



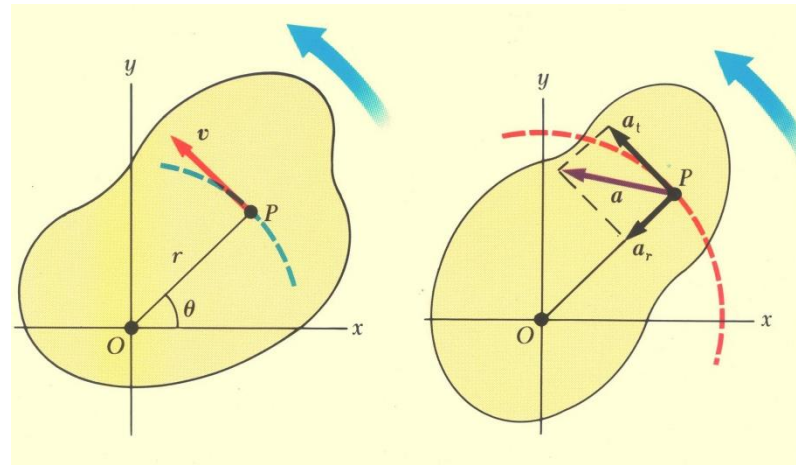
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Γενική Φυσική

Ενότητα 7: Δυναμική Άκαμπτου Σώματος

Γεώργιος Βούλγαρης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Περιστροφή Άκαμπτου Σώματος

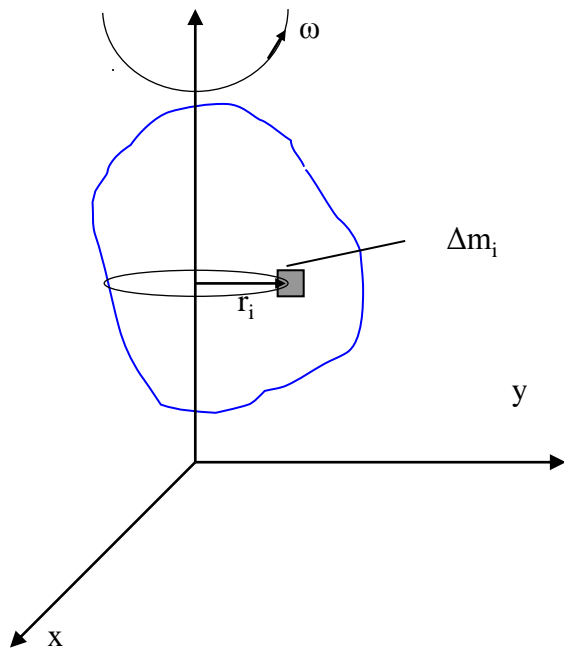


1)

2)

1. Κάθε σημείο Περιστρέφεται με την ίδια Γωνιακή Ταχύτητα.
2. Κάθε σημείο Περιστρέφεται με την ίδια Γωνιακή Επιτάχυνση

Κινητική Ενέργεια λόγω Περιστροφής



Αν το μικρό μέρος έχει μάζα :

$$\Delta m_i$$

Ταχύτητα $v_i = r_i \omega$

Κινητική Ενέργεια $K_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2$

$$K_i = \frac{1}{2} \Delta m_i (r_i \omega)^2$$

$$K = \sum K_i = \frac{1}{2} \sum \Delta m_i (r_i \omega)^2 = \frac{1}{2} (\sum \Delta m_i r_i^2) \omega^2$$

$$\Delta m_i \rightarrow dm_i$$

$$\sum \Delta m_i r_i^2 \rightarrow \int dm r^2$$

$$I = \int dm r^2$$

Την ποσότητα I , ονομάζουμε Ρολή Αδράνειας.

Η Κινητική Ενέργεια γίνεται :

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

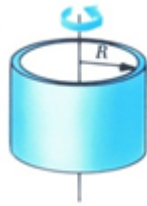
Αν το Σώμα είναι Ομογενές τότε :

