ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

# Ιστορία νεότερων Μαθηματικών

## Ενότητα 3: Η Άλγεβρα της Αναγέννησης

Παπασταυρίδης Σταύρος
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

# Περιγραφή Ενότητας

Ιταλοί Αβακιστές. Αλγεβρικός Συμβολισμός. Άλγεβρα στην Γαλλία, Γερμανία, Αγγλία. Εξισώσεις τρίτου και τετάρτου βαθμού. Μιγαδικοί αριθμοί. Εξισώσεις τετάρτου βαθμού και συμμετρίες.

# Περιεχόμενα Υποενότητας

- Συμμετρικά πολυώνυμα
- Κεντρική ιδέα
- Τινά για τον Lagrange

# Η Άλγεβρα της Αναγέννησης

Lagrange, λύση τεταρτοβάθμιας εξίσωσης

# Συμμετρικά Πολυώνυμα (1/2)

ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ
και ΡΙΖΕΣ

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 , \quad a_n \neq 0$$

$n > 0$, συντελεστες μιγαδικοι

Εχει $n$ ριζες $\rho_1, \dots, \rho_n$ και

ισχυει

$$f(x) = a_n (x-\rho_1) \cdots (x-\rho_n)$$

και

$$(-1)\frac{a_i}{a_n} = \sum \rho_{j_1}\rho_{j_2}\cdots\rho_{j_i} = \sigma_i(\rho_1,\dots,\rho_n)$$

Οπου $(j_1, j_2, \dots, j_i)$ ειναι μια $i$-αδα

απο τους $(1, 2, \dots, n)$

# Συμμετρικά Πολυώνυμα (2/2)

Θεωρημα: Καθε πολυωνυμο $\varphi(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ που ειναι συμμετρικο ως προς τις μεταβλητες $\rho_1, \ldots, \rho_n$, μπορει να εκφρασθει ως πολυωνυμο των $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

Π.χ. $\rho_1^2 + \ldots + \rho_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$

# Κεντρική Ιδέα

01

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΙΔΕΑ μελετης ΡΙΖΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ μεσω ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ.

Εστω $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ενα πολυωνυμο βαθμου $n$, με ριζες $\rho_1, \dots, \rho_n$, $a_n \neq 0$ και $n > 1$.

# Κεντρική Ιδέα (1/11)

Ξερουμε οτι

$$p(x) = a_n(x-\rho_1)\dots(x-\rho_n)$$

αρα $e_1 = \sum \rho_i = \rho_1 + \dots + \rho_n = (-1)^1 \frac{a_{n-1}}{a_n}$

$e_2 = \sum \rho_i \rho_{i+1} = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \dots \rho_{n-1}\rho_n = (-1)^2 \frac{a_{n-2}}{a_n}$

$\dots$

$e_n = \sum \rho_1 \cdots \rho_n = (-)^n \frac{a_n}{a_n}$

Εστω τωρα $\sigma(\rho_1, \dots, \rho_n)$

ενα πολυωνυμο τυχον των

$\rho_1, \dots, \rho_n$

Προσοχη. Τα $\rho_1, \dots, \rho_n$ ειναι εδω

<u>μεταβλητες</u>

# Κεντρική Ιδέα (2/11)

(02)

Εστω $\sigma$ μια <u>μεταθεση</u> του συνολου $\{1, 2, \ldots, n\}$. Δηλαδη η $\sigma$ ειναι $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ αμφιμονοσημαντη απεικονιση.

Οριζουμε $\sigma f(p_1, \ldots, p_n)$ το πολυωνυμο $f(p_{\sigma(1)}, \ldots, p_{\sigma(n)})$

# Κεντρική Ιδέα (3/11)

Θεωραμε τωρα ενα συγκεκριμενο πολυωνυμο $f(\rho_1, \dots, \rho_n)$ και θεωρουμε ολα τα πολυωνυμα που προκυπτουν με εφαρμογη μεταθεσεων $\sigma$, $\sigma f$, ας πουμε οτι αυτα ειναι τα

$f_1, \dots, f_k$ $\quad k \leq n!$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. Το $k$ διαιρει το $n!$ (Lagrange)

# Κεντρική Ιδέα (4/11)

Θ3 Θεωρημα. Εστω $f(x_1, \ldots, x_k)$ συμμετρικο πολυωνυμο ως προς $x_1, \ldots, x_k$. Τοτε το $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ ειναι συμμετρικο ως προς $\rho_1, \ldots, \rho_n$.

