



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

# Γενική Φυσική

Ενότητα 1: Κινητική

Γεώργιος Βούλγαρης  
Σχολή Θετικών Επιστημών  
Τμήμα Μαθηματικών

# Τι είναι το διαφορικό (1 από 2)

Η μεταβολή μίας συνάρτησης  $f(x)$ , όταν το  $x$  αυξάνεται κατά  $\Delta x$  γράφεται :

$$\Delta y = A\Delta x + B(\Delta x)^2 + \dots$$

Αν οι όροι ανώτερης τάξης είναι μικροί, τότε η  $\Delta y$  προσεγγίζεται με:

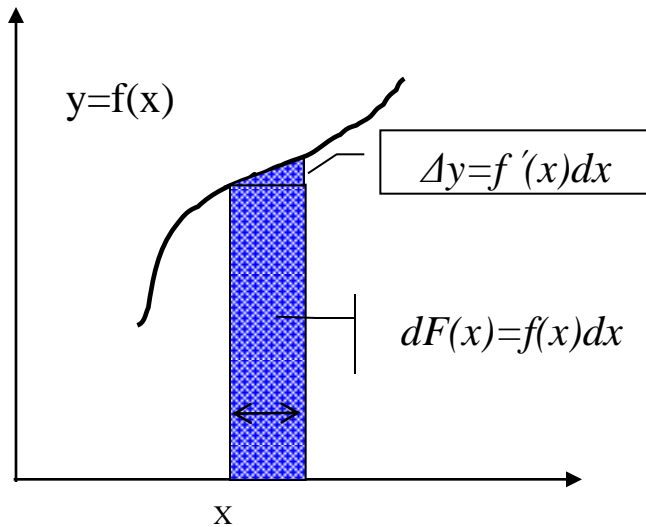
$$\Delta y \approx A \Delta x$$

Αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο  $x$ , υπάρχει η παράγωγος και είναι  $\neq 0$  τότε:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x$$



# Τι είναι το διαφορικό (2 από 2)



Αν το :

$$\Delta x \rightarrow dx,$$

Τότε :

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

Αν η  $F(x)$  αντιπαράγωγος της  $f(x)$  :

$$dF(x) = f(x)dx$$

και

$$F(x) = \int f(x)dx + c$$



# Χρησιμότητα

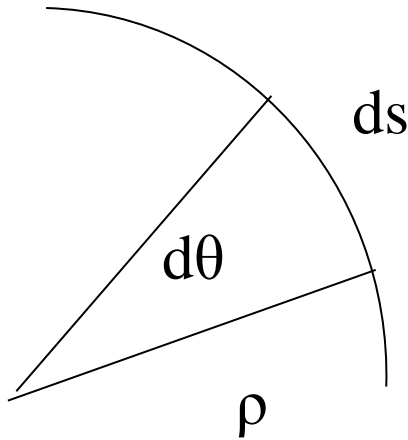
Όταν ισχύουν οι συνθήκες  $\exists f'(x) \ \& \ f'(x) \neq 0$

χρησιμοποιούμε το διαφορικό:

- Για προσέγγιση της συνάρτησης στη θέση  $x+\Delta x$
- Για προσδιορισμό της στοιχειώδους ποσότητας που θα ολοκληρώσουμε.



# Γωνιακή Ταχύτητα, Επιτάχυνση



$$ds = \rho d\theta \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\theta}{dt}$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{γωνιακή ταχύτητα}$$