$$I = \rho \int_V r^2 dV$$

Ροπή Αδράνειας για διάφορα Συμμετρικά Σώματα

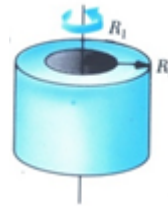
Δακτύλιος ή κυλινδρικό κέλυφος

$$I_c = MR^2$$



Κούφιος κύλινδρος

$$I_c = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$



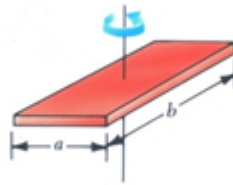
Στερεός κύλινδρος ή δίσκος

$$I_c = \frac{1}{2}MR^2$$



Ορθογώνια πλάκα

$$I_c = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$



Μακριά λεπτή ράβδος

$$I_c = \frac{1}{12}ML^2$$



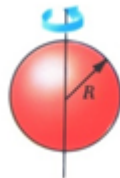
Μακριά λεπτή ράβδος

$$I_c = \frac{1}{3}ML^2$$



Στερεή σφαίρα

$$I_c = \frac{2}{5}MR^2$$

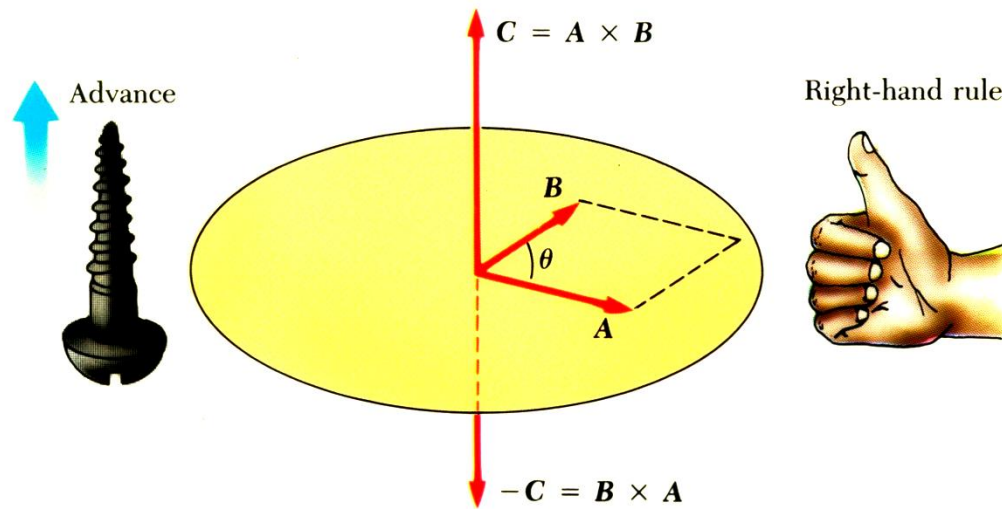


Λεπτό σφαιρικό κέλυφος

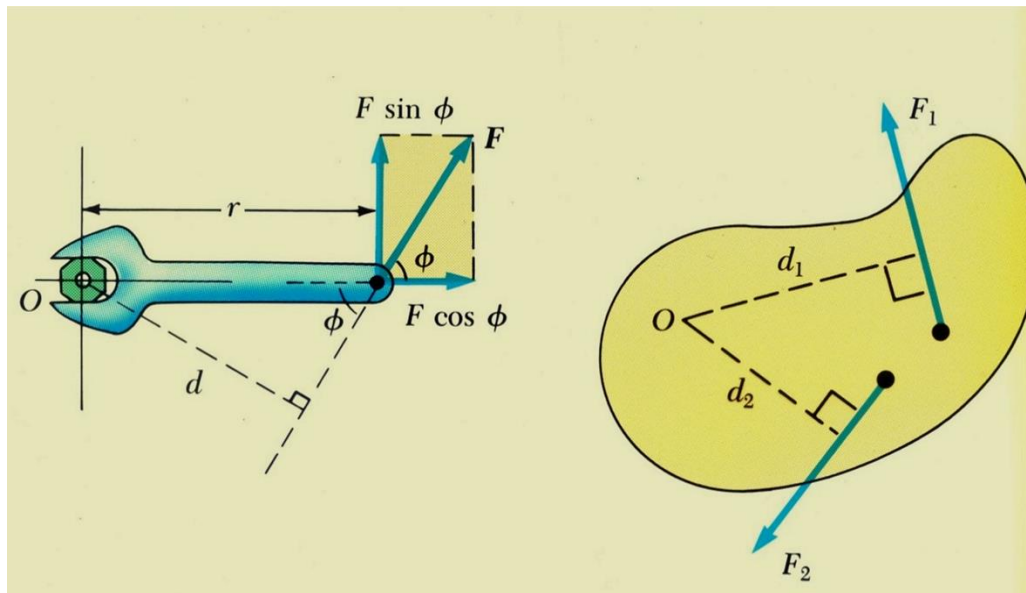
$$I_c = \frac{2}{3}MR^2$$



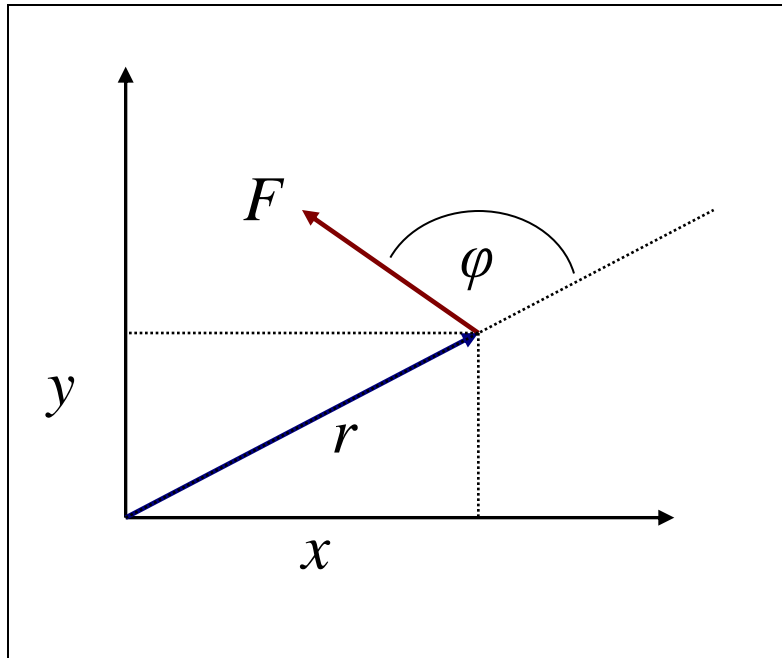
Διανυσματικό Γινόμενο



Ροπή Δύναμης προς Άξονα



Ροπή 2 Δ



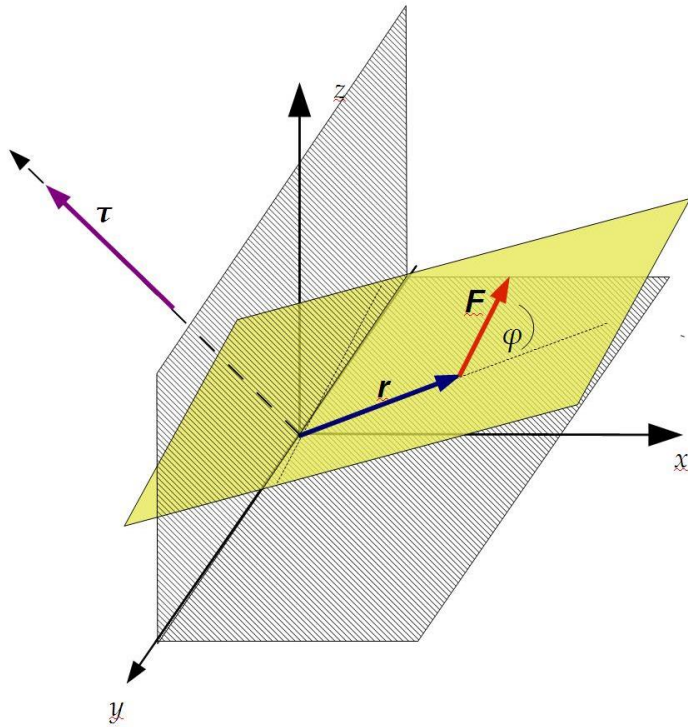
$$\tau = \begin{pmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{pmatrix} \bar{k}$$

$\dot{\eta}$

$$\tau = |r||F| \sin \varphi \bar{k}$$



Ροπή 3-Δ



$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} y & z \\ F_y & F_z \end{pmatrix} \hat{i} + \begin{pmatrix} z & x \\ F_z & F_x \end{pmatrix} \hat{j} + \begin{pmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{pmatrix} \hat{k}$$