# Κεντρική Ιδέα (5/11)

Πορισμα. Στην θεση του $f$
μπορουμε να βαλουμε τα $e_1, \ldots, e_k$
τα στοιχειωδη συμμετρικα πολυωνυμα
ως προς $\rho_1, \ldots, \rho_k$. Αρα τα $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$
ειναι λυσεις εξισωσεως βαθμου $k$.
Αν το $k$ ειναι βαθμου $< n$ και
Αν το $\sigma$ μαζυ με τα αλλα στοιχειωδη
συμμετρικα πολυωνυμα των $\rho_1, \ldots, \rho_n$
Ισως τελικα να μπορουμε να βρουμε
τα $\rho_1, \ldots, \rho_n$ !

# Κεντρική Ιδέα (6/11)

06

Εξισωση $4^{ου}$ βαθμου

$$ax^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\varepsilon$$

με ριζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$.

Υπαρχει πολυωνυμο $\sigma(\rho_1, \dots, \rho_4)$ τετοιο ωστε οι μεταθεσεις των $\rho_1, \dots, \rho_4$ δινουν αλλα δυο πολυωνυμα (συνολικα 3), ωστε το $\sigma(\rho_1, \dots, \rho_4)$ ειναι ριζα 3 βαθμιαι εξισωσεις?

# Κεντρική Ιδέα (7/11)

Επιλεγουμε

$$\sigma(\rho_1, \dots, \rho_4) = \rho_1\rho_2 + \rho_3\rho_4$$

τα αλλα δυο ειναι τα $\rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_4$, $\rho_1\rho_4 + \rho_2\rho_3$

Οποτε ξερουμε τα $\rho_1\rho_2$, $\rho_1\rho_3$, $\rho_1\rho_4$, $\rho_2\rho_3$, $\rho_2\rho_4$, $\rho_3\rho_4$.

Διοτι ξερουμε το $\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4$, αρα τα $\rho_1\rho_2$ κλπ προκυπτουν σαν ριζες βαθμιας εξισωσης

# Κεντρική Ιδέα (8/11)

Θ7 επισης

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4 = -\frac{\beta}{\alpha}$$

αρα $$\rho_1^2 + \underline{\rho_1(\rho_2+\rho_3+\rho_4)} = -\frac{\beta\rho_1}{\alpha}$$

$\boxed{\rho_1^2 \cancel{+ \rho_1\left(-\frac{\beta}{\alpha} - \rho_1\right)}}$ γνωστον

# Τυποποίηση Ιδέας

<u>Α.8.ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ</u>.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε εξισώσεις τετάρτου βαθμού και θα εκφράσουμε τις λύσεις τους με τύπους που περιέχουν τους συντελεστές της εξίσωσης, αλγεβρικές πράξεις και ριζικά.

'Ολα τα πολυώνυμα του κεφαλαίου αυτού, θα έχουν πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές. Η αλήθεια είναι ότι η θεωρία για την εύρεση των ριζών τεταρτοβάθμιου πολυωνύμου που θα παρουσιάσουμε γενικεύεται χωρίς μεγάλη δυσκολία σε ευρύτερη κατηγορία σωμάτων, αλλά, δεν θα ασχοληθούμε με αυτή την γενίκευση.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το πολυώνυμο:

<u>Α.8.1</u>. $g=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$

του οποίου θα βρούμε τις ρίζες. Με άλλα λόγια, θα λύσουμε την εξίσωση $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$

# Κεντρική Ιδέα (10/11)

Σε αντιστοιχία με το προηγούμενο κεφάλαιο, θεωρούμε το πολυώνυμο

<u>Α.8.2</u>. $f(x)=g(x-\frac{\alpha}{4})=x^4+px^2+qx+r$, όπου

$p=\beta-\frac{3\alpha^2}{8}$, $q=\frac{\alpha^3}{8}-\frac{\alpha\beta}{2}+\gamma$ $r=\frac{-3\alpha^4}{256}+\frac{\alpha^4\beta}{16}+\delta$.

Το πολυώνυμο f, είναι απλούστερο από το g, διότι δεν έχει τριτοβάθμιο όρο. Εξ άλλου αν βρούμε τις ρίζες του f, τότε θα έχουμε βρεί και τις ρίζες του g, διότι οι ρίζες του g προκύπτουν από τις ρίζες του f, αν αυτές οι τελευταίες μειωθούν κατά $\frac{\alpha}{4}$.

'Αρα, είναι αρκετό να βρούμε τις ρίζες του f.