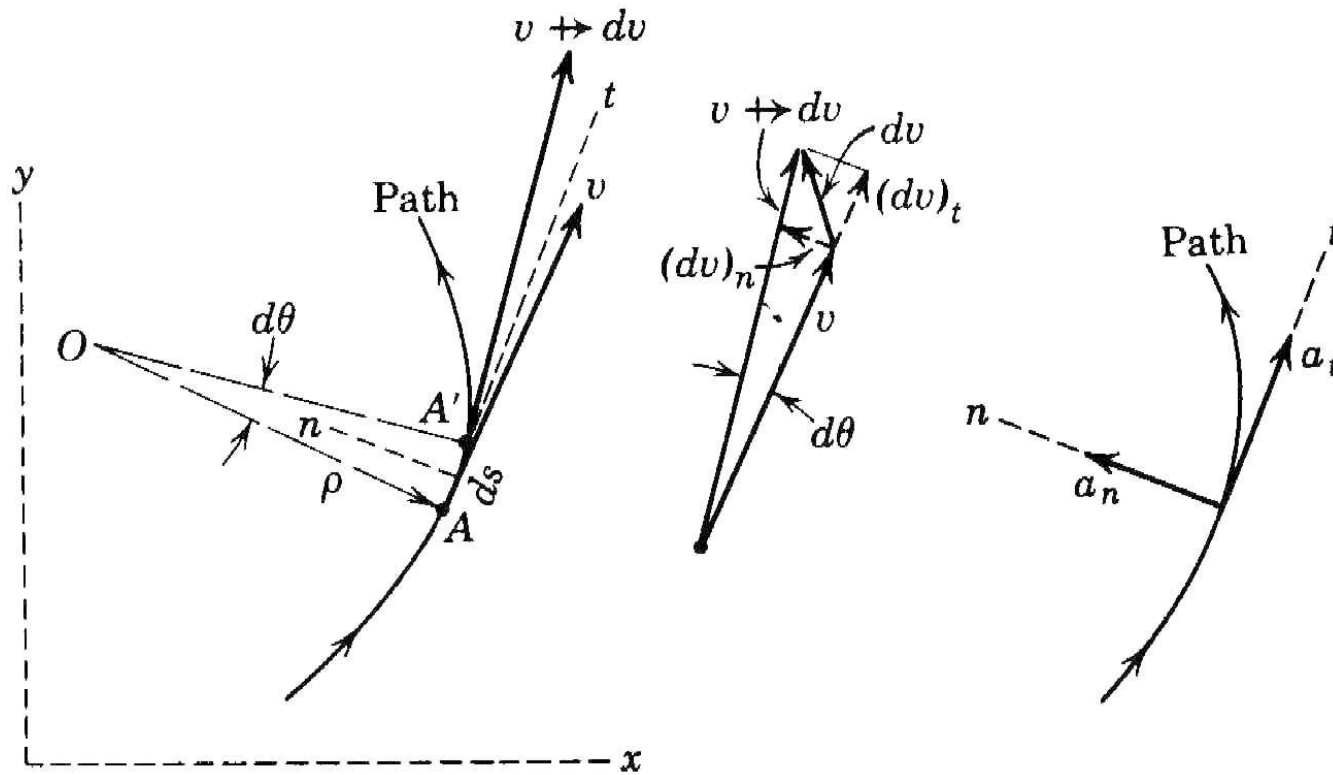
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{γωνιακή επιτάχυνση}$$

$$v = \rho\omega \quad \text{εφαπτομενική ταχύτητα}$$

$$a_T = \rho\alpha \quad \text{εφαπτομενική επιτάχυνση}$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \rho\omega^2 = v\omega \quad \text{κεντρομόλος επ.}$$

# Ανάλυση επιτάχυνσης (1 από 2)



$O$  είναι το στιγμιαίο κέντρο περιστροφής

$\rho$  είναι η στιγμιαία ακτίνα καμπυλότητας

# Ανάλυση επιτάχυνσης (2 από 2)

$$d\vec{v} = \hat{N}dv_N + \hat{T}dv_T$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \hat{N} \frac{dv_N}{dt} + \hat{T} \frac{dv_T}{dt}$$

Το **T** είναι η διεύθυνση της ταχύτητας, μοναδιαίο εφαπτομενικό.

Το **N** είναι μοναδιαίο κάθετο προς το **T** με φορά προς το κοίλο της τροχιάς.

$$dv_N = v \cdot d\phi$$

$$\Rightarrow \frac{dv_N}{dt} = v \frac{d\phi}{dt} = v \frac{ds/\rho}{dt} = v^2 / \rho$$

$$a_T = \frac{dv_T}{dt} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

Τελικά :

$$\vec{a} = \hat{N} \frac{v^2}{\rho} + \hat{T} \frac{dv}{dt}$$



# Ανάλυση σε Εφαπτομενική και Επιτρόχια Επιτάχυνση

Το  $T$  είναι μοναδιαίο εφαπτομενικό.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{T}v) = \frac{d\hat{T}}{dt}v + \hat{T}\frac{dv}{dt}$$

$$d\hat{T} = |\hat{T}|\hat{N}d\phi = \hat{N}d\phi$$

$$d\phi = \frac{ds}{\rho}$$

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = \hat{N} \frac{1}{\rho} \frac{ds}{dt} = \hat{N} \frac{v}{\rho}$$

Το  $\hat{N}$  είναι μοναδιαίο κάθετο στην τροχιά.

Τελικά :

$$\vec{a} = \hat{N} \frac{v^2}{\rho} + \hat{T} \frac{dv}{dt}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_N + \vec{a}_T$$





# Διευκρινίσεις

- Το  $\rho$  είναι η Ακτίνα Καμπυλότητας της τροχιάς, στο σημείο που υπολογίζουμε την επιτάχυνση.
- Γεωμετρικά αντιστοιχεί στην καμπύλη του κύκλου που εφάπτεται εσωτερικά στην τροχιά.
- Η εφαπτομενική συνιστώσα της επιτάχυνσης  $\alpha_T$  ονομάζεται Επιτρόχια.
- Η κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης  $\alpha_N$  ονομάζεται Κεντρομόλος.
- Η Επιτρόχια επιτάχυνση μεταβάλλει το μέτρο της ταχύτητας.
- Η Κεντρομόλος μεταβάλλει τη διεύθυνση της ταχύτητας.