Σύνθεση Ροπών

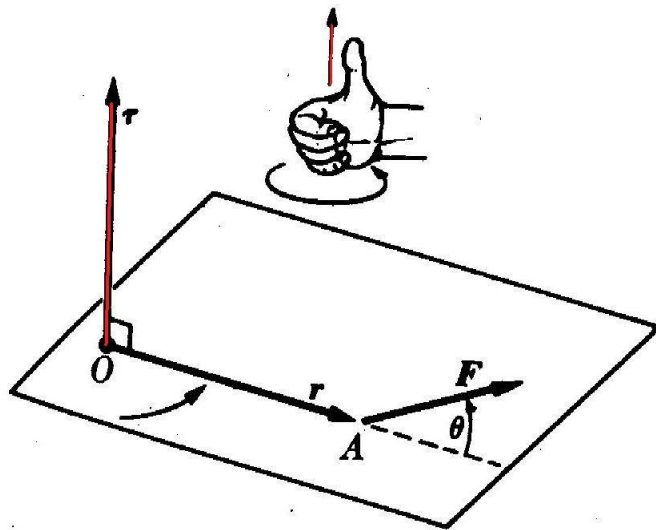
- Δυνάμεις Συντρέχουσες.
- Δυνάμεις Ομοεπίπεδες.

Ζεύγος Δυνάμεων.

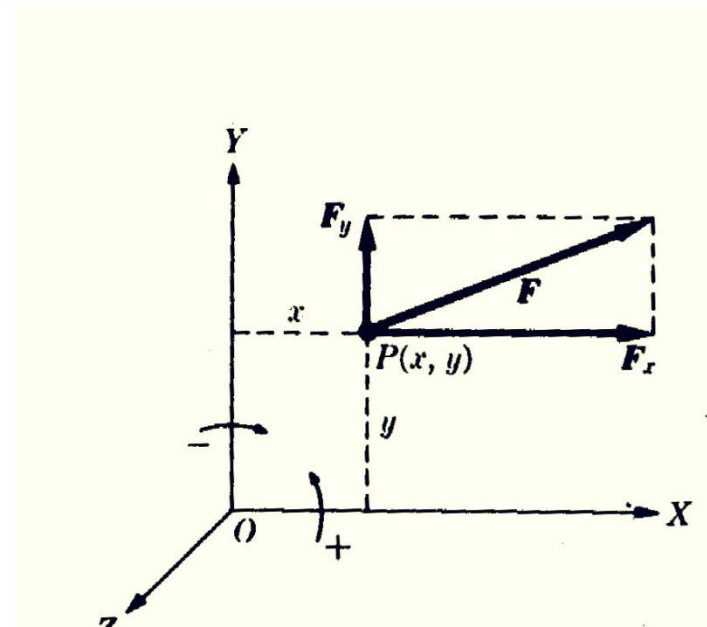
- Το Αποτέλεσμα της Σύνθεσης είναι μια Δύναμη και ένα Ζεύγος



Διάνυσμα, ροπή

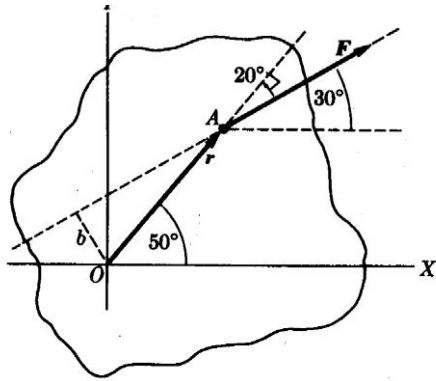


Μέτρο και φορά Ροπής.

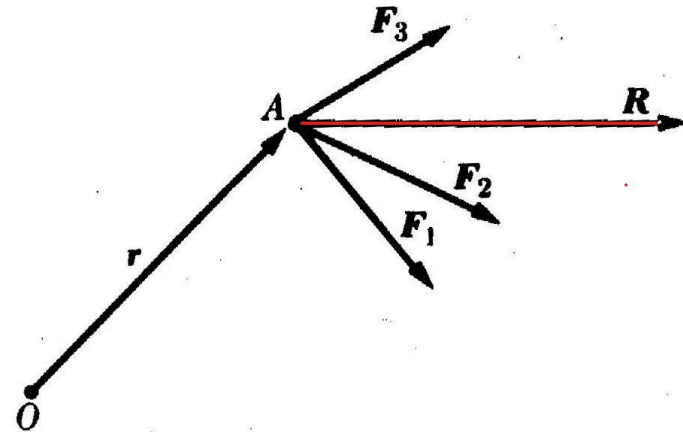


Υπολογισμός από τις συνιστώσες.

Συντρέχουσες Δυνάμεις



Απλό παράδειγμα υπολογισμού.



Όταν οι δυνάμεις είναι συντρέχουσες η ροπή της συνισταμένης ισούται με το διανυσματικό άθροισμα των ροπών των συνιστωσών



Δυνάμεις σε Άκαμπτο Σώμα

Αποτέλεσμα της δράσης των δυνάμεων στο σώμα είναι:

α) Μετατόπιση

β) Περιστροφή

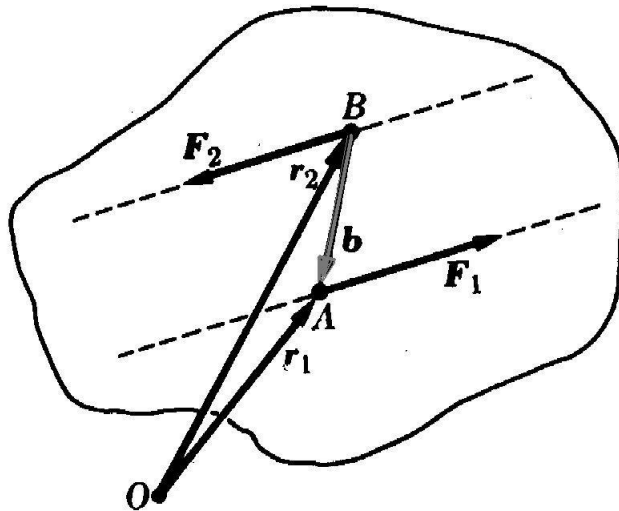
Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη δράση των δυνάμεων με τη συνισταμένη τους;

Γενικά όχι. Το άθροισμα των ροπών δεν είναι πάντοτε κάθετο στη συνισταμένη δύναμη.

Η προϋπόθεση ισχύει όταν οι δυνάμεις, είναι συνεπίπεδες.



Ζεύγος δυνάμεων



Ζεύγος: Σύστημα δύο Δυνάμεων με ίσα μέτρα και αντίθετες φορές.

Η Ροπή του Ζεύγους είναι ανεξάρτητη από το σημείο υπολογισμού. Το ζεύγος δεν μπορεί να αντικατασταθεί από μία μόνον δύναμη.

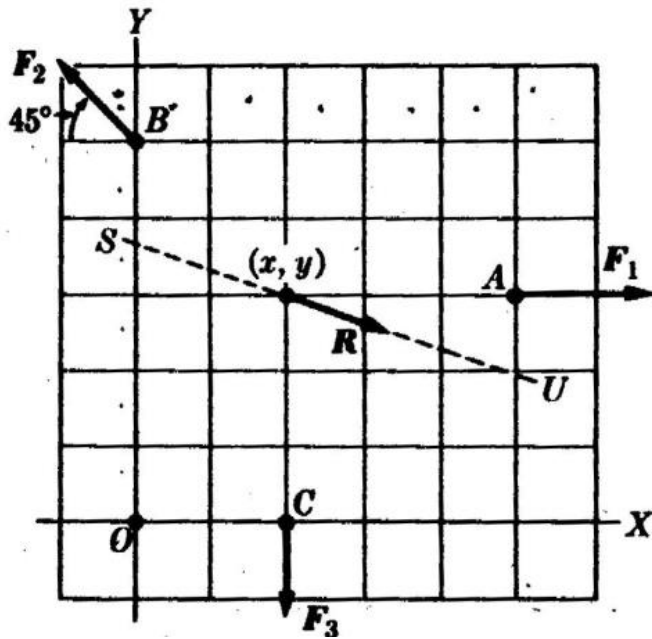
Ένα Σύστημα Δυνάμεων, μπορεί να αντικατασταθεί:

Από τη συνισταμένη R έτσι ώστε να προκαλεί την ίδια μετατόπιση.

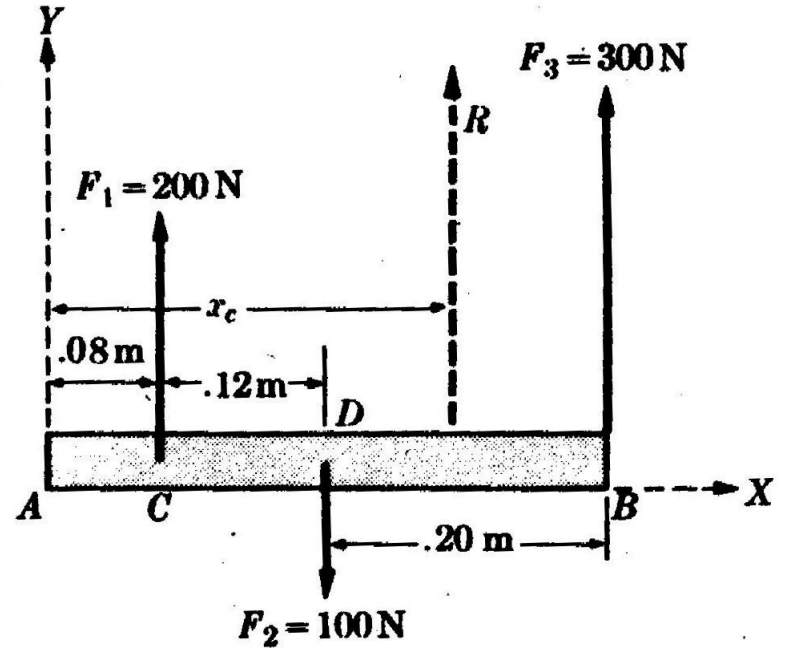
Εφαρμόζεται στο σημείο όπου μηδενίζεται το άθροισμα των ροπών.

Από ένα ζεύγος που να προκαλεί την ίδια περιστροφή με το άθροισμα των ροπών.

Ασκήσεις

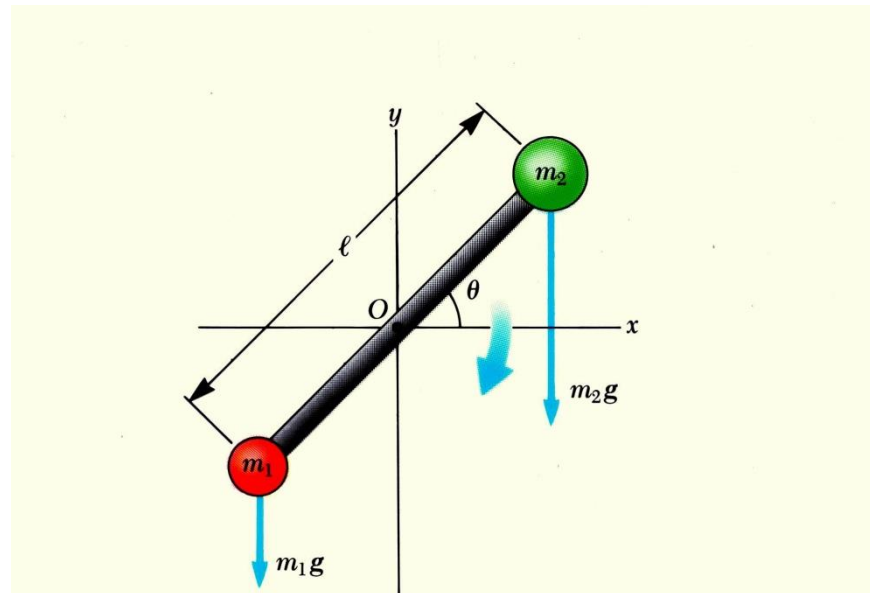


Υπολογισμός συνισταμένης



Δυνάμεις παράλληλες κέντρο δυνάμεων.