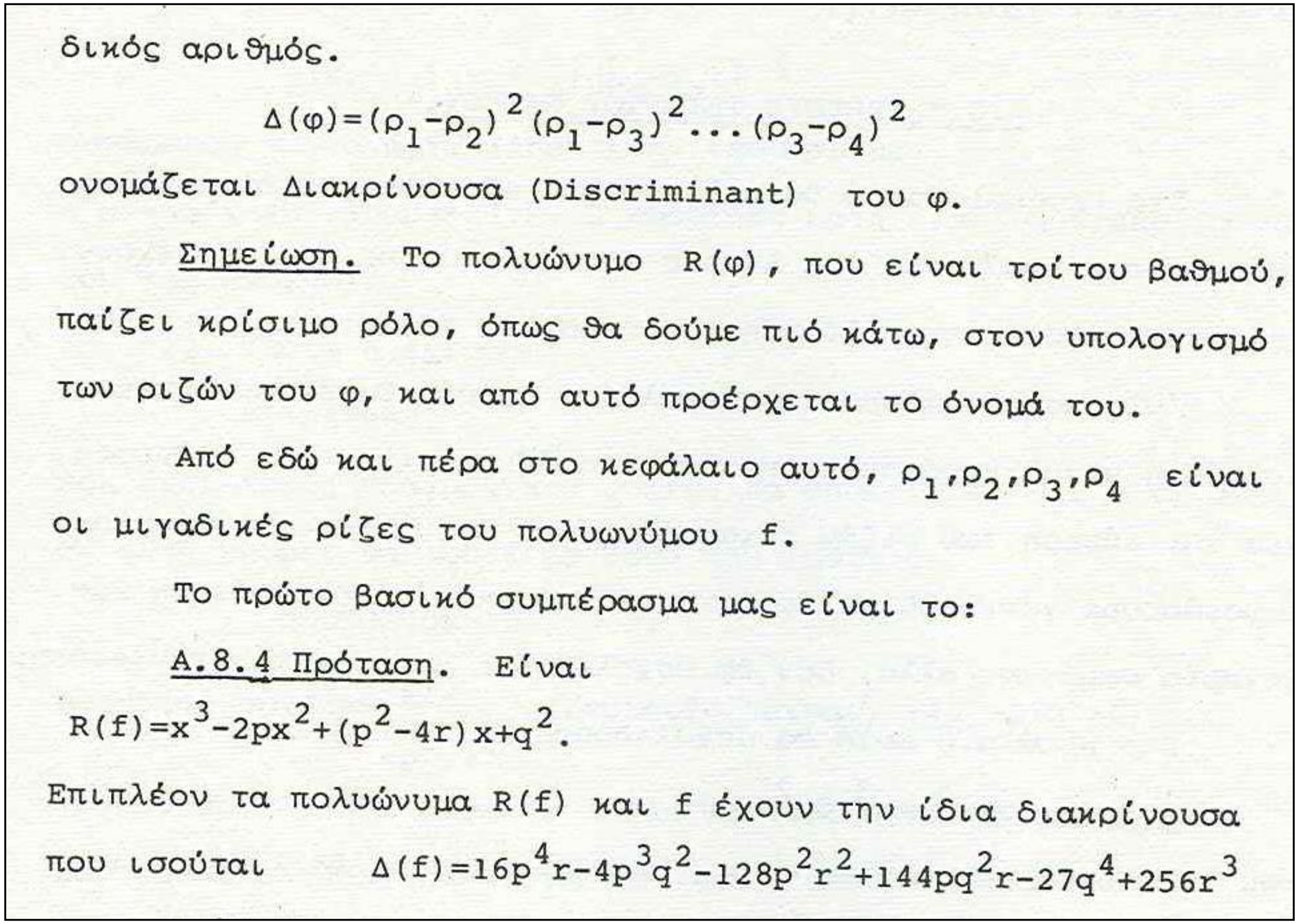
Στην συνέχεια εισάγουμε δύο σπουδαίους ορισμούς.

<u>Α.8.3.Ορισμός</u>. 'Εστω φ είναι ένα μιγαδικό πολυώνυμο τετάρτου βαθμού και $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ είναι οι ρίζες του. Το πολυώνυμο

$R(\varphi)=(x-(\rho_1+\rho_2)(\rho_2+\rho_3))(x-(\rho_1+\rho_3)(\rho_2+\rho_3))(x-(\rho_1+\rho_4)(\rho_2+\rho_3))$

ονομάζεται Κυβική Επιλύουσα (Cubic Resolvent) του φ. Ο μιγα-

# Κεντρική Ιδέα (11/11)



δικός αριθμός.

$$\Delta(\varphi)=(\rho_1-\rho_2)^2(\rho_1-\rho_3)^2\ldots(\rho_3-\rho_4)^2$$

ονομάζεται Διακρίνουσα (Discriminant) του φ.