# Κυκλική Τροχιά

Οι τύποι απλοποιούνται πολύ για την κυκλική τροχιά.

$$\rho = R \quad \text{σταθερή}$$

$$v = ds/dt = R d\theta/dt = \omega R$$

$$a_N = v^2/R$$

$$a_T = dv/dt = R d\omega/dt = \alpha R$$

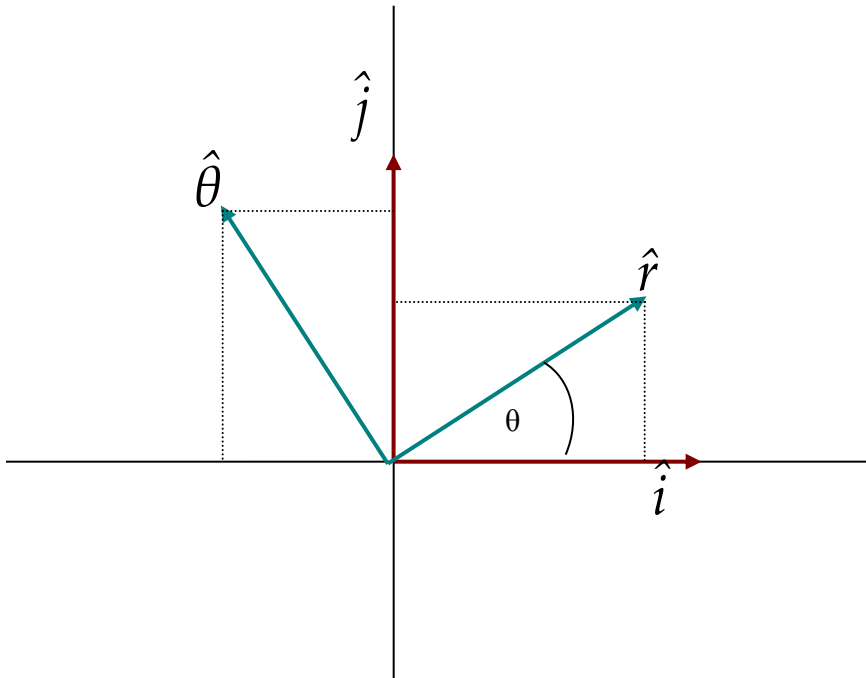


# Διευκρίνισεις

- Στα προηγούμενα, η ανάλυση σε ακτινική και εφαπτομενική συνιστώσα, γίνεται σε κάθε σημείο της τροχιάς.
- Δηλαδή φτιάχνω σύστημα σύστημα αξόνων που κινείται μαζί με το σώμα.