Ροπή



Στροφορμή

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

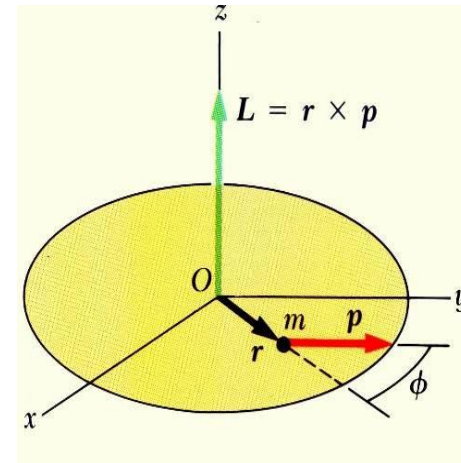
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt.$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p}$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

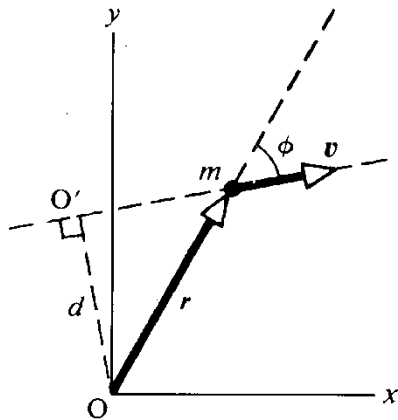


Η στροφορμή \mathbf{L} ενός σώματος μάζας m και ορμής \mathbf{p} που έχει επιβατική ακτίνα \mathbf{r} είναι $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Η τιμή του \mathbf{L} εξαρτάται από την αρχή των συντεταγμένων και είναι διάνυσμα κάθετο στο \mathbf{r} και στο \mathbf{p} .



Παραδείγματα

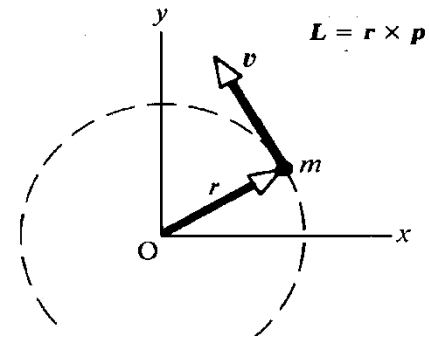
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.4 Γραμμική κίνηση



$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = rmv \sin \phi (-\mathbf{k}).$$

$$L = mvr \sin \phi = mvd$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11.5 Κυκλική κίνηση



Περιστροφή Στερεού σώματος γύρω από σταθερό άξονα

$$L_i = m_i r_i^2 \omega$$

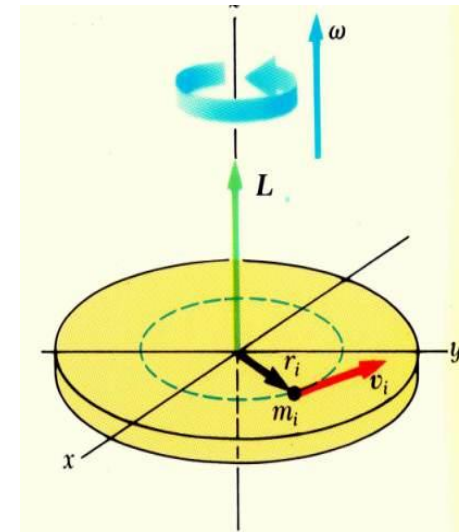
$$L_z = \sum m_i r_i^2 \omega = (\sum m_i r_i^2) \omega$$

$$L_z = I\omega$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

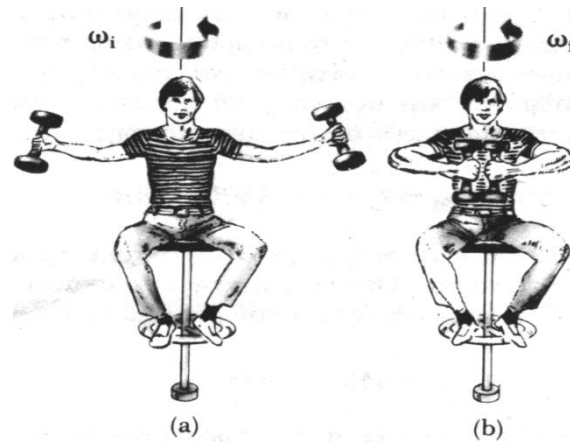
$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL_z}{dt} = I\alpha$$

Με άλλα λόγια, η συνισταμένη ροπή των εξωτερικών δυνάμεων οι οποίες δρουν πάνω σε ένα στερεό σώμα που περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα ισούται με το γινόμενο της ροπής αδράνειας, υπολογιζόμενης ως προς τον άξονα περιστροφής, επί την ως προς τον άξονα περιστροφής υπολογιζόμενη γωνιακή επιτάχυνση.



Όταν ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από άξονα, η στροφορμή L έχει την ίδια κατεύθυνση με τη γωνιακή ταχύτητα ω , διότι $L = I\omega$.

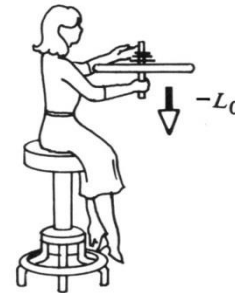
Διατήρηση της Στροφορμής (1 από 2)



Στη δεύτερη περίπτωση έχει μειωθεί η ροπή αδράνειας του συστήματος με αποτέλεσμα την αύξηση της γωνιακής ταχύτητας



Διατήρηση της Στροφορμής (2 από 2)



Αρχική $L_{\text{τροχού}} = L_0$

$L_{\text{συστήματος}} = 0$

Τελική $\Delta L_{\text{τροχού}} = -L_0 - L_0 = -2L_0$

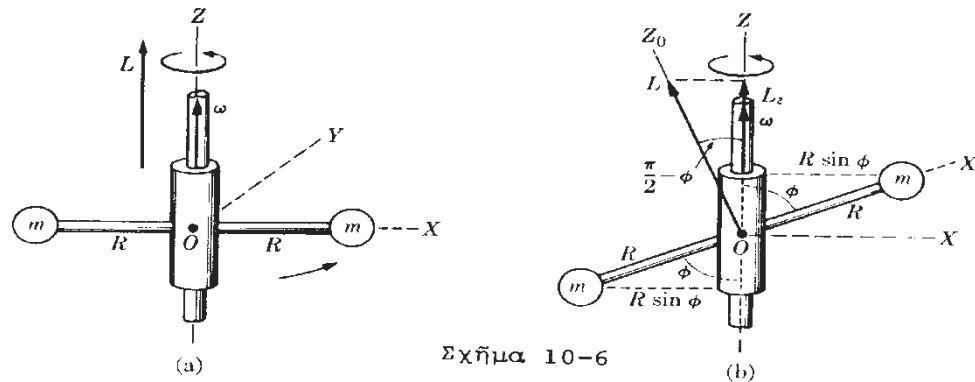
$\Delta L_{\text{συστήματος}} = 0$

Αν αρχικά ήταν ακίνητη, μετά την αναστροφή θα περιστρέφεται δεξιόστροφα, με στροφορμή $2L_0$



Περιστροφή γύρω από Σταθερό Άξονα

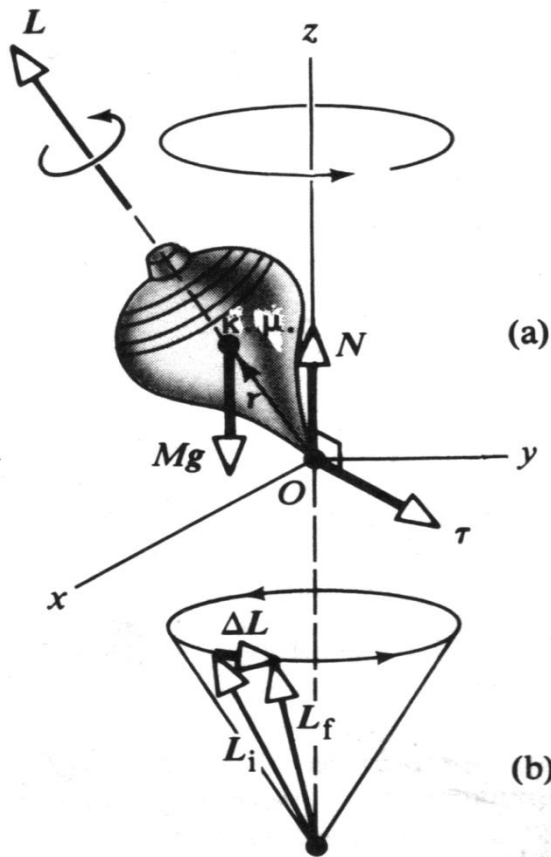
337



- a) Τα σώμα είναι συμμετρικό και ο άξονας της στροφορμής συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής.
- b) Λόγω της ασυμμετρίας του σώματος ο άξονας της στροφορμής δεν συμπίπτει με τον άξονα περιστροφής.
- a) Το διάνυσμα της στροφορμής περιστρέφεται γύρω από τον άξονα περιστροφής.
- b) Στον άξονα περιστροφής ασκείται ροπή ίση με dL/dt



Μετάπτωση Στρόβου (Σβούρας)

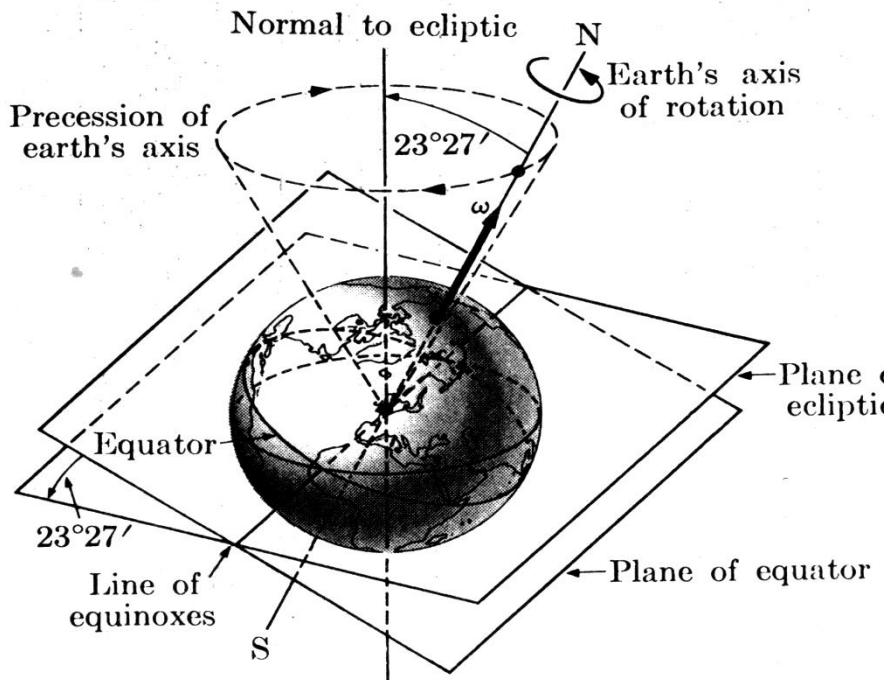


$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times m\mathbf{g}$$

$$\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$$

Ο στρόβος περιστρέφεται γύρω από τον άξονα συμμετρίας του. Οι μόνες εξωτερικές δυνάμεις που δρούν πάνω του είναι το βάρος $m\mathbf{g}$ και η κάθετη δύναμη \mathbf{N} . Η στροφορμή έχει τη διεύθυνση του άξονα συμμετρίας. Η ροπή $\boldsymbol{\tau}$ αναγκάζει το διάνυσμα της στροφορμής σε περιστροφή.

Αναλογία με την Κίνηση της Γης



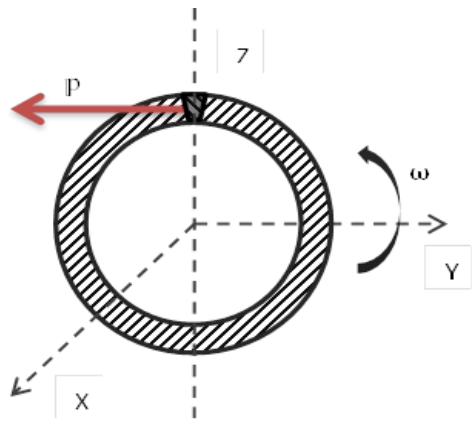
- Η Γη δεν είναι τέλεια συμμετρική.
- Οι έλξεις του Ηλίου και της Σελήνης δημιουργούν ροπές .
- Αποτέλεσμα η μεταπτωτική κίνηση του άξονα περιστροφής.
- Η περίοδος της κίνησης είναι 25.800 χρόνια.

Περιστροφή τροχού

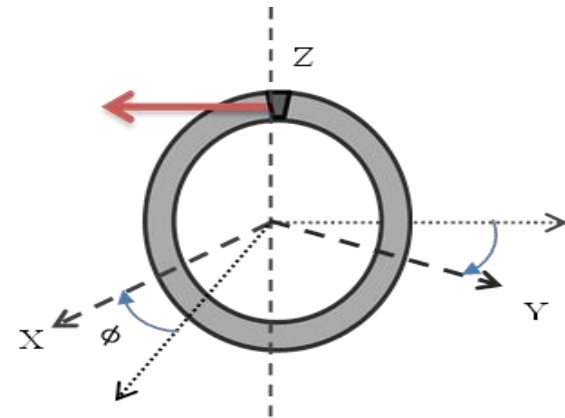
Για να αλλάξουμε τη διεύθυνση του περιστρεφόμενου τροχού, πρέπει να ασκήσουμε **ροπή** στον άξονα περιστροφής.



Ο τροχός περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω γύρω από τον άξονα X

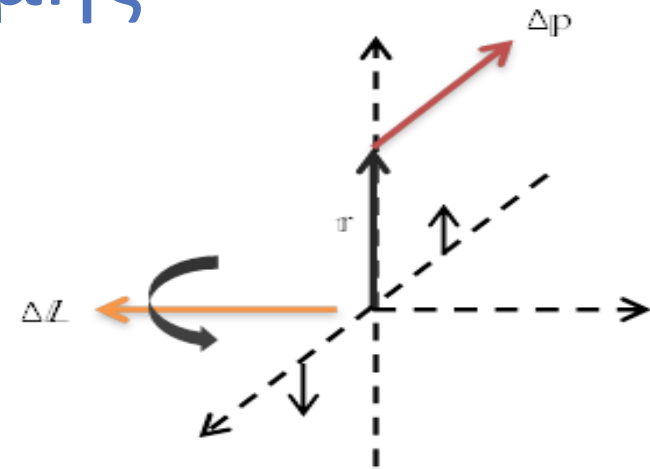
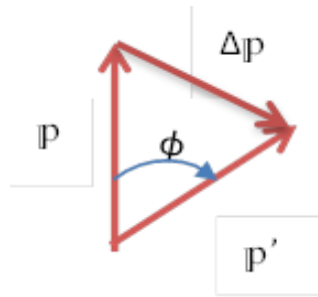


Ένα μικρό κομμάτι με μάζα dm , έχει ορμή \mathbf{p}



Αν περιστρέψουμε τον δίσκο γύρω από τον άξονα Z κατά μια γωνία ϕ , θα περιστραφεί και το διάνυσμα της ορμής \mathbf{p}

Χρειάζεται να ασκηθεί ροπή που θα προκαλέσει μεταβολή της στροφορμής



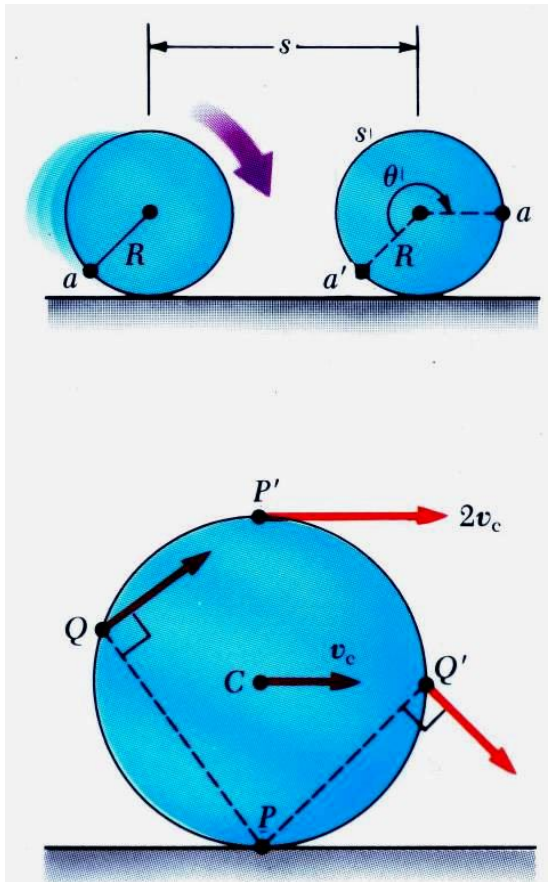
Η μεταβολή της ορμής Δp είναι κάθετη στο επίπεδο του τροχού. Η μεταβολή της ορμής προκαλεί μεταβολή της στροφορμής: ΔL

Για να προκληθεί το ΔL , πρέπει να ασκηθεί ένα ζεύγος δυνάμεων, κάθετο στον άξονα X και παράλληλο στο άξονα Z , όπως στο σχήμα.

$$\Delta L = r \times \Delta p$$



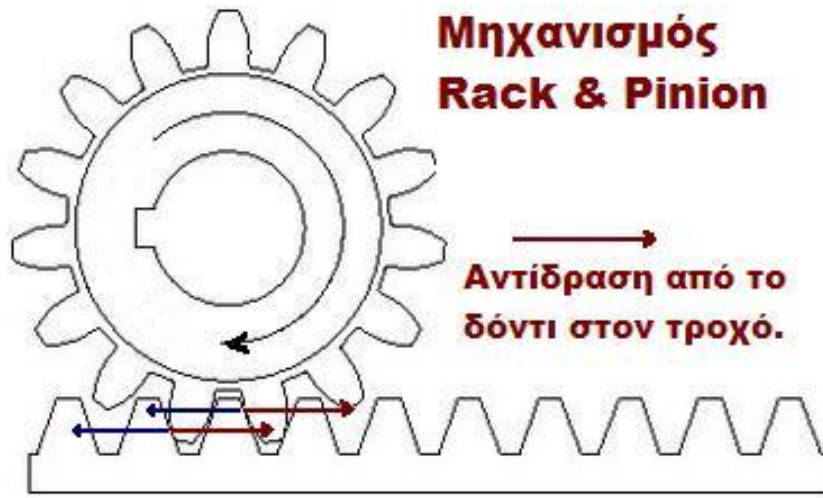
Κύλιση



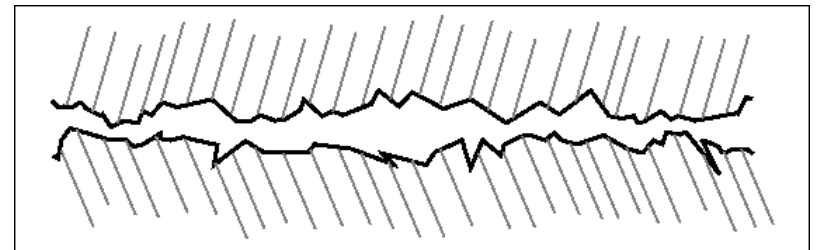
Όλα τα σημεία ενός κυλιόμενου σώματος κινούνται σε κατεύθυνση κάθετη προς τον άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής P. Το κέντρο του σώματος κινείται με ταχύτητα v_c , ενώ το σημείο P' κινείται με ταχύτητα $2v_c$



Ερμηνεία



Ο μηχανισμός μοιάζει με τον μηχανισμό της κύλισης. Η αντίδραση της τροχιάς σπρώχνει το γρανάζι προς τα εμπρός.

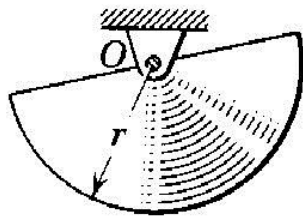


Οι μικρές ανωμαλίες των επιφανειών λειτουργούν όπως τα δόντια των γραναζιών!

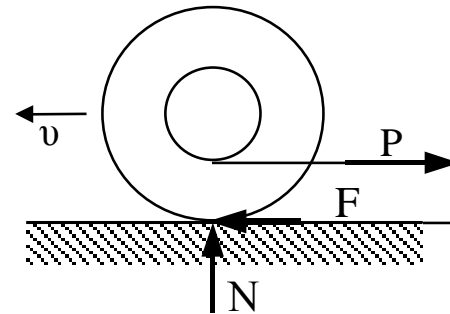


Ασκήσεις (1 από 3)

Ένα ομογενές ημικύκλιο, ακτίνας R και μάζας M . Υπολογίστε α) το κέντρο μάζας β) τη ροπή αδράνειας για άξονα που περνά από το κέντρο του. γ) Αν το κρεμάσουμε κατακόρυφα από άξονα που περνά από το κέντρο του, ποια είναι η περίοδος ταλάντωσης για μικρές γωνίες απόκλισης από την κατακόρυφο. Αποδείξτε τους τύπους που χρησιμοποιείτε.

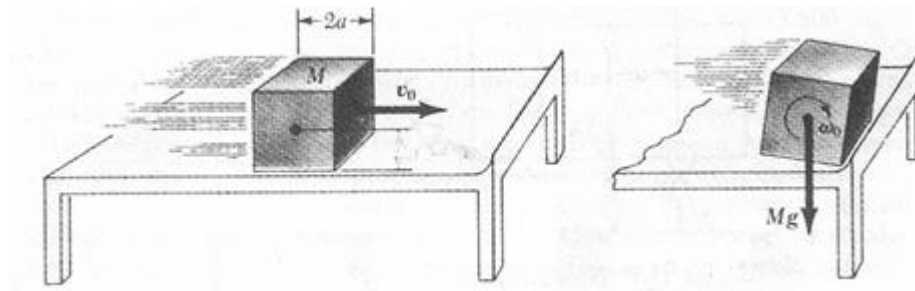


Ο τροχός του σχήματος κινείται χωρίς να ολισθαίνει με την επίδραση της δύναμης $P=1,5 \text{ t N}$. Η μάζα του είναι 60 kg και η ακτίνα αδράνειας $k=25 \text{ cm}$. ($I=mk^2$). Η εσωτερική ακτίνα είναι 20 cm και η εξωτερική 40 cm . Η αρχική του ταχύτητα είναι 1 m/s προς τα αριστερά. Ποια είναι η ταχύτητα του μετά από 10 s .



Ασκήσεις (2 από 3)

Ένας στερεός κύβος ακμής $2a$ και μάζας M γλιστράει σε μια λεία επιφάνεια με σταθερή ταχύτητα u_0 όπως στο Σχήμα 1α. Στη συνέχεια χτυπά σε ένα μικρό εμπόδιο στην άκρη του τραπέζιου, που κάνει στον κύβο να γείρει, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1β. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της u_0 έτσι ώστε ο κύβος να πέσει κάτω από το τραπέζι. Σημειώστε ότι η ροπή αδρανείας του κύβου ως προς έναν άξονα κατά μήκος μιας ακμής του είναι $\frac{8Ma^2}{3}$. (Υπόδειξη: ο κύβος υφίσταται μια μη ελαστική κρούση στο άκρο)



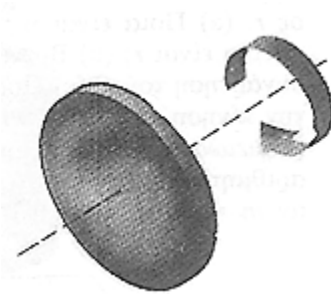
Σχήμα 1α

Σχήμα 1β



Ασκήσεις (3 από 3)

Ένας ομογενής συμπαγής δίσκος τίθεται σε περιστροφή γύρω από έναν άξονα που διέρχεται από το κέντρο του με γωνιακή ταχύτητα ω_0 . Ο περιστρεφόμενος δίσκος χαμηλώνεται και αφήνεται με αυτή τη γωνιακή ταχύτητα πάνω σε μια τραχιά οριζόντια επιβάνεια (βλ. Σχήμα 2). α) Ποια είναι η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου όταν συντελείται αμιγής κύλιση; β) Βρείτε το κλάσμα της κινητικής ενέργειας που χάθηκε από τη χρονική στιγμή που ο δίσκος αφέθηκε ελεύθερος μέχρι τη στιγμή που άρχισε η αμιγής κύλιση (Υπόδειξη: η στροφορμή ως προς έναν άξονα που διέρχεται από το σημείο επαφής διατηρείται).



Σχήμα 2



Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0



Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Γεώργιος Βούλγαρης 2015. Γεώργιος Βούλγαρης. «Γενική Φυσική. Ενότητα 7: Δυναμική Άκαμπτου Σώματος». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH115/>



Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση σχημάτων από το ακόλουθο έργο:

SERWAY, PHYSICS For Scientists & Engineers, τόμος I ΜΗΧΑΝΙΚΗ, Saunders College Publishing