Σημείωση. Το πολυώνυμο $R(\varphi)$, που είναι τρίτου βαθμού, παίζει κρίσιμο ρόλο, όπως θα δούμε πιό κάτω, στον υπολογισμό των ριζών του φ, και από αυτό προέρχεται το όνομά του.

Από εδώ και πέρα στο κεφάλαιο αυτό, $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$ είναι οι μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου f.

Το πρώτο βασικό συμπέρασμα μας είναι το:

A.8.4 Πρόταση. Είναι

$$R(f)=x^3-2px^2+(p^2-4r)x+q^2.$$

Επιπλέον τα πολυώνυμα R(f) και f έχουν την ίδια διακρίνουσα που ισούται $\Delta(f)=16p^4r-4p^3q^2-128p^2r^2+144pq^2r-27q^4+256r^3$

# Υπενθύμιση της Ιδέας μετά από πράξεις

<u>Απόδειξη</u>. Για συντομογραφία θέτουμε

$$\delta_1=(\rho_1+\rho_2)(\rho_3+\rho_4)$$
$$\delta_2=(\rho_1+\rho_3)(\rho_2+\rho_4)$$
$$\delta_3=(\rho_1+\rho_4)(\rho_2+\rho_3).$$

Επίσης ως γνωστόν είναι

$$\rho_1+\ldots+\rho_4=0$$
$$\Sigma\rho_1\rho_2=p$$
$$\Sigma\rho_1\rho_2\rho_3=-q$$
$$\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4=r.$$

Ο συντελεστής του $x^2$ στο $R(f)$ είναι

$$-(\delta_1+\delta_2+\delta_3)=-2(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\ldots+\rho_3\rho_4)$$
$$=-2p$$

Επειδή

$$\rho_1+\rho_2+\rho_3+\rho_4=0$$

# Τυποποίηση Ιδέας (1/5)

Έστω $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ είναι οι ρίζες του $R(f)$. Με βάση το προηγούμενο κεφάλαιο, τα $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ μπορούμε να τα υπολογίσουμε διότι είναι ρίζες τριτοβάθμιου πολυωνύμου. Οι ρίζες του $f$, θα εκφρασθούν δια μέσου των $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Όπως ξέρουμε κάθε μιγαδικός αριθμός, $\neq 0$, έχει δύο τετραγωνικές ρίζες που είναι αντίθετες.

<u>Α.8.5.Ορισμός</u>. Τα $\sqrt{-\delta_1}$, $\sqrt{-\delta_2}$, $\sqrt{-\delta_3}$ είναι μια επιλογή τετραγωνικών ριζών, των $(-\delta_1)$, $(-\delta_2)$, $(-\delta_3)$, έτσι ώστε

$$\sqrt{-\delta_1} \cdot \sqrt{-\delta_2} \cdot \sqrt{-\delta_3} = -q$$

Αυτή η επιλογή είναι δυνατή, διότι

$$(-\delta_1)(-\delta_2)(-\delta_3) = -q^2. \quad (\text{Γιατί;}).$$

Και τώρα φθάνουμε στο κύριο στοιχείο αυτού του κεφαλαίου.

# Τυποποίηση Ιδέας (2/5)

<u>Α.8.6.Θεώρημα.</u> Οι παρακάτω μιγαδικοί είναι οι ρίζες του f:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{-\delta_1} + \sqrt{-\delta_2} + \sqrt{-\delta_3})$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{-\delta_1} - \sqrt{-\delta_2} - \sqrt{-\delta_3}$$

$$\frac{1}{2}(-\sqrt{-\delta_1} + \sqrt{-\delta_2} - \sqrt{\delta_3})$$

$$\frac{1}{2}(-\sqrt{-\delta_1} - \sqrt{-\delta_2} + \sqrt{-\delta_3})$$

# Τυποποίηση Ιδέας (3/5)

<u>Σημείωση</u>. Όπως συμβαίνει συχνά με πολλά Μαθηματικά θεωρήματα, η τυπικά άψογη λύση, κρύβει την κεντρική ιδέα που οδήγησε στην λύση. Ας δούμε ποιά είναι η βασική ιδέα, στην λύση τεταρτοβαθμίων εξισώσεων που παρουσιάσαμε πιό πάνω. Έστω λοιπόν $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ οι ζητούμενες ρίζες του f. Θεωρούμε τους αριθμούς

$$(\rho_1+\rho_2)(\rho_3+\rho_4)$$
$$(\rho_1+\rho_3)(\rho_2+\rho_4)$$
$$(\rho_1+\rho_4)(\rho_2+\rho_3).$$

Οι αριθμοί αυτοί είναι ρίζες τριτοβάθμιου πολυωνύμου, του οποίου μπορούμε να υπολογίσουμε με την βοήθεια των Τύπων του Vieta.