# Ταχύτητα σε Πολικές Συντεταγμένες, 2-Δ

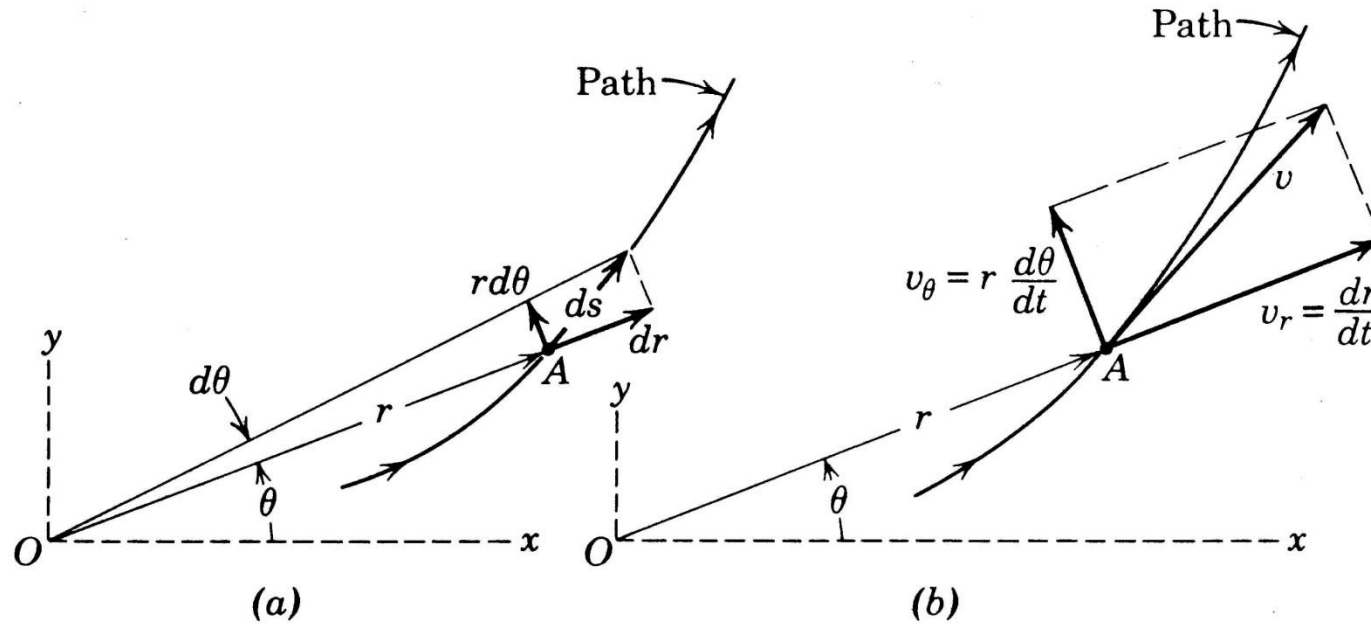


- Προβάλλουμε τα διανύσματα  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  στους άξονες X, Y.
- Όλα τα διανύσματα έχουν μήκος μονάδα.

$$\hat{r} = \cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}$$

$$\hat{\theta} = -\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}$$

# Ταχύτητα σε Πολικές Συντεταγμένες



$$d\vec{s} = d\vec{r} + r d\vec{\theta}$$

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta$$

$$v_r = \frac{dr}{dt}$$

# Παραγωγή προς $\rho, \theta$

$$\vec{r} = \rho \hat{r}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \hat{r} + \rho \frac{d\hat{r}}{dt}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d}{dt} (\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) =$$

$$(-\sin\theta \hat{i} + \cos\theta \hat{j}) \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{r}}{dt} = \hat{\theta} \frac{d\theta}{dt}$$

Ακτινική  $u_r$

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt} \hat{r} + \rho \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}$$

Εφαπτομενική  $u_t$

# Εφαπτομενική επιτάχυνση

Η ανάλυση της Εφαπτομενικής Επιτάχυνσης είναι πιο πολύπλοκη.

$$\text{Στιγμιαία Ταχύτητα: } v = \rho \left( \frac{d\theta}{dt} \right)$$

Εφαπτομενική Επιτάχυνση:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \rho \frac{d\theta}{dt} \right)$$

$$= \rho \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\rho}{dt} \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \rho a + \omega \frac{d\rho}{dt}$$

Γωνιακή Επιτ.

Γωνιακή Ταχ.

Ακτινική  
Ταχύτητα



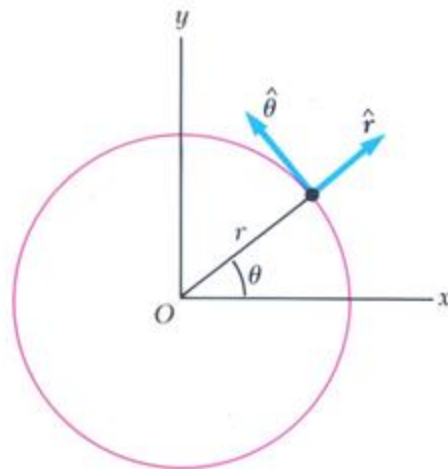
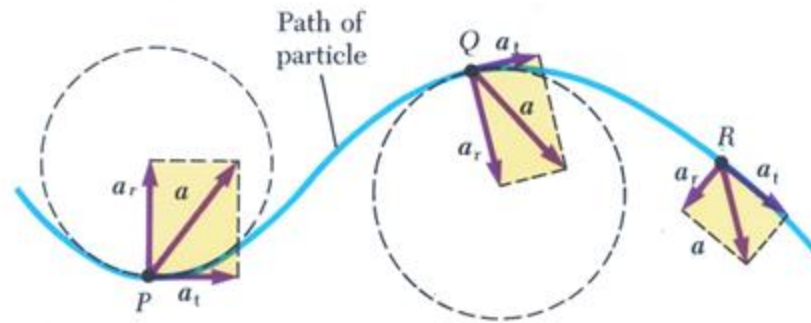
# Διευκρίνισεις

- Στα προηγούμενα, το σύστημα αξόνων δεν σχετίζεται με την θέση του σώματος.
- Το διάνυσμα  $\mathbf{r}$  είναι το διάνυσμα θέσης του σώματος, και  $\theta$  η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα  $X$ .
- Στην επόμενη διαφάνεια, το σύστημα αξόνων βρίσκεται στο κέντρο του κύκλου.

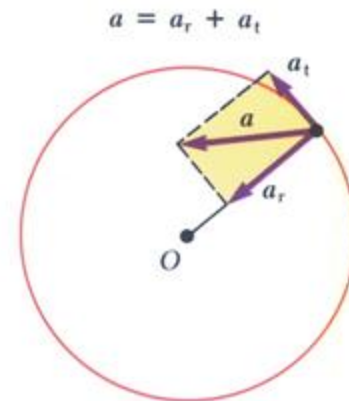




# Εφαπτομενική και Κεντρομόλος Επιτάχυνση σε Κυκλική Κίνηση



(a)



(b)

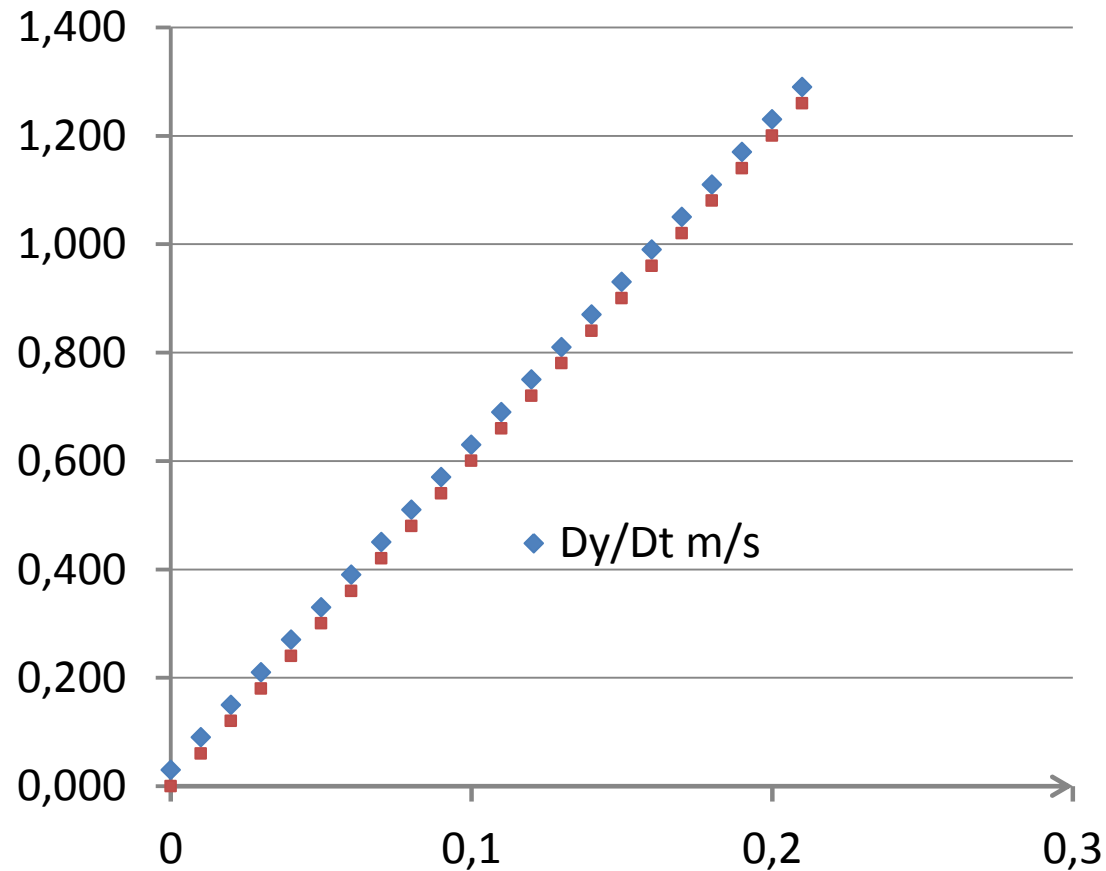


# Υπολογισμός Παραγώγου

$$y = 3x^2$$

**Dt=0,0**  
**1s**

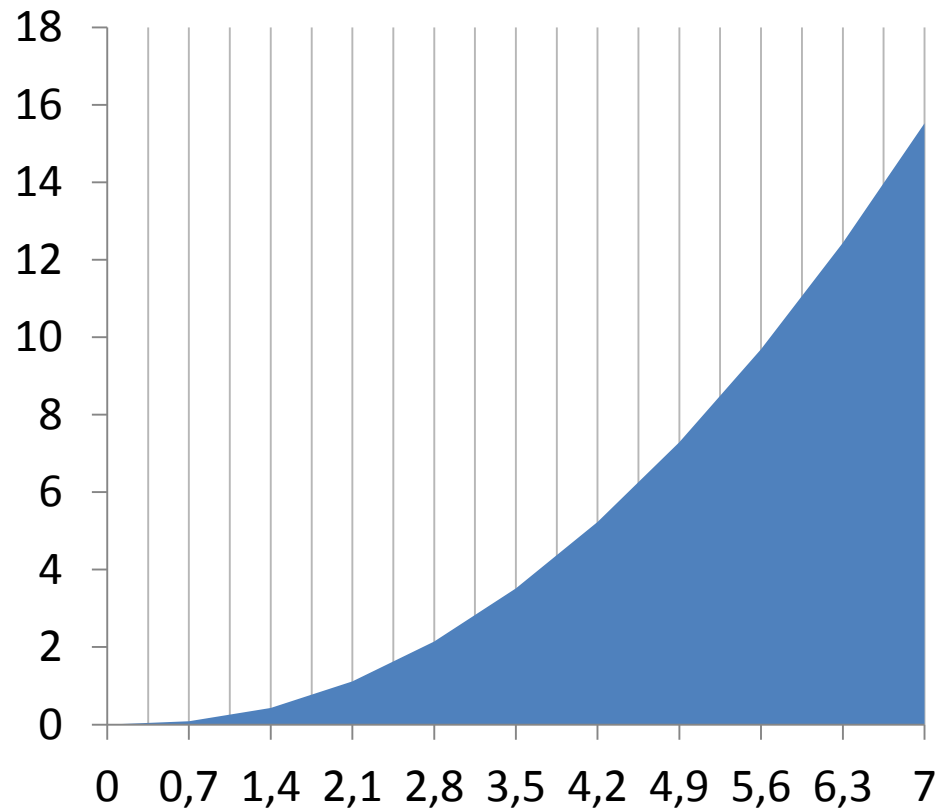
Κλίση, παράγωγος



# Ολοκλήρωση Μέθοδος Τραπεζίων

- $y = \frac{1}{2}x^2$
- $W=0,7$
- $\%diff=0,005$

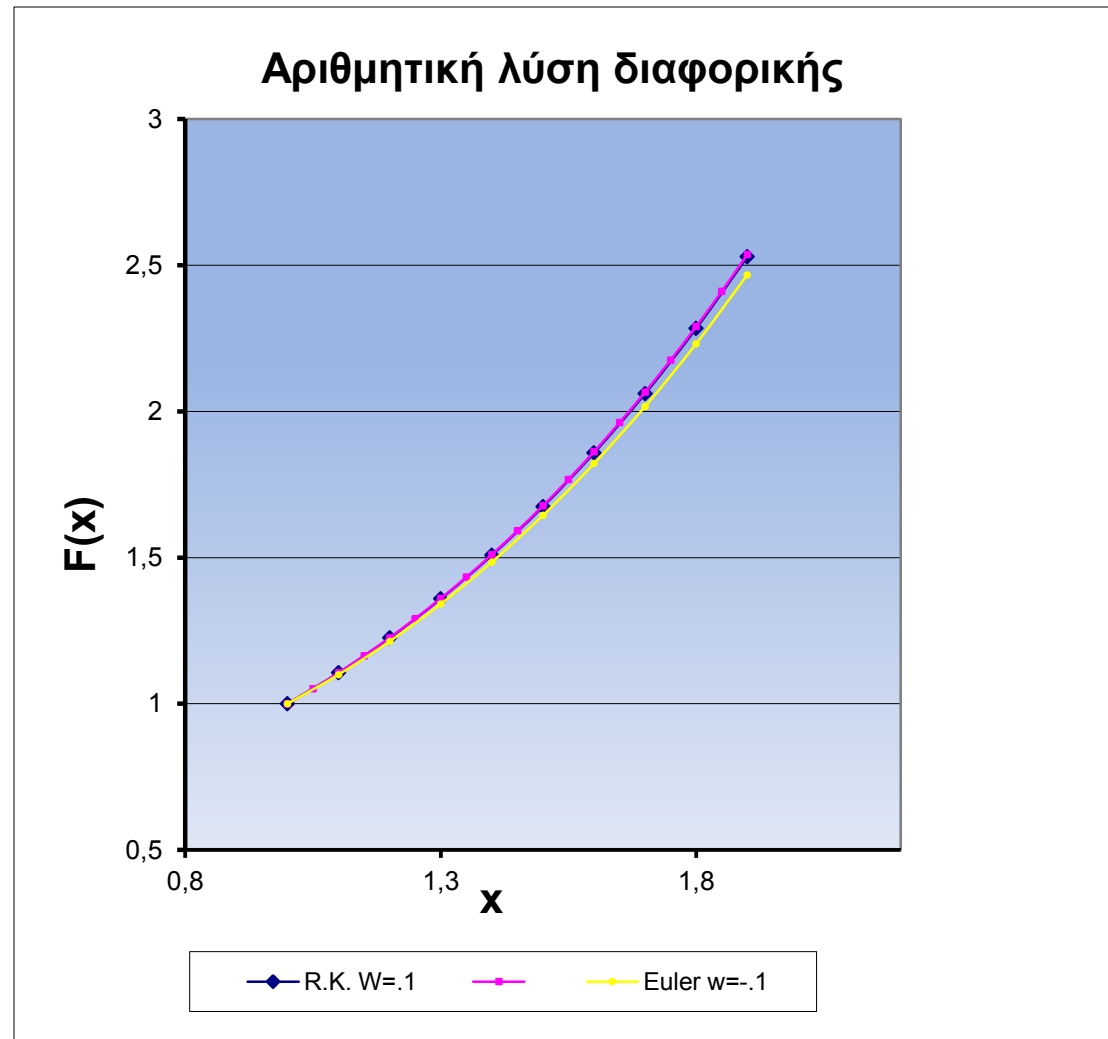
**Άθροισμα=57,452  
5  
Αναλυτικά=57,  
1667**



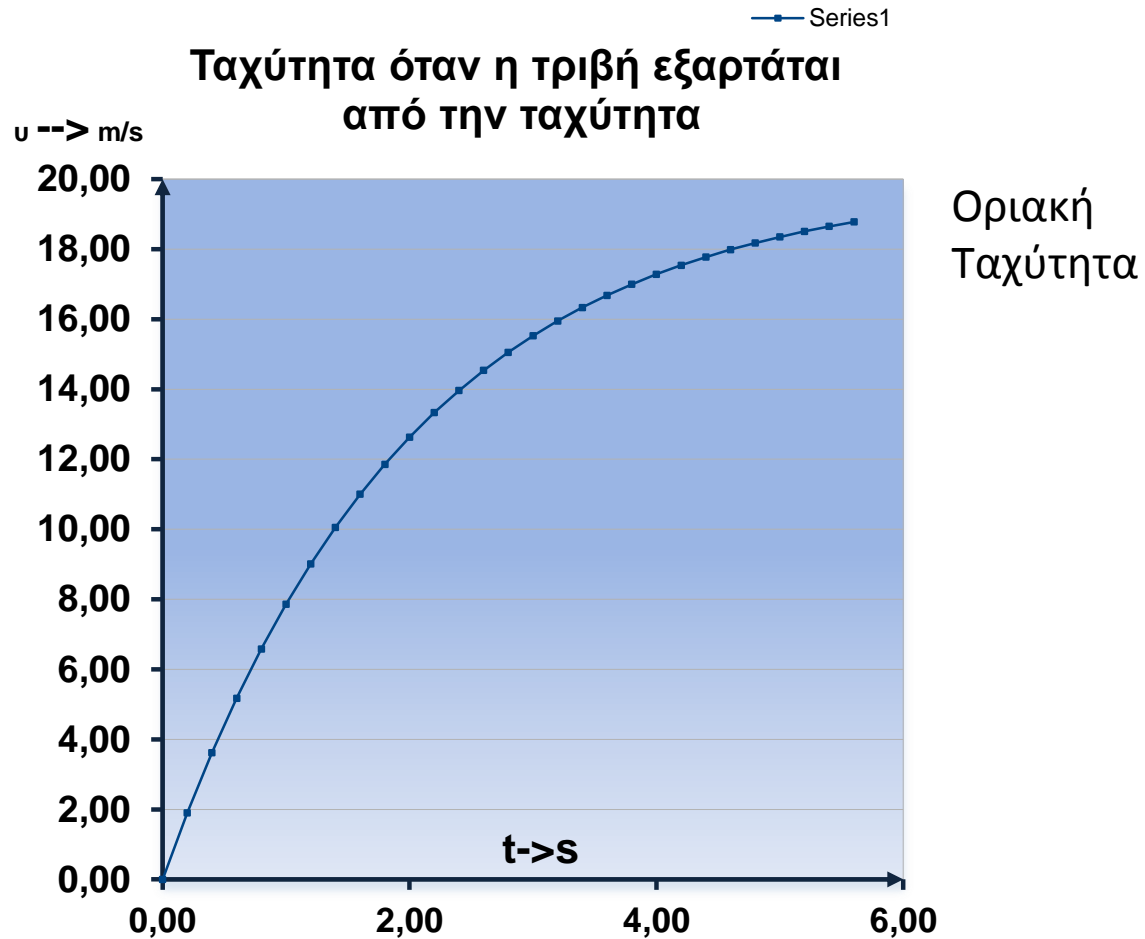
# Αριθμητική Λύση Διαφορικής

$$y' = xy^{\frac{1}{3}}$$

**Μέθοδοι:**  
**Euler**  
**Runge-Kutta**

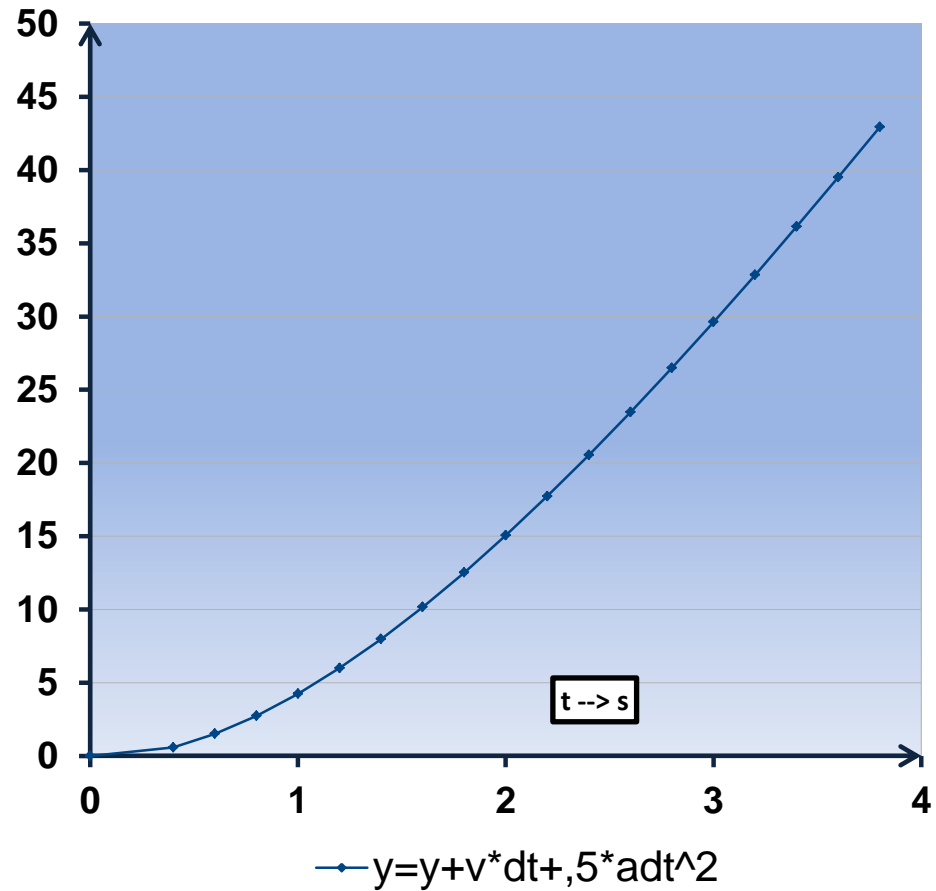


# Ταχύτητα όταν $a = -ku$



# Απόσταση

$y \rightarrow m$  Απόσταση όταν η τριβή εξαρτάται από την ταχύτητα



Τέλος Ενότητας

# Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.





Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0



# Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικών και Καποδιστριακών Πανεπιστημίων Αθηνών, Γεώργιος Βούλγαρης 2015. Γεώργιος Βούλγαρης. «Γενική Φυσική. Ενότητα 1: Κινητική». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: <http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH115/>



# Σημείωμα Αδειοδότησης

Το παρόν υλικό διατίθεται με τους όρους της άδειας χρήσης Creative Commons Αναφορά, Μη Εμπορική Χρήση Παρόμοια Διανομή 4.0 [1] ή μεταγενέστερη, Διεθνής Έκδοση. Εξαιρούνται τα αυτοτελή έργα τρίτων π.χ. φωτογραφίες, διαγράμματα κ.λ.π., τα οποία εμπεριέχονται σε αυτό και τα οποία αναφέρονται μαζί με τους όρους χρήσης τους στο «Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων».



[1] <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Ως **Μη Εμπορική** ορίζεται η χρήση:

- που δεν περιλαμβάνει άμεσο ή έμμεσο οικονομικό όφελος από την χρήση του έργου, για το διανομέα του έργου και αδειοδόχο
- που δεν περιλαμβάνει οικονομική συναλλαγή ως προϋπόθεση για τη χρήση ή πρόσβαση στο έργο
- που δεν προσπορίζει στο διανομέα του έργου και αδειοδόχο έμμεσο οικονομικό όφελος (π.χ. διαφημίσεις) από την προβολή του έργου σε διαδικτυακό τόπο

Ο δικαιούχος μπορεί να παρέχει στον αδειοδόχο ξεχωριστή άδεια να χρησιμοποιεί το έργο για εμπορική χρήση, εφόσον αυτό του ζητηθεί.



# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση σχημάτων από το ακόλουθο έργο:

SERWAY, PHYSICS For Scientists & Engineers, τόμος I ΜΗΧΑΝΙΚΗ, Saunders College Publishing

