωγή του ορισμού αναπτύσσεται μια πλήρης εικόνα η οποία περιπτώσιακά περιέχει και στοιχεία από τις προηγούμενες αντιλήψεις. Γιαντό το λόγο η διαδικασία ‘ορισμός της έννοιας (concept definition, CD) – διαμόρφωση της εικόνας’, που αναμένεται από το δάσκαλο, σπάνια συμβαίνει. Η αντίδραση του μαθητή στα προβλήματα είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης ανάμεσα στην CI και τον CD της έννοιας. Αυτό σημαίνει ότι ο μαθητής δεν μαθαίνει τις έννοιες όπως ο μαθηματικός, δηλαδή δεν κατανοεί τις έννοιες και τα σύμβολά τους με τρόπο σαφή, με τρόπο που δεν δημιουργεί αμφιβολία, αβεβαιότητα. Για το λόγο αυτό, τα νοήματα των εννοιών αποτελούν ζήτημα διαπραγμάτευσης στην τάξη.

Βλέπουμε λοιπόν ότι η αβεβαιότητα είναι ουσιαστικό στοιχείο της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Η αβεβαιότητα δημιουργεί διαφορετικές οπτικές στους μαθητές που, συνήθως, είναι διαφορετικές από αυτή του καθηγητή. Τότε είναι απαραίτητη η διαπραγμάτευση των νοημάτων, δηλαδή η διαπραγμάτευση είναι μια απαραίτητη συνθήκη για τη μάθηση, επειδή το γνωστικό υπόβαθρο των μαθητών είναι διαφορετικό από τη γνώση που ο δάσκαλος θέλει να διδάξει. Γενικότερα, φαίνεται ότι οι μαθητές συμμετέχουν στην διαπραγμάτευση με πολλά νοήματα. Δηλαδή, εκτός του μαθηματικού νοήματος που αναφέρεται στο έργο, διαμορφώνονται και άλλα που έχουν σχέση με τους μαθηματικούς όρους, με τις προθέσεις του δασκάλου, με την κοινότητα κτλ. Προσοχή: Η διαπραγμάτευση των νοημάτων στην τάξη ποτέ δεν εξασφαλίζει ότι όλοι οι μαθητές θα κατασκευάσουν ακριβώς το ίδιο νόημα και μεταξύ τους και με τον καθηγητή τους. Ποτέ δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι για τα κενά ή τις παρανοήσεις στις γνώσεις που έχει κάποιος. Άρα, κατά τη διαδικασία της διαπραγμάτευσης παράγονται νοήματα που φαίνεται να συμμερίζονται όλοι (taken to be shared). Τα νοήματα αυτά επιτρέπουν στον καθηγητή και στους μαθητές του να αλληλεπιδρούν και να ερμηνεύουν ένα μαθηματικό θέμα με τον ίδιο τρόπο και να αποφεύγουν τις αντιπαραθέσεις.

### 3.4. Αναγνώριση και επίλυση της αβεβαιότητας στην τάξη

Στα επιχειρήματα που αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους, η αβεβαιότητα δημιουργεί τις συνθήκες που προκαλούν την αρχή της μαθησιακής διαδικασίας. Η Α περιγράφει μια κατάσταση συμπεριφοράς, κοινωνικά παρακινούμενη αλλά γνωστικά προσλαμβανόμενη. Παραδείγματα Α στην τάξη μπορούν να είναι: Ένας μαθητής έχει,

- Α ως προς ένα γεγονός ή έναν όρο.
- Α ως προς τη σωστή μορφή μιας ενέργειας ή μιας διαδικασίας.
- Α ως προς το νόημα ενός όρου ή μιας ενέργειας.
- Α ως προς τη μορφή μιας αναπαράστασης.
- Α ως προς τη γνώμη ενός άλλου μαθητή, ως προς την κατανόησή του για ένα θέμα, ως προς τη μέθοδο που ακολουθεί ή το αποτέλεσμα που βρήκε.

Η αβεβαιότητα δεν είναι άγνοια με μια απόλυτη έννοια. Προκειμένου ο μαθητής να αισθανθεί Α, πρέπει να έχει κάποια γνώση για το τι ή το ποιο αισθάνεται αβέβαιος. Το γεγονός αυτό τοποθετεί τον μαθητή στα *σύνορα της γνώσης του*. Αν δούμε έτσι την Α, τότε αυτή μπορεί να αποτελεί μια προαπαιτούμενη συνθήκη για τη λειτουργία της ZPD. Είναι προφανές ότι η πιο πάνω αναφορά στα παραδείγματα που προκαλούν

την  $A$  δεν εξαντλεί όλες τις πιθανές καταστάσεις που παρουσιάζονται στην τάξη. Από την άλλη μεριά, τα παραδείγματα αυτά μας δίνουν επαρκείς ενδείξεις ώστε να υποστηρίξουμε τη συσχέτιση που έχουμε διατυπώσει στην παράγραφο 3.1 ως προς τη σύνδεση της αβεβαιότητας με τη διαπραγματεύση, τη διυποκειμενικότητα και την κατασκευή του νοήματος.

Η αναγνώριση της  $A$  ως κατάστασης που πρέπει να λυθεί, βασίζεται στο ενδιαφέρον του μαθητή για το ζήτημα που διαπραγματεύεται. Όμως, ένας μαθητής μπορεί να αναγνωρίσει την αβεβαιότητα που υπάρχει σε ένα ζήτημα, αλλά να επιλέξει να την αποδεχθεί και να μην επιδιώξει την επίλυσή της. Από την άποψη αυτή η αβεβαιότητα μόνη της είναι αναγκαία συνθήκη αλλά όχι και επαρκής για την αρχή της μαθησιακής διαδικασίας. Παρόλα αυτά, η πίεση για την επίλυση της  $A$ , που προκύπτει από την πρακτική της τάξης, επιβάλλει, κατά κάποιον τρόπο και στις περισσότερες περιπτώσεις, στον μαθητή να κάνει τις αναγκαίες κοινωνικές και γνωστικές διαδικασίες προκειμένου να άρει-να επιλύσει την αβεβαιότητα.

Η επίλυση (resolution) της αβεβαιότητας γίνεται με την αναφορά, ή την επίκληση, σε παράγοντες όπως:

- Σε εμπειρικά δεδομένα
- Στη γνώμη κάποιου άλλου, μαθητή ή καθηγητή.
- Στο διδακτικό βιβλίο ή σε άλλο.
- Σε προηγούμενες εμπειρίες.
- Σε λογικά επιχειρήματα.

Θεωρητικά, κάθε περίπτωση αβεβαιότητας μπορεί να λυθεί με έναν ή με συνδυασμό από τους πιο πάνω τρόπους. Το σημαντικό που θα πρέπει να τονίσουμε εδώ είναι ότι *καθένας από τους τρόπους επίλυσης της  $A$  οδηγεί σε διαφορετικό είδος γνώσης*. Για παράδειγμα, ο μαθητής που επιλύει μian αβεβαιότητα με επίκληση στη γνώμη του δασκάλου ή ενός συμμαθητή του, έχει διαφορετική γνώση από αυτόν που την επιλύει με αναφορά στο βιβλίο και διαφορετική από εκείνον που επιλύει την αβεβαιότητα με λογικά επιχειρήματα. Η διαφορές που προκύπτουν από τους διαφορετικούς τρόπους επίλυσης μιας  $A$  μπορεί να είναι πολύ βαθιές και απαιτούν ιδιαίτερη προσοχή από τον διδάσκοντα. Δηλαδή, θα πρέπει ο διδάσκων να είναι έτοιμος να αναγνωρίσει τον τρόπο με τον οποίο ένας μαθητής αποφασίζει ότι η επίλυση έχει πραγματοποιηθεί. Χρησιμοποίησε εμπειρικά δεδομένα; Δηλαδή έκανε μετρήσεις, συγκρίσεις, πειραματίστηκε με κάποιον τρόπο, ιδιαίτερα όταν εργάζεται στον  $H/Y$ ; Αυτό μπορεί να σημαίνει ότι ανέπτυξε μια εικασία αλλά την εικασία αυτή την θεώρησε ενδεχομένως ως αληθή, χωρίς έλεγχο. Αν ο μαθητής βασίστηκε σε προηγούμενες εμπειρίες, αυτό μπορεί να σημαίνει ότι 'μετέφερε' γνώση και εμπειρία από την λύση προβλημάτων σε προηγούμενα μαθήματα. Είναι σωστό αυτό; Προφανώς, η επίλυση της  $A$  με λογικά επιχειρήματα είναι ο σκοπός της διδασκαλίας των Μαθηματικών, ανάλογα και με το σχολικό επίπεδο των μαθητών μας.

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις για την επίλυση της  $A$ , απαιτούν από τον διδάσκοντα να έχει αναπτύξει ένα σύνολο στρατηγικών επίλυσης της αβεβαιότητας, που θα επιτρέπουν την κατασκευή του νοήματος.

Στην καθημερινή διδακτική πρακτική η  $A$ , όταν δημιουργείται από ένα μαθηματικό έργο, συνήθως δεν φαίνεται επειδή 'συμπιέζεται' με διάφορους τρόπους. Όταν όμως γίνεται αντικείμενο διαπραγματεύσης συνήθως επιλύεται μέσα στη διδακτική ώρα. Απομένει προς διερεύνηση η 'τροχιά' που κάνει η  $A$  σε σύνθετα θέματα όπου η επίλυση της  $A$  απαιτεί χρονική διάρκεια, και επομένως, περισσότερα του ενός μαθήματα. Η Zaslavsky μας δίνει κάποια ιδέα για την τροχιά της  $A$  αλλά αναφέρεται σε ερευνητικές εργασίες και όχι σε 'τρέχοντα' θέματα της καθημερινής διδασκαλίας. Σε κάθε περίπτωση όμως η άποψη της Zaslavsky είναι χρήσιμη.

#### 4. Η πρακτική της τάξης (classroom practice)

Έχουμε συνηθίσει να μιλάμε για τη διδασκαλία και τη μάθηση σαν να είναι δύο διακριτές δραστηριότητες που έχουν ως κοινό πλαίσιο το περιβάλλον της τάξης των Μαθηματικών. Σύμφωνα με τον Clarke (2003), ο διαχωρισμός αυτός είναι ατυχής δεδομένου ότι υπάρχει μια αμοιβαιότητα-ενότητα των δύο όρων και θα πρέπει να αντιμετωπιστούν ως συνιστώσες ενός σώματος κοινωνικά εγκατεστημένης πρακτικής. Για να διευκρινίσουμε πιο πολύ τον όρο 'πρακτική της τάξης' θα πρέπει να κατανοήσουμε ότι οι μέθοδοι διδασκαλίας δεν είναι μόνο εργαλεία ανάπτυξης δεξιοτήτων, είναι και πρακτικές με τις οποίες οι μαθητές μαθαίνουν, ή όχι, να συμμετέχουν στην διαπραγμάτευση του νοήματος. *Αλλά η συμμετοχή στην διαπραγμάτευση και επαναδιαπραγμάτευση του νοήματος δεν είναι το μέσον με το οποίο επιτυγχάνεται η μάθηση, είναι η ίδια η μάθηση.* Επομένως, τα μοντέλα συμμετοχής αποκτούν μεγάλη σημασία ως εγκατεστημένες μορφές πρακτικής. Θα μπορούσαμε να υποστηρίξουμε ότι σε διαφορετικές πρακτικές αντιστοιχούν διαφορετικά είδη γνώσης που αντιστοιχούν στις διαφορετικές περιπτώσεις επίλυσης της αβεβαιότητας. Στο εξής όταν αναφερόμαστε στην πρακτική της τάξης θα εννοούμε αυτό που 'παραδοσιακά' αναφέρουμε ως 'διδασκαλία και μάθηση'.

Όμως, ένα ζήτημα που απασχολεί τόσο τους ερευνητές όσο και τους δασκάλους είναι το γεγονός ότι μέσα στο ίδιο περιβάλλον, με τον ίδιο διδάσκοντα, στην ίδια δραστηριότητα και σε ενέργειες που είναι κοινές, αναπτύσσονται τόσο διαφορετικές αντιλήψεις και νοήματα. Γιατί συμβαίνει αυτό;

Μια προσέγγιση στο ζήτημα αυτό είναι ότι οι συμμετέχοντες στην διαπραγμάτευση συνδιαλέγονται από διαφορετική αφετηρία. Πιο συγκεκριμένα, ο καθένας έχει διαφορετικό υπόβαθρο γνώσεων, ικανοτήτων, κλίσεων, κινήτρων και συστήματος αξιών, και με βάση αυτά τα χαρακτηριστικά τοποθετείται ως προς τους στόχους και τις προθέσεις των άλλων, δηλαδή συμμετέχει στην διαπραγμάτευση του νοήματος. Ταυτόχρονα, υπάρχει και η θέση του μέσα στην μαθητική κοινότητα, όπως προσδιορίζεται από τον τρόπο που συμμετέχει στην πρακτική της τάξης. Για παράδειγμα, ο δάσκαλος έχει χαρακτηρίσει ένα μαθητή ως 'αδύνατο'. Έστω και αν αυτό δεν ανακοινώνεται στην τάξη, έστω και αν ο ίδιος ο μαθητής, τυπικά, δεν το γνωρίζει, μπορεί ο τρόπος που ο δάσκαλος τον αντιμετωπίζει, ασυνείδητα, να μεταδώσει το μήνυμα τόσο στον μαθητή όσο και στους υπόλοιπους. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι συνιστώσες της συμμετοχής αποτελούνται όχι μόνο από κοινωνικά διαμορφωμένα χαρακτηριστικά, π.χ. η θέση στην κοινότητα ή οι ρόλοι του δασκάλου και του μαθητή, αλλά και από τις προσωπικές ιδιαιτερότητες. Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι τα διαφορετικά νοήματα που θα πρέπει να 'ευθυγραμμισθούν' διαμέσου της διαπραγμάτευσης. Αλλά το αποτέλεσμα της διαπραγμάτευσης δεν είναι μόνον το νόημα. Στις περισσότερες των περιπτώσεων *οι μαθητές διαπραγματεύονται και τη θέση τους μέσα στην κοινότητα*, ιδιαίτερα στην περίπτωση όπου ένας μαθητής αρνείται τη θέση που του έχει αποδοθεί π.χ. ως αδύνατος.

Με άλλα λόγια, ενώ υποστηρίζουμε τη σημασία του κοινωνικού πλαισίου, ταυτόχρονα θα πρέπει να αναγνωρίσουμε και τις υποκειμενικότητες των ατόμων όταν αυτοί ενεργούν μέσα στην κοινότητα. Το συμπέρασμα αυτό μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Η απαίτηση για αυτονομία είναι κοινωνικά περιορισμένη, ενώ η ατομική συμμετοχή στην κοινή δραστηριότητα διαμεσολαβείται από τις προσωπικές κλίσεις, τάσεις και ικανότητες. Η θέση αυτή διαφωτίζει περισσότερο τη γνωστή φράση του Vygotsky ότι 'το τελικό αποτέλεσμα της συνεργασίας μεταξύ μαθητών ή μεταξύ καθηγητή-μαθητή, είναι μια λύση (μια απάντηση), η οποία εσωτερικεύεται γίνεται μέρος της συλλογιστικής του μαθητή'. Δηλαδή η μάθηση αναπτύσσεται από τη

συμμετοχή στην, κοινωνικά κατασκευαζόμενη, πρακτική της τάξης, αλλά γίνεται κατανοητή από την ερμηνεία που δίνουν τα άτομα στην πρακτική αυτή.

Βλέπουμε λοιπόν ότι κάθε αναφορά στις κοινωνικές απαρχές της μάθησης καθιστά αναπόφευκτη την αναφορά στη μάθηση ως γνωστικώς κατασκευαζόμενη και αντίστροφα. Το γεγονός αυτό καθιστά συμπληρωματικές τις θεωρίες του Piaget και του Vygotsky. Η συμπληρωματικότητα των θεωριών έχει αναγνωριστεί από πολλούς ερευνητές, βλέπε π.χ. Clarke (2001, 2003), Sfard (2001), Lerman (2001), ο τελευταίος με κάποιες επιφυλάξεις. Από την άλλη μεριά, υπάρχουν ερευνητές που δεν συμερίζονται τη γνώμη αυτή, π.χ. Even & Schwarz (2003).

#### 4.1 Δάσκαλος, μαθητές και η πρακτική της τάξης

Όταν αναφερόμαστε στον διδάσκοντα η προσοχή μας εστιάζεται στην αποτελεσματικότητα των ενεργειών του μέσα στο συγκεκριμένο πλαίσιο της μαθητικής κοινότητας, με τις δυνατότητες και τους περιορισμούς που περιέχονται στο περιβάλλον αυτό, σε μια συγκεκριμένη διδασκαλία ενός μαθηματικού θέματος.

Η ανάλυση που προηγήθηκε στο κείμενο μέχρι τώρα, έδειξε με συγκεκριμένο τρόπο την συνθετότητα της διδασκαλίας και τα φαινόμενα που συμβαίνουν στην τάξη, όπου η αβεβαιότητα, η διαπραγμάτευση και η διυποκειμενικότητα έχουν τον κύριο ρόλο. Αλλά το θέμα δεν έχει εξαντληθεί ακόμα, το αντίθετο μάλιστα.

Σύμφωνα με τον Baird (2001), οι απαρχές της μάθησης βρίσκονται στην άγνοια (ignorance), δηλαδή να μην γνωρίζεις ή να μην μπορείς να κάνεις κάτι. Αλλά υπάρχει μεγάλη διαφορά ανάμεσα στο να έχεις συνείδηση ότι κάτι δεν το γνωρίζεις από το να έχεις μια μη συνειδητή άγνοια (δηλαδή παρατηρούμε εδώ ότι ενώ οι όροι αβεβαιότητα και άγνοια εννοιολογικά είναι διαφορετικοί, ο ρόλος τους στην μάθηση παρουσιάζεται να είναι ο ίδιος). Στην πρώτη περίπτωση έχουμε κατακτήσει ένα επίπεδο *μεταγνωστικής συνείδησης*, μια συνθήκη αναγκαία για τον *μεταγνωστικό έλεγχο* της μαθησιακής διαδικασίας. Αν συνθήκη αυτή πληρούται τότε στη διαδικασία της μάθησης συμμετέχουν οι *αντιλήψεις (perceptions)*, τα *κίνητρα (motivations)*, οι *στάσεις (attitudes)* και τα *συναίσθηματα (emotions)*. Οι (γνωστικές) αντιλήψεις και τα αντίστοιχα συναίσθηματα καθορίζουν το βαθμό που ο μαθητής είναι θετικά τοποθετημένος σε αυτό που καλείται να κάνει, αν δηλαδή βλέπει το έργο ως μια *πρόκληση (challenge)*. Η φύση της πρόκλησης και των συνακόλουθων συναισθηματικών στοιχείων θα καθορίσει το βαθμό με τον οποίο ο μαθητής είναι θετικά διατεθειμένος ως προς το έργο ή όχι. Ουσιαστικά, ο όρος 'πρόκληση' αναφέρεται τόσο στις γνωστικές απαιτήσεις του έργου όσο και σε συναισθηματικά στοιχεία όπως το ενδιαφέρον και το κίνητρο. Αν το ενδιαφέρον και το κίνητρο είναι υψηλά, οι γνωστικές απαιτήσεις θα αντιμετωπιστούν θετικά και ο μαθητής θα εμπλακεί ενεργητικά με το έργο αναπτύσσοντας αξιόλογους μαθησιακούς στόχους. Η διαδικασίες αυτές περιέχουν την *μεταγνωστική (metacognition)* και τη *θέληση (volition)*.

Πιο συγκεκριμένα, ο Baird θεωρεί ότι ο όρος 'Μεταγνωστική' περιέχει τις ακόλουθες τρεις συνιστώσες:

1. *Μεταγνωστική γνώση*, δηλαδή γνώση για τη φύση της μάθησης, για το ποιες είναι οι αποτελεσματικές μαθησιακές στρατηγικές και για τα προσωπικά χαρακτηριστικά που μετέχουν στη μαθησιακή διαδικασία.
2. *Μεταγνωστική συνειδητότητα*, δηλαδή το να έχεις συνείδηση κάθε στιγμή το τι κάνεις και γιατί, για ποιο σκοπό.
3. *Μεταγνωστικός έλεγχος*, δηλαδή να παίρνεις αποδοτικές αποφάσεις για την προσέγγιση, την πρόοδο και τα αποτελέσματα ενός έργου.

Ο όρος 'θέληση' υποδηλώνει τη δύναμη της επιθυμίας και δίνει μια αίσθηση της προσπάθειας για την οποία ο μαθητής είναι διατεθειμένος να κάνει. Η θέληση διακρίνεται από το κίνητρο με βάση τη χρονική στιγμή (timing) κατά την οποία ο μαθητής παίρνει αποφάσεις ως προς τους μαθησιακούς στόχους. Ενώ το κίνητρο επιδρά στη φύση των αποφάσεων που λαμβάνει ο μαθητής για το έργο, άρα προηγείται των αποφάσεων, η θέληση περιέχει και έναν 'κατασταλτικό' ρόλο ως προς συναισθήματα που είναι αντίθετα με την εκτέλεση του έργου καθώς και αντιστάσεις σε κάθε είδους διάσπασης της προσοχής μας.

Προκειμένου, τώρα να κρίνουμε την ποιότητα μιας διδασκαλίας είναι απαραίτητο να έχουμε μια, καλή, ιδέα για τους ακόλουθους παράγοντες οι οποίοι αφορούν στον δάσκαλο: *Οι αξίες και τα 'πιστεύω' του ως προς τα Μαθηματικά και τους τρόπος που μαθαίνουν οι μαθητές του. Τις προθέσεις και τους σκοπούς του, τη συμπεριφορά του στην τάξη και τις διδακτικές μεθόδους που επιλέγει προκειμένου να αναπτύξει τη γνώση στους μαθητές του.*

Κατά τον Baird η αυτοδιόρθωση είναι ένα μέσον βελτίωσης της διδασκαλίας, η οποία αυτοδιόρθωση, καθοδηγείται από τον αναστοχασμό (reflection) πάνω στις διδακτικές ενέργειες. Η αυτοδιόρθωση γίνεται φανερή από τον σταδιακά αυξανόμενο μεταγνωστικό και θεληματικό έλεγχο στην προσωπική πρακτική. Το φαινόμενο αυτό μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα βασικό στοιχείο της 'καλής' διδασκαλίας. Αντίθετα, 'αντιπαραγωγικές' στιγμές της διδασκαλίας, εκτός άλλων, είναι οι περιπτώσεις όπου ο δάσκαλος δεν ακούει τους μαθητές του ή δεν σκέφτεται αρκετά αυτά που του λένε. Στις περιπτώσεις αυτές ο ρόλος του καθηγητή κινδυνεύει να εκφυλιστεί σε διαχειριστικό έλεγχο πάνω στην πρακτική της τάξης. Ο κίνδυνος αυτός προκύπτει από το γεγονός ότι ο δάσκαλος είναι προσανατολισμένος περισσότερο στο 'να στείλει το μήνυμα', γι'αυτό έχει την τάση να μην ακούει επαρκώς αυτά που του λένε οι μαθητές του.

Από την άλλη μεριά η ικανότητα των μαθητών να λύνουν προβλήματα, δηλαδή να χειρίζονται επιτυχώς τα μαθηματικά έργα εξαρτάται, κατά τους Holton & Thomas (2001), από την ανάπτυξη της μεταγνωστικής, δηλαδή από την δυνατότητα να παίρνουν αποστάσεις από τις ενέργειές τους προκειμένου να τις κρίνουν σε σχέση με τους στόχους τους. Με τη σειρά της, η ικανότητα αυτή είναι στενά συνδεδεμένη με την ανάπτυξη μιας σκαλωσιάς (scaffolding), δηλαδή ενός πλαισίου μέσα από το οποίο οι μαθητές είναι δυνατόν να κατασκευάσουν τη γνώση και να συνειδητοποιήσουν γιατί, ενδεχομένως, δεν μπορούν να το κάνουν μόνοι τους. Πιο συγκεκριμένα, ο όρος scaffolding αναφέρεται στην καθοδήγηση και στην αλληλεπιδραστική υποστήριξη που παρέχεται στον μαθητή από τον διδάσκοντα ή τους συμμαθητές του μέσα στα όρια της ZPD. Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους το πλαίσιο αυτό (scaffolding) μπορεί να αναπτυχθεί. Για παράδειγμα, κατά τη διάρκεια λύσης ενός προβλήματος στην τάξη το πλαίσιο αυτό μπορεί να δημιουργηθεί από μια σειρά ανοικτών ερωτήσεων που αναγκάζουν τον μαθητή να σκεφτεί για το πρόβλημα ή την δραστηριότητα, όπως:

- Ποιες είναι οι σημαντικές ιδέες εδώ;
- Μπορείς να περιγράψεις το πρόβλημα με τον δικό σου τρόπο;
- Γιατί το κάνεις αυτό; (έναν υπολογισμό, έναν αλγόριθμο, μια συγκεκριμένη ενέργεια)
- Είσαι βέβαιος ότι αυτό είναι σωστό; κτλ.

Οι ερωτήσεις αυτού του είδους δεν εξαντλούνται εδώ, αλλά θα τις δούμε πιο συστηματικά όταν εξετάσουμε τη λύση προβλήματος σε σχέση με τη διδασκαλία.

Και επειδή, όπως τονίσαμε λίγο πιο πάνω, ο καθηγητής είναι συνήθως προσανατολισμένος στη μετάδοση του μηνύματος, η συνεργασία μεταξύ των μαθητών

αποκτά σημαντική θέση στην πρακτική της τάξης. Και αυτό γιατί ενώ η αλληλεπίδραση μεταξύ δασκάλου-μαθητή συνήθως είναι μιας κατεύθυνσης, η αλληλεπίδραση μεταξύ μαθητών είναι διπλής κατεύθυνσης. Είναι συνηθισμένο στη γλώσσα των διδασκόντων η συνεργασία των μαθητών να συνδέεται με το αποκαλούμενο ‘μαθητοκεντρικό’ διδακτικό μοντέλο. Στην πρακτική της τάξης όμως, τις περισσότερες φορές το μοντέλο αυτό λειτουργεί κάτω από δύο αντίθετες προθέσεις: Από τη μια μεριά θέλουμε να διδάξουμε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό θέμα και από την άλλη επιθυμούμε να ‘παραχωρήσουμε’ ένα μερίδιο ευθύνης για την ανάπτυξη αυτής της γνώσης στους μαθητές. Συνήθως, ως αποτέλεσμα έχουμε το λεγόμενο ‘μοντέλο εκμείωσης’ (elicitation pattern) με τα ακόλουθα τρία στάδια:

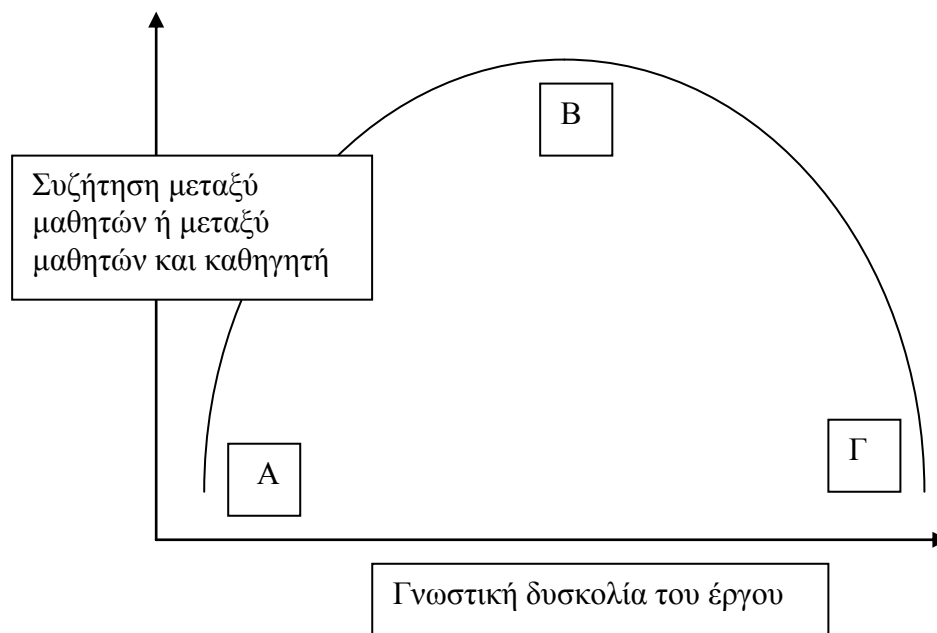
1. Ο δάσκαλος δίνει ένα έργο στους μαθητές, το οποίο περιέχει ένα βαθμό αβεβαιότητας. Οι μαθητές, που εργάζονται σε ομάδες χωρίς όμως να είναι και απαραίτητο, δίνουν διάφορες απαντήσεις οι οποίες αξιολογούνται άμεσα από τον καθηγητή χωρίς να αποτελέσουν θέμα διαπραγμάτευσης.
2. Αν οι απαντήσεις των μαθητών αποκλίνουν αρκετά από τη γνώση που θέλει να διδάξει, ο καθηγητής καθοδηγεί τους μαθητές προς ένα συγκεκριμένο επιχείρημα, μια συγκεκριμένη λύση κτλ. Πιστεύοντας ότι βοηθά τους μαθητές, κάνει σύντομες ερωτήσεις προκειμένου να εκμείψει μικρά μέρη γνώσης και οι οποίες, με τη σειρά τους, προκαλούν σύντομες απαντήσεις.
3. Ακολουθεί μια ανασκόπηση της όλης πορείας.

Αυτό που περιγράψαμε ως μοντέλο εκμείωσης ουσιαστικά είναι ένα μοντέλο αλληλεπίδρασης, και το ίδιο ισχύει για κάθε μοντέλο διδασκαλίας δηλαδή, κάθε διδακτικό μοντέλο ορίζει ένα μοντέλο αλληλεπίδρασης με διάφορες παραλλαγές. Με άλλα λόγια, κάθε μοντέλο διδασκαλίας διαμορφώνει μια πρακτική της τάξης.

Επιστρέφοντας στο σημαντικό θέμα της ανάπτυξης της μεταγνωστικής ικανότητας, επισημαίνουμε ότι το γενικό μοντέλο επίλυσης ενός προβλήματος του Ρόγια: κατανόηση του προβλήματος, επινόηση ενός σχεδίου επίλυσης, εκτέλεση του σχεδίου, ανασκόπηση, καθώς και το σύνολο των στρατηγικών (heuristics) λύσης προβλήματος που προτείνει, έχουν σκοπό την ανάπτυξη της μεταγνωστικής ικανότητας του μαθητή αλλά και του ατόμου γενικότερα, προκειμένου να λειτουργήσει με κριτική ικανότητα στο κοινωνικό του περιβάλλον. Οι ιδέες του Ρόγια, αλλά και γενικότερα η σχέση της λύσης προβλήματος με τη διδασκαλία, θα αποτελέσουν αντικείμενο ιδιαίτερης διαπραγμάτευσης, που δεν ανήκει στο παρόν κείμενο.

Κατά την επίλυση προβλημάτων στην τάξη, η μάθηση επιτυγχάνεται διαμέσου της λύσης μαθηματικών έργων και εξαρτάται από την ‘συνάφεια’ που υπάρχει ανάμεσα στο έργο και την ZPD των μαθητών. Το ακόλουθο σχήμα 5 των Holton & Thomas, δείχνει την σχέση ανάμεσα στην δυσκολία ενός έργου και την συζήτηση (διαπραγμάτευση μέσω της αλληλεπίδρασης) μεταξύ των μαθητών ή μαθητών και καθηγητή. Στην περιοχή Α η δυσκολία είναι μικρή, δηλαδή το πρόβλημα είναι εύκολο για τους μαθητές, πιθανώς επειδή έχουν διαπραγματευτεί στο παρελθόν παρόμοια έργα. Επομένως δεν υπάρχει ανάγκη για συζήτηση ή η συζήτηση είναι πολύ μικρή. Το ίδιο συμβαίνει και στην περιοχή Γ αλλά για διαφορετικούς λόγους. Εδώ η δυσκολία του έργου είναι μεγάλη, πράγμα που σημαίνει ότι οι γνωστικές απαιτήσεις του έργου είτε βρίσκονται στα όρια της ZPD είτε, το πιθανότερο, έξω από την ZPD. Στην περίπτωση αυτή οι απαιτήσεις του προβλήματος είναι έξω από τις δυνατότητες των μαθητών, έως ότου ο καθηγητής δώσει τις απαραίτητες εξηγήσεις και πληροφορίες για την ανάπτυξη του αναγκαίου πλαισίου (scaffolding) μέσα στο οποίο οι μαθητές θα εργαστούν.

Η βέλτιστη κατάσταση για παραγωγική συζήτηση είναι η περιοχή B, όπου η δυσκολία του προβλήματος είναι αρκετά μεγάλη, αλλά μέσα στην ZPD των μαθητών. Φυσικά, θα πρέπει πάντα να έχουμε υπόψη μας τις προσωπικές δυνατότητες των μαθητών, ότι δηλαδή για μερικούς μαθητές ένα έργο είναι χαμηλής δυσκολίας ενώ για άλλους υψηλής. Γενικά όμως είναι δουλειά του δασκάλου να εξασφαλίσει ότι ένα προτεινόμενο έργο βρίσκεται μέσα στην ZPD των μαθητών του. Προκειμένου λοιπόν ο δάσκαλος να διαμορφώσει ένα έργο κατάλληλο, θα χρειαστεί τη γνώση που προκύπτει από την ZPD των μαθητών, δηλαδή ότι θα μπορέσουν να το διαπραγματευτούν είτε μόνοι τους είτε με την δική του βοήθεια. Εξάλλου, όπως έχουμε ήδη αναφέρει στις σημειώσεις του Α΄ εξαμήνου, η ZPD είναι συνδεδεμένη με την πρόβλεψη των δυνατοτήτων και των προοπτικών του μαθητή ο οποίος συμμετέχει στην πρακτική της τάξης. Από την άποψη αυτή έχει μεγάλη σημασία να προσδιορίσει ο δάσκαλος όχι μόνον τι μπορεί να κάνει ο μαθητής μόνος του αλλά και μέσα στα πλαίσια κάποιων οργανωμένων συλλογικών διαδικασιών. Αυτό σημαίνει ότι η επιλογή του έργου θα γίνει στη βάση ενός μοντέλου που *ήδη έχει, ή πρέπει να έχει ο διδάσκων* ως προς τις γνώσεις και τις δυνατότητες των μαθητών του.



Σχήμα 5.

Οι Helme and Clarke (2001), διακρίνουν την γνωστική εμπλοκή (cognitive engagement) από άλλες λιγότερο συγκεκριμένες, όπως αυτοί θεωρούν, συνιστώσες της συμμετοχής σε αλληλεπιδραστικές καταστάσεις όπως, το ενδιαφέρον, η προσοχή και οι διάφορες συναισθηματικές διαστάσεις. Ο ορισμός που δίνουν στην γνωστική εμπλοκή είναι η 'θεληματική ή εκούσια σκέψη για το έργο, την οποία οι μαθητές αναπτύσσουν, ενώ συμμετέχουν στο έργο'. Η γνωστική εμπλοκή είναι ίσως η πιο κρίσιμη διαμεσολαβούσα συνιστώσα, με την οποία η πρακτική της τάξης μετασχηματίζεται σε νέα γνώση. Η έμφαση τοποθετείται στη λέξη 'θεληματική ή εκούσια σκέψη'.

Ο ακόλουθος πίνακας δίνει μερικούς χρήσιμους δείκτες αναγνώρισης της γνωστικής εμπλοκής σε διάφορες καταστάσεις στην τάξη:

Κατάσταση	Συμπεριφορά (δείκτες)
Οι μαθητές εργάζονται μόνοι τους στο ίδιο έργο	Γλωσσική έκφραση της σκέψης, αυτοδιόρθωση, συγκέντρωση στο έργο (αντίσταση σε διακοπές ή ενοχλήσεις), χειρονομίες (που ερμηνεύονται ως εξωτερίκευση σκέψεων), αναζήτηση πληροφοριών και ανάδραση.
Συνεργασία μαθητών σε μικρές ομάδες	Ερωτήσεις, συμπλήρωση της έκφρασης του άλλου, ανταλλαγή ιδεών, κατευθύνσεις, επεξηγήσεις, πληροφορίες, δικαιολόγηση ενός επιχειρήματος, συγκεκριμένες χειρονομίες.
Αλληλεπίδραση μικρών ομάδων με το δάσκαλο	Απαντήσεις σε ερωτήσεις του δασκάλου, παροχή πληροφοριών από τον δάσκαλο, επεξήγηση διαδικασιών, αλγορίθμων και συλλογισμών, ερωτήσεις προς τον δάσκαλο, αναστοχαστικές ερωτήσεις των μαθητών προς τους ίδιους.
Αλληλεπίδραση του δασκάλου με όλη την τάξη	Απαντήσεις σε ερωτήσεις τόσο του δασκάλου προς τους μαθητές αλλά και αντιστρόφως. Σχόλια αξιολόγησης, συνεισφορά ιδεών, συμπλήρωση εκφράσεων του δασκάλου και αντιστρόφως. Αντιρρήσεις-αντιδράσεις σε κάτι που ισχυρίζεται ο δάσκαλος.

Φυσικά, ο ανωτέρω πίνακας σε καμιά περίπτωση δεν είναι πλήρης. Για παράδειγμα, μπορούμε να επισημάνουμε και άλλες ενδείξεις γνωστικής εμπλοκής όπως, π.χ. ισχυρισμοί μαθητών ότι έχουν κάνει σοβαρές προσπάθειες να μάθουν κάτι, να επιλύσουν κάποια αβεβαιότητα, να ανακαλέσουν λεπτομέρειες από περασμένο μάθημα κτλ. Επιπλέον, από τον πίνακα λείπει η περίπτωση αλληλεπίδρασης του δασκάλου με έναν μαθητή, κάτι που αναμένει να συμπληρωθεί.

Οι δείκτες αυτοί είναι χρήσιμοι με την έννοια ότι μας δίνουν ενδείξεις γνωστικής εμπλοκής σε διάφορες κοινωνικές καταστάσεις της τάξης. Όμως, ο στόχος της βελτίωσης της διδασκαλίας απαιτεί από τον δάσκαλο να βλέπει τους δείκτες ως εξωτερικές μορφές της γνωστικής εμπλοκής, που αντιστοιχούν σε καθεμιά από τις παραπάνω κοινωνικές καταστάσεις, και να εμπλέκει γνωστικά όσο το δυνατόν περισσότερους μαθητές σε όσο το δυνατόν περισσότερες τέτοιες καταστάσεις.

Τέλος, οι Reeve & Reynolds (2001) προτείνουν μια επιπλέον διάσταση στην πρακτική της τάξης. Η ανάλυσή τους επικεντρώνεται στην σημασία των χειρονομιών (gestures), δηλαδή στις κινήσεις των χεριών, αλλά και του σώματος, που συνοδεύουν την ομιλία, ερευνώντας για ενδείξεις εννοιολογικής αλλαγής στην κατανόηση ενός θέματος διαμέσου αυτών των κινήσεων. Η βάση για μια τέτοια ερευνητική προσπάθεια είναι η διαπίστωση του Vygotsky ότι κατά την διάρκεια της αλληλεπίδρασης μεταξύ μαθητών οι χειρονομίες εξελίσσονται από μια φυσική χειρονομία, δηλαδή μια εικονική αποτύπωση ενός φαινομένου, προς πιο συμβολικές αναπαραστάσεις λιγότερο φυσικές αλλά περισσότερο εννοιολογικές, οι οποίες



υποστηρίζουν την γλωσσική έκφραση και την συμπληρώνουν, ιδιαίτερα όταν η γλώσσα είναι ακόμα ατελής. Για παράδειγμα, οι Reeve & Reynolds επισημαίνουν ότι όταν παρατηρούμε μαθητές που συνεργάζονται, τότε η παρουσία των χειρονομιών, η αργή ομιλία, διακοπές στην επικοινωνία, δείχνουν μια κατάσταση γνωστικής αβεβαιότητας. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές βρίσκονται σε ένα στάδιο ‘ετοιμότητας’ για μια εννοιολογική προώθηση των σκέψεών τους, πράγμα που δίνει την ευκαιρία στον δάσκαλο για την ανάπτυξη ενός κατάλληλου πλαισίου (scaffolding), *εφόσον μπορεί να αναγνωρίζει αυτό το στάδιο.*

### **5. Διδάσκοντας ανάμεσα στα θρανία**

Όπως είδαμε μέχρι τώρα, οι διδακτικές επιλογές του δασκάλου των Μαθηματικών είναι πολλές. Όμως, όταν οι επιλογές γίνονται συνειδητά τότε μπορούν να είναι και πιο αποτελεσματικές, πράγμα που σημαίνει ότι ο δάσκαλος έχει γνώση όχι μόνον των υποθέσεων της κάθε επιλογής αλλά και των συνεπειών της. *Στο σημείο αυτό θεωρούμε ότι υπάρχει η, ορατή, διαχωριστική γραμμή που διακρίνει τον ενημερωμένο δάσκαλο από τον μη ενημερωμένο.*

Στην παράγραφο αυτή θα συζητήσουμε τις υποθέσεις και τις συνέπειες ενός πολύ γνωστού διδακτικού μοντέλου το οποίο ονομάσαμε ‘διδάσκοντας ανάμεσα στα θρανία’. Είναι ένα διδακτικό μοντέλο το οποίο περιστασιακά το έχουν ακολουθήσει οι περισσότεροι διδάσκοντες με διάφορες παραλλαγές, επιτυχημένες ή όχι. Είναι προφανές ότι στα επόμενα θα υποθέσουμε ως γνωστά όλα τα θέματα που έχουν παρουσιαστεί σε όλες τις παραγράφους του κειμένου. Επισημαίνουμε και πάλι αυτό που είχαμε αναφέρει και στην σελίδα 14: *Κάθε μοντέλο διδασκαλίας διαμορφώνει μια πρακτική. Όμως η συμμετοχή στην πρακτικής της τάξης είναι ταυτόσημη με την μάθηση και γιαυτό τον λόγο αναιρείται η διχοτομία μεταξύ διδασκαλίας και μάθησης.*

Μια πολύ διαδεδομένη διχοτομία διαμορφώνουν οι όροι ‘δασκαλοκεντρικό’ και ‘μαθητοκεντρικό’ μοντέλο διδασκαλίας. Οι όροι αυτοί μπορεί να διαφέρουν, περιστασιακά, στην χρήση τους αλλά αντιπροσωπεύουν μια διαδεδομένη τάση στην διδακτική των Μαθηματικών. Πράγματι, η σύγχρονη διδακτική υποστηρίζει το ‘μαθητοκεντρικό’ μοντέλο και οι αντίστοιχες έρευνες έχουν επιβεβαιώσει την αξία και την υπεροχή του μοντέλου αυτού. Όμως υπάρχει ένα παράδοξο που δεν μπορεί να εξηγηθεί με τους όρους αυτούς και το οποίο φαίνεται να αναιρεί τα συμπεράσματα των ερευνών. Το παράδοξο αυτό έχει ονομαστεί από τον Clarke (2003) ως το ‘Ασιατικό παράδοξο’. Πιο συγκεκριμένα, ενώ οι σχολικές τάξεις των Μαθηματικών σε Ασιατικές χώρες, π.χ. Ιαπωνία, Κορέα, Κίνα, Χονγκ-Κονγκ κτλ, έχουν χαρακτηριστεί από δυτικούς αλλά και ασιατές ερευνητές ως δασκαλοκεντρικές, εντούτοις στις διεθνείς έρευνες για τα μαθηματικά τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι μαθητές των χωρών αυτών έχουν υψηλή απόδοση, βλέπε π.χ. τα αποτελέσματα των ερευνών PISA 2003, TIMSS 1999. Η πρόσφατη έρευνα σε σχολικές τάξεις της Κίνας έδειξαν ότι έχει παρανοηθεί η πρακτική τους και ότι απαιτείται ένα διαφορετικό θεωρητικό πλαίσιο προκειμένου να ερμηνευτεί η πρακτική της τάξης.

Το θεωρητικό πλαίσιο ήδη υπάρχει και έχει παρουσιαστεί σε όλες τις διαστάσεις του στις προηγούμενες παραγράφους. Θα το συνοψίσουμε εδώ με πιο πρακτικό τρόπο.

Η βασική συνιστώσα του πλαισίου είναι η διαφορά ανάμεσα στο ‘εκμαιεύω’ (eliciting) από το ‘εισάγω ή προτείνω’ (initiating). Εστιάζοντας τώρα στην λειτουργία του δασκάλου και εξετάζοντας τις προθέσεις, ενέργειες και ερμηνεία τους, αποκτούμε ένα πιο αποτελεσματικό εργαλείο ανάλυσης της πρακτικής της τάξης.

Βασική υπόθεση στο μοντέλο ‘διδάσκοντας ανάμεσα στα θρανία’ (ΔΑΘ) είναι η *μεταβίβαση μέρους της υπευθυνότητας του δασκάλου για την ανάπτυξη της γνώσης στους μαθητές.* Ταυτόχρονα, παρατηρούμε σε ποιόν βαθμό οι μαθητές αποδέχονται

*αυτή την υπευθυνότητα.* Στο ΔΑΘ μπορούμε να διακρίνουμε όλους τους τύπου της αλληλεπίδρασης που αναφέρονται στον πίνακα της σελίδας 16 για τους δείκτες της γνωστικής εμπλοκής, αλλά δύο τύποι είναι βασικοί: Η συζήτηση-αλληλεπίδραση του δασκάλου με όλη την τάξη (whole class participation) και αλληλεπίδραση μεταξύ των μελών των ομάδων. Μπορούμε τώρα να περιγράψουμε, συνοπτικά, το μάθημα διαμέσου αυτού του μοντέλου.

Ο δάσκαλος εισάγει-προτείνει μια δραστηριότητα η οποία είναι ο στόχος του μαθήματος ή ένας ενδιάμεσος στόχος. Ενώ οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες προσπαθώντας να λύσουν τις αβεβαιότητες, ο δάσκαλος συζητά με τα μέλη των ομάδων. Στην συζήτηση αυτή το θέμα μπορεί να είναι η αναζήτηση πληροφοριών ή διευκρινίσεων από την πλευρά των μαθητών. Σε τέτοιες περιπτώσεις μπορεί να δώσει τις πληροφορίες, γνωρίζοντας όμως ότι με τον τρόπο αυτόν *αφαιρεί ευκαιρίες* από τους μαθητές να εργαστούν μόνοι τους και να κατανοήσουν τον μαθησιακό στόχο. Μπορεί όμως με κατάλληλες ερωτήσεις, βλέπε σελ. 13, να διαμορφώσει το πλαίσιο εκείνο (scaffolding) μέσα στο οποίο οι μαθητές θα μπορέσουν να εργαστούν. Το ποια περίπτωση θα επιλέξει εξαρτάται από πολλούς παράγοντες, π.χ. από τον χρόνο που θα διαθέσει για την δραστηριότητα ή από τη θέση έχει ο μαθητής, κατά τον καθηγητή, στην μαθητική κοινότητα. Δηλαδή κάποιος ‘αδύνατος’ μαθητής, ή κάποια ομάδα, μπορεί να αναζητά την βοήθεια του δασκάλου προκειμένου να συμμετάσχει στην πρακτική της τάξης. Παράλληλα, γυρίζοντας ανάμεσα στα θρανία, ο δάσκαλος χρησιμοποιεί συγκεκριμένους μαθητές ως ‘μέτρο’ που θα του δώσει μια καλή ιδέα για την κατανόηση της τάξης ενώ, παράλληλα, κρίνει τον βαθμό γνωστικής εμπλοκής των μαθητών με βάση τους δείκτες του πίνακα, σελ.16. Ο βαθμός εμπλοκής μπορεί, συμπληρωματικά, να επισημανθεί και από τα γραπτά των μαθητών κατά τη διάρκεια της επαφής του με τις ομάδες, γιατί δείχνουν τις προσπάθειες των μαθητών κατά την διαπραγμάτευση του θέματος. Τέλος, γυρίζοντας στα θρανία διαπιστώνει και τον βαθμό αποδοχής από της μεριάς των μαθητών, της μεταβίβασης της υπευθυνότητας για την ανάπτυξη της γνώσης. *Αν, λοιπόν, διαπιστώσει ότι οι μαθητές συνεχίζουν να εργάζονται, όταν αυτός συζητά με μια ομάδα, και όταν συζητούν – διαπραγματεύονται - αλληλεπιδρούν μεταξύ τους χωρίς την άμεση παρουσία του, αυτό σημαίνει ότι έχουν αποδεχθεί αυτήν την υπευθυνότητα, ο καθένας βέβαια για δικούς του λόγους ενδεχομένως:* Άλλος, γιατί βρίσκει ενδιαφέρουσα την δραστηριότητα, άλλος, γιατί υποθέτει πως θα τον βοηθήσει να περάσει στις εξετάσεις, άλλος, γιατί θέλει να ‘αναβαθμίσει’ τη θέση του στην τάξη και άλλος, γιατί θέλει να κρατήσει την θέση του στην τάξη. Πάντα θα πρέπει να έχουμε στον νου μας πως, όταν τα άτομα συμμετέχουν σε μια πρακτική, ενώ μιλούν και εργάζονται στην ίδια δραστηριότητα, μπορεί να αποδίδουν τελείως διαφορετικές λειτουργίες σε αυτήν. Αυτό σημαίνει ότι, ενώ η πρακτική της τάξης είναι συν-κατασκευαζόμενη, μαθητές και καθηγητής συμμετέχουν το ίδιο στην κατασκευή της, δεν σημαίνει ότι έχουν τον ίδιο σκοπό. Όμως, και τα δύο μέρη συμμερίζονται ένα κοινό ενδιαφέρον για την προώθηση της μάθησης.

Όταν ο δάσκαλος κρίνει ότι η εργασία των μαθητών έχει ολοκληρωθεί ή ότι οι μαθητές έφθασαν σε κάποιο σημείο που δεν μπορούν να συνεχίσουν χωρίς την δική του βοήθεια, σταματά την εργασία των ομάδων και το κέντρο του ενδιαφέροντος, τώρα, γίνεται η συζήτηση ανάμεσα στους μαθητές και τον δάσκαλο. Η συζήτηση έχει σκοπό να παρουσιαστούν οι ιδέες των μαθητών και να κριθούν με λογικά επιχειρήματα, βλέπε σελ. 10 για τους διάφορους τρόπους επίλυσης της αβεβαιότητας, ή να δοθούν επιπλέον πληροφορίες και να συνεχιστεί η εργασία των μαθητών. Κατά τη διάρκεια της συζήτησης με όλη την τάξη μπορούμε να επισημάνουμε μαθητές που προτείνουν ιδέες οι οποίες, μετά από τη συζήτηση θα τις τροποποιήσουν ή θα τις

εγκαταλείψουν. Θα διαπιστώσουμε επίσης πως, όταν στους μαθητές δίνεται η ευκαιρία να εργαστούν με τις δικές τους ιδέες, χωρίς την προσπάθεια του δασκάλου να τους κατευθύνει, τότε αναπτύσσονται όλοι οι τρόποι επίλυσης της αβεβαιότητας, οι οποίοι, όπως είδαμε, αντιστοιχούν σε διαφορετικούς τύπους γνώσης. Αυτό βέβαια δεν συμβαίνει μόνον στην συζήτηση με όλη την τάξη αλλά και σε κάθε άλλο είδος αλληλεπίδρασης μεταξύ των ατόμων. Θα δούμε ακόμα ότι οι μαθητές μέσα στους συλλογισμούς τους παρεμβάλουν και προσωπικά στοιχεία που προέρχονται από τις εμπειρίες τους ως προς την κατάσταση που μελετούν ή από την εικόνα που έχουν για τους διάφορους μαθηματικούς όρους που χρησιμοποιούν, βλέπε τον ορισμό και την εικόνα μιας έννοιας σελ.9. Στην περίπτωση αυτή μόνον μετά από συζήτηση η οποία απαιτεί χρόνο, οι μαθητές θα 'καταφύγουν' στα Μαθηματικά προκειμένου να άρουν την αβεβαιότητα, δηλαδή στα λογικά επιχειρήματα και στις μαθηματικές σχέσεις.

Η συζήτηση με όλη την τάξη μπορεί να αναπτυχθεί και με τον τρόπο της επαναφώνησης (re-voicing), η οποία χρησιμοποιείται, κατά τον Ohtani, στις σχολικές τάξεις της Ιαπωνίας, αναφέρεται από τον Clarke (2003, p.9). Πιο συγκεκριμένα, η επαναφώνηση είναι ένα ιδιαίτερο είδος επανέκφρασης κάποιου άλλου σε μια συζήτηση. Για παράδειγμα, κάποιος μαθητής εκφράζει μια σκέψη του για το πώς μπορεί π.χ. να λυθεί ένα πρόβλημα και ο δάσκαλος λέει: Όπως μας είπε ο Γιάννης (αναφέρει την έκφραση του μαθητή, ενδεχομένως τροποποιημένη). Τι λες Γιώργο, ποια είναι η άποψή σου;

Σε κάθε περίπτωση μπορούμε να δούμε ότι η πρακτική της τάξης περιγράφεται από ένα επαναλαμβανόμενο μοντέλο αλληλεπίδρασης το οποίο έχει την ακόλουθη μορφή: *Ο καθηγητής εισάγει-προτείνει ένα έργο, οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες, ίσως και μόνοι τους, ο δάσκαλος βαδίζει ανάμεσα στα θρανία και συζητεί με τους μαθητές, επακολουθεί συζήτηση με όλη την τάξη. Ο 'κύκλος' αυτός μπορεί να επαναληφθεί.* Η πρακτική αυτή είναι συν-κατασκευαζόμενη από μαθητές και καθηγητή. Για παράδειγμα, όταν ο δάσκαλος συζητά με τους μαθητές ενός θρανίου και είναι έτοιμος να προχωρήσει στο αμέσως επόμενο, ένας μαθητής από άλλο θρανίο ρωτά κάτι. Τότε ο δάσκαλος αλλάζει το σχέδιο της κίνησής του και βαδίζει προς τον μαθητή αυτόν. Η αλλαγή αυτή μπορεί να έχει σοβαρά αποτελέσματα, αν για παράδειγμα είχε σκοπό να συζητήσει με κάποιους μαθητές που προέβλεπε ότι θα έχουν δυσκολία να συμμετάσχουν στην δραστηριότητα της τάξης, και λόγω αυτής της αλλαγής παραλείψει να το κάνει. Από την άλλη μεριά, ο δάσκαλος έχει ένα σχέδιο, αλλά κατά τη διάρκεια της συζήτησης πιθανόν να παρουσιαστεί μια ιδέα ενός μαθητή η οποία να του ανατρέψει το σχέδιο και να εκτρέψει την συζήτηση σε διαφορετικό πεδίο. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να επισημάνουμε ότι σε παρόμοιες περιπτώσεις ο δάσκαλος μπορεί να βρεθεί σε αβεβαιότητα. Η κατάσταση αυτή δεν είναι απαραίτητα κακή ώστε να αποφεύγεται. Αντίθετα, κατά τους Holton & Thomas ο δάσκαλος κάνει τις πιο παραγωγικές του ερωτήσεις όταν βρίσκεται σε αβεβαιότητα. Η αβεβαιότητα λοιπόν είναι μια κατάσταση που αντιμετωπίζει τόσο ο μαθητής όσο, μερικές φορές, και ο καθηγητής κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας.

Κατά τη διάρκεια της συζήτησης, όμως, δεν είναι μόνον οι γνωστικές διαστάσεις του έργου που συζητούνται, αλλά είναι ή πρέπει να είναι και οι μεταγνωστικές, ανάλογα με τους στόχους του μαθήματος. Πιο συγκεκριμένα, αν ο στόχος της διδασκαλίας είναι γνωστικός, δηλαδή η κατανόηση ενός μαθηματικού θέματος, τότε ο σχεδιασμός της διδασκαλίας θα παρέχει ευκαιρίες για την επίλυση κατάλληλων προβλημάτων, διάφορες οπτικές-προσεγγίσεις του θέματος, τεχνικές για την επίλυση παρόμοιων προβλημάτων κτλ. Όμως, εστιάζοντας ο δάσκαλος σε γνωστικούς στόχους, μπορεί, ασυνείδητα, να εμποδίσει την ανάπτυξη της μεταγνωστικής δραστηριότητας των μαθητών του. Αν λοιπόν ο στόχος είναι και η ανάπτυξη της μεταγνωστικής, οι

παραπάνω δραστηριότητες θα πρέπει να αναφέρονται, να αξιολογούνται με σαφήνεια και να προβάλλονται ως σημαντικές συνιστώσες της διδασκαλίας,

Όπως έχουμε επισημάνει, το ΔΑΘ θεωρούμε ότι είναι ένα βασικό μοντέλο, στοιχεία του οποίου χρησιμοποιούμε σχεδόν σε κάθε διδασκαλία, γιαυτό και υπάρχουν διάφορες παραλλαγές του. Μια παραλλαγή που μπορεί να προκαλέσει σύγχυση είναι η ακόλουθη: Ο δάσκαλος προτείνει μια δραστηριότητα, ζητά από τους μαθητές να εργαστούν σε ομάδες ή μόνοι τους αλλά δεν αφήνει τον απαραίτητο χρόνο για να εργαστούν. Δηλαδή ή αναλαμβάνει να την επιλύσει ο ίδιος ή, πιο συχνά, σηκώνει έναν μαθητή στον πίνακα να λύσει την άσκηση ενώ συστήνει στους μαθητές να συνεχίσουν να εργάζονται. Προφανώς κανείς δεν συνεχίζει, με αποτέλεσμα να αναιρείται η βασική υπόθεση της επιλογής του δηλαδή να γίνει μια μεταβίβαση της υπευθυνότητας ανάπτυξης της γνώσης στους μαθητές. Οι μαθητές γνωρίζοντας τι θα συμβεί δεν αντιμετωπίζουν την δική τους συμμετοχή ως σοβαρή ή απαραίτητη και αναμένουν να δουν την λύση στον πίνακα. Σε μια τέτοια παραλλαγή, η πρακτική της τάξης οδηγεί σε όλους τους τρόπους ανάπτυξης της γνώσης της σελ. 10 εκτός από την ανάπτυξη των λογικών επιχειρημάτων, όπου σπανίως παρατηρείται. Για την ακρίβεια, η πρακτική αυτή συνήθως οδηγεί στην μίμηση του δασκάλου, δηλαδή στην επίλυση μιας αβεβαιότητας με την επίκληση της γνώμης του δασκάλου ή του βιβλίου.

Είναι προφανές ότι ακολουθώντας το μοντέλο ΔΑΘ, ένα σημαντικό ποσοστό του χρόνου αφιερώνεται στην εργασία των μαθητών και στην συζήτηση με όλη την τάξη, με αποτέλεσμα να αφιερώνουμε λιγότερο χρόνο π.χ. στην παρουσίαση από τον δάσκαλο.

Το μοντέλο της παρουσίασης του μαθήματος από τον δάσκαλο, ουσιαστικά αναφερόμαστε στην διάλεξη, είναι μία από τις επιλογές του διδάσκοντα. Και παρά το γεγονός ότι η έρευνα το έχει χαρακτηρίσει ως την πιο ανεπιτυχή διδακτική επιλογή του διδάσκοντα στο σχολείο, δεν πρέπει να το αγνοήσουμε. Όταν ο διδάσκων μιλάει τότε το μόνο που κάνει είναι να μεταφέρει πληροφορίες στους μαθητές του και ποτέ γνώσεις. Το σημείο αυτό είναι γνωστό από τις έρευνες του Piaget: Η γνώση κατασκευάζεται από τον μαθητή και δεν μεταφέρεται με τον λόγο, γραπτό ή προφορικό. Επομένως, στο μοντέλο της διάλεξης ο δάσκαλος 'μεταφέρει' προς τους μαθητές πληροφορίες. Στην περίπτωση όμως όπου οι πληροφορίες αυτές στοχεύουν στην σύνδεση δύο περιοχών γνώσεων που μέχρι εκείνη την στιγμή και για διάφορους λόγους, ήταν ασύνδετες μεταξύ τους στον νου των μαθητών, τότε η διάλεξη μπορεί να βοηθήσει στην ανάπτυξη της γνώσης, όπου εδώ η γνώση είναι ακριβώς αυτή η διασύνδεση των επιμέρους γνώσεων. Επομένως, το μοντέλο αυτό ανήκει στο πεδίο των επιλογών του διδάσκοντα, αρκεί να γνωρίζει την υπόθεση του μοντέλου, ότι δηλαδή δεν μεταφέρει γνώσεις, και για ποιους λόγους και τότε θα το χρησιμοποιήσει. Σε κάθε περίπτωση, το μοντέλο αυτό είναι ακατάλληλο για την εισαγωγή νέων μαθηματικών εννοιών.

Η ανάλυση που παρουσιάσαμε στο κείμενο αυτό μπορεί για τον δάσκαλο να μοιάζει ως μη ρεαλιστική, δεδομένου ότι παρουσιάζει την δουλειά του ως μια πολυσύνθετη επιχείρηση, και ότι οι πολλαπλές συνιστώσες του έργου του ενδιαφέρουν μόνον τους ερευνητές. Αυτό είναι λάθος. Στην πραγματικότητα, ότι αναφέρθηκε δεν είναι νέες υποχρεώσεις. Αντίθετα όλες οι συνιστώσες του διδακτικού έργου που παρουσιάσαμε ήδη υπάρχουν μέσα σε κάθε διδασκαλία, είναι συνεχώς μπροστά μας και δρουν είτε τις αναγνωρίζουμε είτε όχι. Απομένει στον ίδιο τον δάσκαλο να αποκτήσει την δυνατότητα να τις αναγνωρίζει, να τις βελτιστοποιήσει και να τις υποστηρίξει με τον πιο αποτελεσματικό τρόπο.

### Βιβλιογραφία

1. Baird, J.,R., (2001), 'Learning and teaching: From ignorance to understanding' , in Clarke (ed), p. 255-289.
2. Clarke, D., (ed), (2001), 'Perspectives on practice and meaning in Mathematics and Science classrooms', Kluwer Academic Publishers, USA.
3. Clarke, D., (2003), 'Practice, role and position: Whole class patterns of participation', paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, Chicago, April 21-25.
4. Even, R., & Schwarz, B., (2003), 'Implications of competing interpretations of practice for research and theory in mathematics education', in *Educational Studies in Mathematics*, 54, p. 283-313.
5. Floden, R.E., (1988), 'Preparing teachers for uncertainty', in *Teachers Record, Summer 1988*.
6. Gerofsky, S., (1996), '“Why does a letter always arrive at its destination?": Opening up living space between problem and solution'. Paper presented at the 'Curriculum as narrative/narrative as curriculum' conference, university of British Columbia, May 2&3.
7. Helme, S., & Clarke, D., (2001), 'Cognitive engagement in the Mathematics classroom', in Clarke (ed), p.131-153.
8. Holton, D., & Thomas, G., (2001), 'Mathematical interactions and their influence on learning', in Clarke (ed),p.75-104.
9. Kline, M., (1980), 'Mathematics, the loss of certainty', Oxford University Press, NY.
10. Lerman, S., (2001), 'Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics', in *Educational Studies in Mathematics*, 46, p.87-113.
11. Reeve, R., & Reynolds, F., (2001), 'The role of gesture in co-constructing mathematical understanding', in Clarke (ed), p. 231-253.
12. Sfard, A., (2001), 'There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning', in *Educational Studies in Mathematics*, 46, p. 13-57.
13. Sierpinska, A., (1990), 'Some remarks on understanding in Mathematics', in *For the learning of Mathematics*, 10, (3), p.24-36, &41.
14. Sierpinska, A., (1994), 'Understanding in Mathematics', The Falmer Press
15. Streefland, L., & Heuvel-Panhuizen, M., van den, (1999), 'Uncertainty, a metaphor for Mathematics Education', in the *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (4), p. 393-397.
16. Tall, D., (ed), (1991), 'Advanced Mathematical Thinking', Kluwer, Dordrecht: The Netherlands.
17. Vinner, S., (1991), 'The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics', in Tall (ed.), p. 65-81.
18. Voigt, J., (1994), 'Negotiation of mathematical meaning and learning', in *Educational Studies in Mathematics, special issue 'Learning Mathematics: Constructivist and interactionist theories of mathematical development*, 26, 2-3, March, p. 275-298.
19. Zaslavsky, O., (2002), 'Being sloppy about slope: The effect of changing the scale', in *Educational Studies in Mathematics*, 49, p. 119-140.
20. Zaslavsky, O., (2005), 'Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics', in *Educational Studies in Mathematics*, 60, p. 297-321.