# Τυποποίηση Ιδέας (4/5)

Αυτό άλλωστε κάναμε στο Α.8.4. Το πολυώνυμο αυτό είναι η Κυβική Επιλύουσα. Αυτό σημαίνει ότι, εάν ξέρουμε να λύνουμε τριτοβάθμιες εξισώσεις, τότε μπορούμε να βρούμε τις παραπάτω ποσότητες. Τέλος, από αυτές τις ποσότητες μπορούμε να αποσπάσουμε τα $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, όπως έγινε στο παραπάνω θεώρημα.

# Τυποποίηση Ιδέας (5/5)

- Εάν γνωρίζουμε το $(\rho_1 + \rho_2)(\rho_3 + \rho_4)$, τότε επειδή ξέρουμε το άθροισμα των δυο παραγόντων, (ειναι 0), τοτε ξερουμε έκαστον εξ αυτών. Ομοίως και για τις λοιπές ρίζες.
- Προφανώς, $\rho_1 = \big( (\rho_1 + \rho_2) + (\rho_1 + \rho_3) - (\rho_2 + \rho_3) \big)/2$

# Τινά για τον La Grancia

# Τινά για τον La Grancia (1/2)

- ttp://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Lagrange.html, Joseph-Louis Lagrange, born Giuseppe Lodovico Lagrangia, (1736 –1813)
- Lagrange's interest in mathematics began when he read a copy of Halley's 1693 work on the use of algebra in optics. He was also attracted to physics by the excellent teaching of Beccaria at the College of Turin and he decided to make a career for himself in mathematics.

# Τινά για τον La Grancia (2/2)

- *My wife, who is one of my cousins and who even lived for a long time with my family, is a very good housewife and has no pretensions at all.* They had no children, in fact Lagrange had told d'Alembert in this letter that he did not wish to have children.
- **Mécanique analytique calculus of variations, Lagrange multipliers, binary quadratic forms, Algebraic Equations**

# Τινά για τον La Grancia
# *Théorie des fonctions analytiques*

THÉORIE

DES

FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

LES PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL,

DÉGAGÉS DE TOUTE CONSIDÉRATION D'INFINIMENT PETITS, D'ÉVANOUISSANTS, DE LIMITES ET DE FLUXIONS, ET RÉDUITS A L'ANALYSE ALGÉBRIQUE DES QUANTITÉS FINIES.

# Τινά για τον La Grancia, 5th axiom (1/2)

- Judith V. Grabiner, Why Did Lagrange “Prove” the Parallel Postulate? The American Mathematical Monthly 116.1 (January 2009): 3-18.
- **Introduction. We begin with an often-told story from the** ***Budget of Paradoxes*** by Augustus de Morgan: “Lagrange, in one of the later years of his life, imagined” that he had solved the problem of proving Euclid’s parallel postulate. “He went so far as to write a paper, which he took with him to the [Institut de France], and began to read it.” But, De Morgan continues, “something struck him which he had not observed: he muttered ‘**Il faut que j’y songe encore**’ [I’ve got to think about this some more] and put the paper in his pocket” [8, p. 288].

# Τινά για τον La Grancia, 5$^{th}$ axiom (2/2)

- Is De Morgan’s story true? Not quite in that form. But, as Bernard Cohen used to say, “Truth is more interesting than fiction.” First, according to the published minutes of the Institut for 3 February 1806, “M. Delagrange *read an analysis of the theory of* parallels” [25, p. 314; italics added]. **Those present are listed in the minutes:** Lacroix, Cuvier, Bossut, Delambre, Legendre, Jussieu, Lamarck, Charles, Monge, Laplace, Hauy, Berthollet, Fourcroy—a most distinguished audience!

# Τέλος Υποενότητας

Lagrange, λύση τεταρτοβάθμιας εξίσωσης

# Χρηματοδότηση


- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

# Σημειώματα

# Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

# Σημείωμα Αναφοράς

# Σημείωμα Αδειοδότησης

# Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

# Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

**Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες**