ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Ιστορία νεότερων Μαθηματικών

Ενότητα 3: Η Άλγεβρα της Αναγέννησης

Παπασταυρίδης Σταύρος
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Περιγραφή Ενότητας

Ιταλοί Αβακιστές. Αλγεβρικός Συμβολισμός. Άλγεβρα στην Γαλλία, Γερμανία, Αγγλία. Εξισώσεις τρίτου και τετάρτου βαθμού. Μιγαδικοί αριθμοί. Εξισώσεις τετάρτου βαθμού και συμμετρίες.

Περιεχόμενα Υποενότητας

- Συνοπτικά η επίλυση εξίσωσης τρίτου βαθμού
- Gerolamo Cardano, Ars Magna
- Solution of equation degree 3 in Ars Magna
- «Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3
  Σ. Γ. Παπασταυρίδης, Εισαγωγή στην σύγχρονη Άλγεβρα και τις εφαρμογές της, Τόμος Β

Η Άλγεβρα της Αναγέννησης

Επίλυση εξίσωσης τρίτου βαθμού

The solution of the cubic equation (synopsis) (1/8)

Fra Luca Pacioli noted in 1494 that there was not yet an algebraic solution to the general cubic equation, but throughout the fifteenth and early sixteenth centuries many mathematicians were working on this problem. Finally, sometime between 1500 and 1515, Scipione del Ferro (1465–1526), a professor at the University of Bologna, discovered an algebraic method of solving the cubic equation $x^3 + cx = d$. Recall that, since most mathematicians still did not deal with negative numbers even as coefficients of equations, there were 13 different types of mixed irreducible cubic equations depending on the relative positions of the (positive) quadratic, linear, and constant terms. So del Ferro had only begun the process of "solving" the cubic equation with his solution of one of these cases.

The solution of the cubic equation (synopsis) (2/8)

- $x^3 = ax + b$
- $x^3 + ax = b$
- $x^3 + b = ax$

The solution of the cubic equation (synopsis) (3/8)

In modern academia, professors announce and publish new results as quickly as possible to ensure priority, so it may be surprising to learn that del Ferro did not publish, nor even publicly announce, his major breakthrough. But academic life in sixteenth-century Italy was far different from that of today. There was no tenure. University appointments were mostly temporary and subject to periodic renewal by the university senate. One of the ways a professor convinced the senate that he was worthy of continuing in his position was by winning public challenges. Two contenders for a given position would present each other with

The solution of the cubic equation (synopsis) (4/8)

a list of problems, and, in a public forum some time later, each would present his solutions to the other's problems. Often, considerable amounts of money, aside from the university positions themselves, were dependent on the outcome of such a challenge. As a result, if a professor discovered a new method for solving certain problems, it was to his advantage to keep it secret. He could then pose these problems to his opponents, secure in the knowledge that he would prevail.

The solution of the cubic equation (synopsis) (5/8)

Before he died, del Ferro disclosed his solution to his pupil, Antonio Maria Fiore (first half of the sixteenth century), and to his successor at Bologna, Annibale della Nave (1500–1558). Although neither of these men publicized the solution, word began to circulate among Italian mathematicians that this old problem had been, or soon would be, solved. Another mathematician, Niccolò Tartaglia of Brescia (1499–1557), in fact, boasted that he too had discovered the solution to a form of the cubic, $x^3 + bx^2 = d$. In 1535, Fiore challenged Tartaglia to a public contest, hoping to win on the strength of his knowledge of the earlier

The solution of the cubic equation (synopsis) (6/8)

case. Each of his thirty submitted problems dealt with that class of cubic equations. For example, one of the problems read, “A man sells a sapphire for 500 ducats, making a profit of the cube root of his capital. How much is this profit?” [$x^3 + x = 500$].[16] But Tartaglia, the better mathematician, worked long and hard on that case, and, as he later wrote, on the night of February 12, 1535 he discovered the solution. Since Fiore was unable to solve many of Tartaglia’s questions covering other areas of mathematics besides the cubic, Tartaglia was declared the winner, in this case of 30 banquets prepared by the loser for the winner and his friends. (Tartaglia, probably wisely, declined the prize, accepting just the honor of the victory.)

The solution of the cubic equation (synopsis) (7/8)

Word of the contest and the new solutions of the cubic soon reached Milan, where Gerolamo Cardano (1501–1576) was giving public lectures in mathematics, supported by a grant from the will of the scholar Tommasso Piatti for the instruction of poor youths. Cardano wrote to Tartaglia, asking that Tartaglia show him the solution so it could be included, with full credit, in the arithmetic text Cardano was then writing. Tartaglia initially refused, but after many entreaties and a promise from Cardano to introduce him and his new inventions in artillery to the Milanese court, he finally came to Milan in early 1539. Tartaglia, after extracting an oath from Cardano that he would never publish Tartaglia's discoveries—Tartaglia planned to publish them himself at some later date—divulged the secrets of three different forms of the cubic equation to Cardano in the form of a poem. Here is the verse explaining $x^3 + cx = d$:

The solution of the cubic equation (synopsis) (8/8)

When the cube and its things near
Add to a new number, discrete,
Determine two new numbers different
By that one; this feat
Will be kept as a rule
Their product always equal, the same,

To the cube of a third
Of the number of things named.
Then, generally speaking,
The remaining amount
Of the cube roots subtracted
Will be your desired count.[19]

Gerolamo Cardano (1/5)

- ***Gerolamo Cardano (1501–1576)***
- Cardano was trained as a physician, but was denied admission to the Milan College of Physicians because of his illegitimate birth. For several years, therefore, he practiced medicine in a small town near Padua, returning to Milan in 1533, where he treated occasional private patients as well as lectured in mathematics and wrote a textbook on arithmetic.
- Finally, he convinced the College of Physicians to change its mind. Cardano soon became the most prominent physician in Milan and in great demand throughout Europe. His most important patient was probably John Hamilton, the Archbishop of Scotland, who in 1551 requested Cardano's services to help him overcome steadily worsening attacks of asthma.

Gerolamo Cardano (2/5)

- Cardano, after spending a month observing the archbishop's symptoms and habits, decided he had a severe allergy to the feathers in the bed he slept in.
- Thus, Cardano recommended that the bedding be changed to silk and the pillow to linen. The archbishop's health improved immediately, and he remained extremely grateful to Cardano for the rest of his life, offering money and other assistance whenever Cardano might need it.
- Cardano was not so successful in his attempt to cast a horoscope for the young king Edward VI on his return from Scotland through England. He predicted a long life, but unfortunately, the sixteen-year-old king died shortly thereafter.

Gerolamo Cardano and the Ars Magna

- Cardano’s own life was filled with many tragedies, including the death of his wife in 1546 and the execution of his son for the murder of his own wife in 1560. The final blow came in 1570 when he was brought before the Inquisition on a charge of heresy. **Fortunately, the sentence was relatively lenient**. Cardano spent his last few years in Rome, where he wrote his autobiography *De Propria Vita.*

Gerolamo Cardano (3/5)

- Συνεχίζουμε την ιστορία της λύσης
- Cardano kept his promise not to publish Tartaglia’s result in his arithmetic book, which soon appeared. In fact, he sent Tartaglia a copy off the press to show his good faith.
- Cardano then began to work on the problem himself, probably assisted by his servant and student, Lodovico Ferrari (1522–1565). Over the next several years, he worked out the solutions and their justifications to all of the various cases of the cubic.
- Ferrari managed to solve the fourth-degree equation as well. Meanwhile, Tartaglia still had not published anything on the cubic. Cardano did not want to break his solemn oath, but he was eager that the solutions should be made available.

Gerolamo Cardano (4/5)

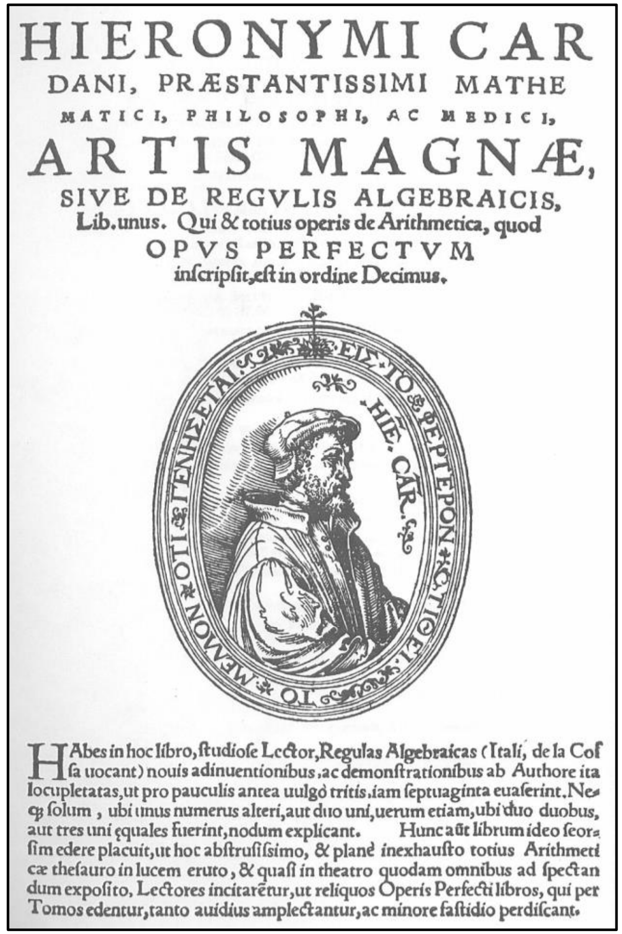
- Acting on rumors of the original discovery by del Ferro, he and Ferrari journeyed to Bologna and called on della Nave.
- The latter graciously gave the two permission to inspect del Ferro’s papers, and they were able to verify that del Ferro had discovered the solution first.
- Cardano no longer felt an obligation to Tartaglia. After all, he would not be publishing Tartaglia’s solution, but one discovered some 20 years earlier by a man now deceased.

Gerolamo Cardano (5/5)

- So in 1545 Cardano published his most important mathematicalwork, the ***Ars magna, sive de regulis algebraicis*** *(The Great Art, or On the Rules of Algebra), chiefly* devoted to the solution of cubic and quartic equations (Fig. 12.4).
- Tartaglia, of course, was furious when Cardano's work appeared. He felt he had been cheated of the rewards of his labor, even though Cardano did mention that Tartaglia was one of the original discoverers of the method. Tartaglia's protests availed him nothing.
- In an attempt to recoup his prestige, he had another public contest, this time with Ferrari, but was defeated. To this day, the formula providing the solution to the cubic equation is known as **Cardano's formula.**

Ars Magna

Ars Magna, εξώφυλλο



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Εικόνα 1.

Ars Magna, επικεφαλίδα

- ***THE GREAT ART'*** *or The Rules of Algebra by Girolamo Cardano*
- *Outstanding Mathematician, Philosopher and Physician*
- *In One Book, Being the Tenth in Order of the Whole Work on Arithmetic Which is called the Perfect Work*

Ars Magna, tr. Witmer, p. 1

- In this book, learned reader, you have the rules of algebra (in Italian, the rules of the coss). It is so replete with new discoveries and demonstrations by the author - more than seventy of them - that its forerunners [are] of little account or, in the vernacular, **are washed out**. It unties the knot not only where one term is equal to another or two to one but also where two are equal to two or three to one.
- It is a pleasure, therefore, to publish this book separately so that, this most abstruse and unsurpassed treasury of the entire [subject of] arithmetic being brought to light and, as in a theater, exposed 4 to the sight of all, its readers may be encouraged and will all the more readily embrace and with the less aversion study thoroughly the remaining books of the Perfect Work which will be published volume by volume.

Ars Magna, αφιέρωση (1/2)

HIERONYMI

CARDANI,

ARTIS MAGNÆ,

SIVE

DE REGVLIS ALGEBRAICIS,

LIBER VNVS.

ANDREÆ OSIANDRO

viro eruditiss.

Ars Magna, αφιέρωση (2/2)

- Ars Magna, tr. Witmer, p. 2
- I have considered nothing so deeply, learned Andreas, as the names of those who, by their writings, deserve to be commended to posterity. I have especially asked whether they combine **liberal learning** with erudition. Hence, since I know that you have a far from mediocre knowledge not only of Hebrew, Greek, and Latin letters but also of mathematics and since, moreover, [you are] the most humane man I have ever encountered, it seemed to me that this, my book, could be better dedicated to no one than you by whom it may be corrected (if my pen has gone further than the power of my mind), read with pleasure, understood, and, indeed, recommended authoritatively. …
- …Farewell. Pavia, the 5th of the Ides of January, 1545.

Ars Magna, Osiander (1/4)

- Andreas Osiander (19 December 1498 – 17 October 1552) was a German Lutheran theologian.
- ***De revolutionibus orbium coelestium*** (*On the Revolutions of the Heavenly Spheres*) is the seminal work on the heliocentric theory of the Renaissance astronomer Nicolaus Copernicus (1473–1543). The book, first printed in 1543 in Nuremberg, Holy Roman Empire, offered an alternative model of the universe to Ptolemy's geocentric system, which had been widely accepted since ancient times.

Ars Magna, Osiander (2/4)

- Rheticus left Nürnberg to take up his post as professor in Leipzig. The Lutheran preacher Andreas Osiander had taken over the task of supervising the printing and publication. In an effort to reduce the controversial impact of the book, Osiander added his own unsigned letter (titled Ad lectorem de hypothesibu huius operis) printed in front of Copernicus' preface which was a dedicatory letter to Pope Paul III and which kept the title "Praefatio authoris" (to acknowledge that the unsigned letter was not by the book's author).
- Osiander's letter stated that Copernius' system was mathematics intended to aid computation and not an attempt to declare literal truth:

Ars Magna, Osiander (3/4)

- it is the duty of an astronomer to compose the history of the celestial motions through careful and expert study.
- Then he must conceive and devise the causes of these motions or hypotheses about them. Since he cannot in any way attain to the true causes, he will adopt whatever suppositions enable the motions to be computed correctly ...
- The present author has performed both these duties excellently. For these hypotheses need not be true nor even probable. On the contrary, if they provide a calculus consistent with the observations, that alone is enough ...
- For this art, it is quite clear, is completely and absolutely ignorant of the causes of the apparent [movement of the heavens]. And if any causes are devised by the imagination, as indeed very many are, they are not put forward to convince anyone that they are true, but merely to provide a reliable basis for computation.

Ars Magna, Osiander (4/4)

- However, since different hypotheses are sometimes offered for one and the same ... the astronomer will take as his first choice that hypothesis which is the easiest to grasp.
- The philosopher will perhaps rather seek the semblance of the truth. But neither of them will understand or state anything certain, unless it has been divinely revealed to him ...
- Let no one expect anything certain from astronomy, which cannot furnish it, lest he accept as the truth ideas conceived for another purpose, and depart this study a greater fool than when he entered.

Ars Magna. Preface, Ore.

- Ars Magna, tr. Witmer, p. vii, Preface by Oystein Ore, New Haven, *Connecticut, July, 1968*
- It has often been pointed out that three of the greatest masterpieces of science created during the Rinascimento appeared in print almost simultaneously: Copernicus, De Revolutionibus Orbium Coelestium (1543) ; Vesalius, De Fabrica Humani Corporis (1543), and finally Girolamo Cardano, Artis Magnae Sive de Regulis Algebraicis (1545).
- σχολιασμός του φιλοσοφικού ζητήματος: saving the phenomena, σώζειν τα φαινόμενα

Ars Magna, Archimedes translation

- http://www.historyofinformation.com/expanded.php?id=328, Survival of the Works of Archimedes.
- The key event, however, in the further spread of Archimedes was the aforementioned *editio princeps* of the Greek text with the accompanying Latin translation of James of Cremona at **Basel in 1544** …" Clagett, *op. cit.*, 228-229).

Ars Magna, Commandino

- Frederico Commandino, (1506 - 1575)
- It would appear that Commandino was never that enthusiastic about being a medical advisor. His true love was the study of the mathematical classics and he had the mathematical knowledge, as well as language skills, to edit and to translate these books.
- Already when he lived in Rome he had begun the task of editing Ptolemy's Planisphere and from that point on he spent the rest of his life publishing translations (mostly Greek into Latin), with commentaries, of the classic texts of **Archimedes, Ptolemy, Euclid, Aristarchus, Pappus, Apollonius, Eutocius, Heron and Serenus. His first published work was an edition of Archimedes, dedicated to his patron Cardinal Farnese, which he published in 1558**.

Ars Magna, Chapter I

- Chapter I, *On Double Solutions in Certain Types of Cases*
- This art originated with **Mahomet the son of Moses the Arab. Leonardo of Pisa** is a trustworthy source for this statement. There remain, moreover, four propositions of his with their demonstrations, which we will ascribe to him in their proper places. After a long time, three derivative propositions were added to these.
- They are of uncertain authorship, though they were placed with the principal ones by **Luca Paccioli**. I have also seen another three, likewise derived from the first, which were discovered by some unknown person. Notwithstanding the latter are much less well known than the others, they are really more useful, since they deal with the solution of [equations containing] a cube, a constant, and the cube of a square.
- **Abū ʻAbdallāh Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī,** (780 – c. 850)

Ars Magna, κεντρική ιδέα μιας λύσης σημερινής Λυκειακής φιλοσοφίας

- $x^3 + px + q = 0$
- $(s+t)^3 - 3st(s+t) - (s^3 + t^3) = 0$
- Αν βρω s, t τέτοια ώστε $-3st = p$ και $-(s^3 + t^3) = q$,
- τότε έχω την λυση $x = s + t$!!!
- Όμως, τότε τα s, t ικανοποιούν
- $st = -p/3$ και $s^3 + t^3 = -q$, η
- $s^3t^3 = -p/3$ και $s^3 + t^3 = -q$

Ars Magna, κεντρική ιδέα μιας λύσης σημερινής Λυκειακής φιλοσοφίας. Διδακτικός σχολιασμός

- Σημασία της συμβολικής Άλβεβρας

Περιεχόμενα του Ars Magna, trl. Witmer, p. 3

Index to the Matters Contained in this Book[1]

Chapter

I On Double Solutions in Certain Types of Cases

II On the Total Number of Rules

III On Solutions in Simple Cases

IIII On the General and Particular Solutions That Follow

V On Finding the Solution for Equations Composed of Minors

VI On Methods for Solving New Cases

VII On the Transformation of Equations

VIII On the Solution (General) for a Middle Power Equal to the Highest Power and a Number[2]

IX On a Second Unknown Quantity, Not Multiplied

X On a Second Unknown Quantity, Multiplied

XI On the Cube and First Power Equal to the Number, Generally

XII On the Cube Equal to the First Power and Number, Generally

XIII On the Cube and Number Equal to the First Power, Generally

Περιεχόμενα του Ars Magna, trl. Witmer, p. 4

XIIII On the Cube Equal to the Square and Number, Generally

XV On the Cube and Square Equal to the Number, Generally

XVI On the Cube and Number Equal to the Square, Generally

XVII On the Cube, Square, and First Power Equal to the Number, Generally

XVIII On the Cube and First Power Equal to the Square and Number, Generally

XIX On the Cube and Square Equal to the First Power and Number, Generally

XX On the Cube Equal to the Square, First Power, and Number, Generally

XXI On the Cube and Number Equal to the Square and First Power, Generally

XXII On the Cube, First Power, and Number Equal to the Square, Generally

XXIII On the Cube, Square, and Number Equal to the First Power, Generally

Ars Magna Ch. 11

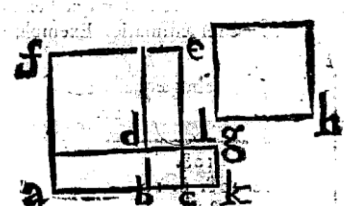
CAPVT XI.

De Cubo & rebus æqualibus Numero.

SCIPIO Ferreus Bononienſis iam annis ab hinc triginta fermè capitulum hoc inuenit, tradidit verò Anthonio Mariæ Florido Veneto, qui cùm in certamen cum Nicolao Tartalea Brixellenſe aliquando veniſſet, occaſionem dedit, vt Nicolaus inuenerit & ipſe, qui cum nobis rogantibus tradidiſſet, ſuppreſſa demonſtratione, freti hoc auxilio, demonſtrationem quæſiuimus, eámque in modos, quod difficillimum fuit, redactam ſic ſubiiciemus.

DEMONSTRATIO.

Sit igitur exempli cauſa cubus g h, & ſexcuplum lateris g h æquale 20. & ponam duos cubos a e & c l, quorum differentia ſit 20. ita quod productum a c lateris, in



c k latus, ſit 2. tertia ſcilicet numeri rerum pars, & abſcindam c b, æqualem c k, dico, quod ſi ita fuerit, lineam a b reſiduum, eſſe æqualem g h, & ideo rei æſtimationem, nam de g h iam ſupponebatur, quod ita eſſet, perficiam igitur per modum primi ſuppoſiti

Ars Magna, Epilogue

- Written in five years, may it last as many thousands (omit 1570 and 1663) the end of the *great art on* the rules of algebra by Girolamo Cardano
- Printed in Nurnberg by Joh. Petreius in the year 1545.

Solution equation degree 3 in Ars Magna

Ars Magna, trl. T. Richard Witmer, p. 96 (1/3)

CHAPTER XI

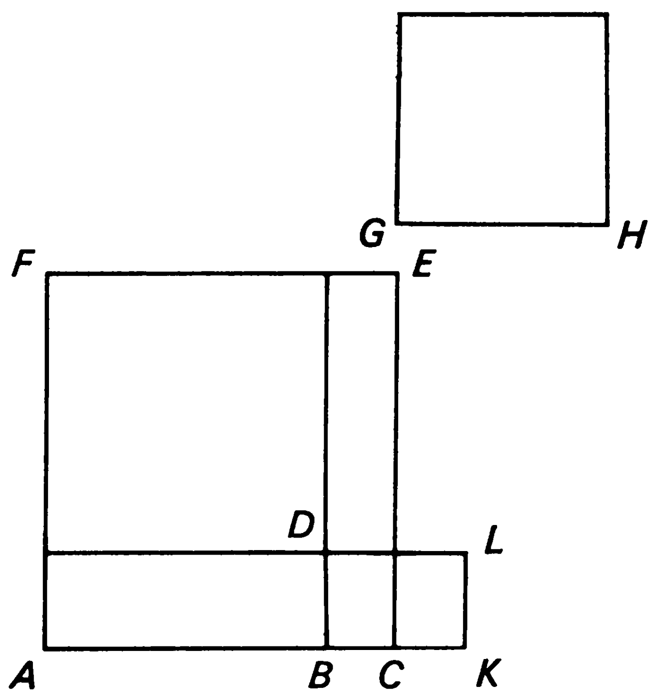
On the Cube and First Power Equal to the Number

Scipio Ferro of Bologna well-nigh thirty years ago discovered this rule and handed it on to Antonio Maria Fior of Venice, whose contest with Niccolò Tartaglia of Brescia gave Niccolò occasion to discover it. He [Tartaglia] gave it to me in reponse to my entreaties, though withholding the demonstration. Armed with this assistance, I sought out its demonstration in [various] forms. This was very difficult. My version of it follows.

Ars Magna, trl. T. Richard Witmer, p. 96 (2/3)

DEMONSTRATION

For example, let GH^3 plus six times its side GH equal 20, and let AE and CL be two cubes the difference between which is 20 and such that the product of AC, the side [of one], and CK, the side [of the other], is 2, namely one-third the coefficient of x. Marking off BC equal to CK, I say that, if this is done, the remaining line AB is equal to GH and is, therefore, the value of x, for GH has already been given as [equal to x].



Ars Magna, trl. T. Richard Witmer, p. 96 (3/3)

In accordance with the first proposition of the sixth chapter of this book, I complete the bodies DA, DC, DE, and DF; and as DC represents BC^3, so DF represents AB^3, DA represents $3(BC \times AB^2)$ and

Ars Magna, trl. T. Richard Witmer, p. 97 (1/2)

DE represents $3(AB \times BC^2)$.[1] Since, therefore, $AC \times CK$ equals 2, $AC \times 3CK$ will equal 6, the coefficient of x; therefore $AB \times 3(AC \times CK)$ makes $6x$ or $6AB$,[2] wherefore three times the product of AB, BC, and AC is $6AB$. Now the difference between AC^3 and CK^3 — manifesting itself as BC^3, which is equal to this by supposition — is 20, and from the first proposition of the sixth chapter is the sum of the bodies DA, DE, and DF. Therefore these three bodies equal 20.

Ars Magna, trl. T. Richard Witmer, p. 97 (2/2)

Now assume that BC is negative:

$$AB^3 = AC^3 + 3(AC \times CB^2) + (-BC^3) + 3(-BC \times AC^2),$$

by that demonstration. The difference between $3(BC \times AC^2)$ and $3(AC \times BC^2)$, however, is [three times] the product of AB, BC, and

Ξεκινάμε από εξίσωση $x3 + cx = d$

get Cardano's formula for this case:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3}\right)^3} - \frac{d}{2}}.$$

Cardano proved his result by a geometric argument involving cubes applied to a specific example. The essence of his proof can be seen more easily through the following algebraic argument: If $x = u - v$, where $u^3 - v^3 = d$ and $u^3v^3 = (\frac{c}{3})^3$, then

$$\begin{aligned} x^3 + cx &= (u - v)^3 + c(u - v) \\ &= u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 + 3uv(u - v) \\ &= u^3 - v^3 - 3uv(u - v) + 3uv(u - v) \\ &= d. \end{aligned}$$

To clarify his rule, Cardano presented the example $x^3 + 6x = 20$. The formula tells us, since $\frac{c}{3} = 2$ and $\frac{d}{2} = 10$, that

Γιατί δεν απέδειξε ότι το 2 είναι ρίζα?

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

(In this formula, the square and cube root symbols as well as the operation symbols are modern. Cardano himself wrote this as $\mathfrak{R}$ v : cub $\mathfrak{R}$ 108 *p* : 10 *m* : $\mathfrak{R}$ v : cub $\mathfrak{R}$ 108 *m* : 10.) There is an obvious question about the answer given here. It is clear to us that the solution to the equation $x^3 + 6x = 20$ is $x = 2$. The answer given by the formula is in fact equal to 2, but that is certainly not evident. Cardano himself noted this a few pages later, but did not show how to transform the answer given by the formula into the value 2.

Μία πραγματική δυο μιγαδικές ρίζες

$$x^3+6x-20 = x^3-8+6(x-2) =$$

$$(x-2)(x^2+2x+4)+6(x-2) = (x-2)(x^2+2x+10)$$

αρα οι ριζες ειναι $2, \; -2 \pm i\sqrt{6}$

Euler, Elements of Algebra, Ch. 7, art. 744 (1/2)

CHAP. XII. OF ALGEBRA. 265

744. It often happens, however, that though such an equation has a rational root, that root cannot be found by the rule which we are now considering.

Let there be given the equation $x^3=6x+40$, in which $x=4$ is one of the roots. We have here $f=6$ and $g=40$; farther, $g^2=1600$, and $\frac{4}{27}f^3=32$; so that $g^2-\frac{4}{27}f^3=1568$, and $\surd(g^2-\frac{4}{27}f^3)=\surd 1568=\ldots\ldots\ldots$ $\surd(4\,.\,4\,.\,49\,.\,2)=28\surd 2$; consequently one of the roots will be

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{40+28\surd 2}{2}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{40-28\surd 2}{2}\right)} \text{ or}$$

Euler, Elements of Algebra, Ch. 7, art. 744 (2/2)

$$x = \sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})};$$

which quantity is really $=4$, although, upon inspection, we should not suppose it. In fact, the cube of $2+\sqrt{2}$ being $20+14\sqrt{2}$, we have, reciprocally, the cube root of $20+14\sqrt{2}$ equal to $2+\sqrt{2}$; in the same manner, $\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})} = 2-\sqrt{2}$; wherefore our root $x = 2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2} = 4$.*

Πραγματικοί μέσω μιγαδικών!
$x^3 = 6x + 40$, ρίζα ο 4

Similarly, in the chapter "On the Cube Equal to the Thing and Number," that is, $x^3 = cx + d$, Cardano presented and proved a rule differing little from his rule for cube and thing equal to number:

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{3}\right)^3}}.$$

After presenting as examples the equations $x^3 = 6x + 40$ and $x^3 = 6x + 6$, he noted the difficulty here if $(\frac{c}{3})^3 > (\frac{d}{2})^2$. In that case, one could not take the square root. To circumvent the difficulty, Cardano described other methods for special cases. As we will see later, it was Rafael Bombelli who showed how to deal with the square roots of negative numbers in the Cardano formula.

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3
Σ. Γ. Παπασταυρίδης, Εισαγωγή στην σύγχρονη Άλγεβρα και τις εφαρμογές της, Τόμος Β

Εισαγωγή στην σύγχρονη Άλγεβρα και τις εφαρμογές της, Τόμος β, σελ. 85

Α.7.ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΡΙΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε πως βρίσκουμε τις ρίζες ενός τριτοβάθμιου πολυωνύμου. Η θεωρία μας είναι διατυπωμένη για πολυώνυμα με Πραγματικούς και Μιγαδικούς Συντελεστές, αλλά ισχύει για μια ευρύτερη κατηγορία Σωμάτων.

Στο κεφάλαιο αυτό, R είναι οι Πραγματικοί αριθμοί και C είναι οι Μιγαδικοί αριθμοί. Για τα R,C, δεχόμαστε ότι ισχύουν τα παρακάτω θεωρήματα.

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3 (1/4)

<u>Α.7.1.Θεώρημα</u>. Το R είναι Σώμα με Διάταξη, όπου, για κάθε $\alpha\epsilon R$, $\alpha>0$, υπάρχουν $\beta,\gamma\epsilon R$, ώστε

$$\beta^2=\alpha,\quad \gamma^3=\alpha.$$

(Σημείωση. Δηλαδή, κάθε θετικό στοιχείο του R, έχει μια τουλάχιστον "Τετραγωνική Ρίζα" (Square Root), και μια τουλάχιστον "Κυβική Ρίζα" (Cubic Root)).

<u>Α.7.2.Θεώρημα.</u> Για κάθε $\alpha\epsilon C$, υπάρχει $\gamma\epsilon C$, έτσι ώστε

$$\gamma^3=\alpha.$$

(Σημείωση. Δηλαδή, κάθε Μιγαδικός αριθμός έχει μια τουλάχιστον Μιγαδική Κυβική Ρίζα).

Τα παραπάνω Θεωρήματα αποδεικνύονται σε Βιβλία Μαθηματικής Ανάλυσης.

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3 (2/4)

<u>Προσοχή</u>. Όλα τα πολυώνυμα του κεφαλαίου αυτού έχουν Πραγματικούς ή Μιγαδικούς συντελεστές.

Στο κεφάλαιο αυτό, θεωρούμε το Πολυώνυμο

<u>Α.7.3.</u> $f(x)=\delta+\gamma x+\beta x^2+\alpha x^3$ με $\alpha\neq 0$. Σκοπός μας είναι να βρούμε τύπους για τις ρίζες του f. Τα $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, είναι Πραγματικοί ή Μιγαδικοί.

Θεωρούμε το πολυώνυμο, $f(x-\frac{\beta}{3\alpha})$. Κάνοντας τις πράξεις,

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 86

βρίσκουμε ότι $f(x-\frac{\beta}{3\alpha})=\alpha x^3+\Gamma x+\Delta$

όπου, $\Gamma=\beta^2/3\alpha^2-2\beta/3\alpha+\gamma)$, $\Delta=(-\beta^3/27\alpha^3+\beta^2/9\alpha^2-\beta/3\alpha+\delta)$.

Είναι αρκετό να βρούμε τις ρίζες του $f(x-\frac{\beta}{3\alpha})$, διότι αν x_1, x_2, x_3, είναι οι ρίζες του $f(x-\frac{\beta}{3\alpha})$, τότε $(x_1-\frac{\beta}{3\alpha})$, $(x_2-\frac{\beta}{3\alpha})$, $(x_3-\frac{\beta}{3\alpha})$ είναι οι ρίζες του $f(x)$, (Γιατί;). Το $f(x-\frac{\beta}{3\alpha})$ είναι απλούστερο από το $f(x)$, διότι δεν έχει δευτεροβάθμιο συντελεστή. Οπότε τελικά, έχουμε να βρούμε τις ρίζες του πολυωνύμου.

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3 (3/4)

A.7.4. $g(x)=\frac{1}{\alpha}f(x-\frac{\beta}{3\alpha})=x^3+px+q$, όπου $p=\frac{\Gamma}{\alpha}$, $q=\frac{\Delta}{\alpha}$.

A.7.5. Ορισμός. Έστω ρ_1,ρ_2,ρ_3 είναι ρίζες ενός πολυωνύμου f, τρίτου βαθμού. Τότε ορίζουμε

$$\Delta(f)=((\rho_1-\rho_2)(\rho_2-\rho_3)(\rho_3-\rho_1))^2.$$

Το $\Delta(f)$ ονομάζεται Διακρίνουσα (Discriminant) του πολυωνύμου f.

Ορίζουμε, $\Delta=-4p^3-27q^2$. Αποδεικνύεται ότι $\Delta=\Delta(g)$, (Βλέπε Άσκηση A.7.5.).

Με το σύμβολο -3Δ, εννοούμε έναν μιγαδικό αριθμό που έχει την ιδιότητα $(\sqrt{-3\Delta})^2=-3\Delta$.

«Το σύμβολο -3Δ», το ορθόν είναι η ρίζα του

Φυσικά, συνήθως υπάρχουν δυο μιγαδικοί αριθμοί που να έχουν αυτή την ιδιότητα, (Βλέπε 'Ασκηση Α.7.2.) Το σύμβολο -3Δ, δηλώνει τον έναν από αυτούς, που τον διαλέγουμε εφ'άπαξ για το κεφάλαιο αυτό. Στην συνέχεια ορίζουμε τις ποσότητες

$$A=-\frac{27}{2}q+\frac{3}{2}\sqrt{-3\Delta}$$ και

$$B=-\frac{27}{2}q-\frac{3}{2}\sqrt{-3\Delta}.$$

Κάνοντας τις πράξεις είναι εύκολο να δή κανείς ότι

<u>Α.7.6.Λήμμα</u>. Είναι, $A\cdot B=-3^3p^3$

Το προηγούμενο Λήμμα μας δείχνει ότι μπορούμε να κάνουμε

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 87

επιλογή κυβικών ριζών, (Βλέπε Άσκηση Α.7.6.),

$\sqrt[3]{A}$, $\sqrt[3]{B}$ ώστε $(\sqrt[3]{A})\cdot(\sqrt[3]{B})=-3p$

(Φυσικά θα είναι $(\sqrt[3]{A})^3=A$ και $(\sqrt[3]{B})^3=B$). Κάνουμε λοιπόν μια επιλογή τιμών για τα $\sqrt[3]{A}$ και $\sqrt[3]{B}$ από τις τρείς τιμές που υπάρχουν για κάθε μια. Το κύριο συμπέρασμα αυτού του κεφαλαίου είναι

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, τύποι των ριζών

<u>Α.7.7.Θεώρημα.</u> (Τύποι του Cardano). Το πολυώνυμο

$$x^3+px+q$$

έχει τις εξής ρίζες:

$$x_1=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)$$

$$x_2=\frac{1}{3}\left(\omega\cdot\sqrt[3]{A}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{B}\right)$$

$$x_3=\frac{1}{3}\left(\omega^2\cdot\sqrt[3]{A}+\omega\cdot\sqrt[3]{B}\right)$$

(Σημ. ω είναι μια μιγαδική κυβική ρίζα του 1. (Βλέπε Άσκηση Α.7.4.)).

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3 (4/4)

<u>Απόδειξη</u>. Αρκεί να αποδειχθούν οι σχέσεις, (Τύποι Vieta),

$$x_1+x_2+x_3=0$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=p$$

$$x_1x_2x_3=-q$$

Αυτά αποδεικνύονται κάνοντας τις πράξεις. Πράγματι

$$x_1+x_2+x_3=\frac{1}{3}\quad(1+\omega+\omega^2)\cdot\sqrt[3]{A}\;+(1+\omega+\omega^2)\cdot\sqrt[3]{B}\;=0,$$

στην συνέχεια

$$\begin{aligned}
x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1&=x_1\,(x_2+x_3)+x_2x_3\\
&=-x_1^2+x_2x_3\\
&=-\frac{1}{9}\left(\left(\sqrt[3]{A}\right)^2+\left(\sqrt[3]{B}\right)^2+2\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B}\right)+
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{9}\left(\omega^2\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B}+\omega^4\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[3]{B}+\omega^3\left(\sqrt[3]{A}^{\,2}\right)+\omega^3\left(\sqrt[3]{B}^{\,2}\right)\right)$$

$$\begin{aligned}
&=-\frac{2}{9}(-3p)+\frac{1}{9}(\omega^2+\omega)\cdot(-3p)\\
&=p
\end{aligned}$$

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 88

τέλος

$$x_1x_2x_3=\frac{1}{27}\omega\omega^2\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}\right)\left(\sqrt[3]{A}+\frac{1}{\omega}\sqrt[3]{B}\right)$$

$$=\frac{1}{27}\left(A+B+(\omega^2+\omega+1)\sqrt[3]{A}\left(\sqrt[3]{B}\right)^2+(\omega^2+\omega+1)\cdot\sqrt[3]{B}\left(\sqrt[3]{A}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{27}\cdot(A+B)$$

$$=\frac{1}{27}\cdot(-27q)$$

$$=-q$$

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σχολιασμός (1/2)

<u>Σημείωση.</u> Πολλές φορές στα Μαθηματικά, δυστυχώς, η ανάγκη της ακριβολογίας και αυστηρότητας γίνεται αιτία να κρυφτή η κεντρική ιδέα μιας απόδειξης. Η προηγούμενη απόδειξη είναι ένα τέτοιο παράδειγμα. Θα συμπληρώσουμε αυτό το κενό με μερικά σχόλια που θα ακολουθήσουν. Η λύση της εξίσωσης τρίτου βαθμού δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά στο σύγγραμμα Ars Magna (1545) του G.Cardano (1501-1576). Η κεντρική ιδέα ήταν η θεώρηση της ταυτότητας

$$(s+t)^3-3st(s+t)-(s^3+t^3)=0.$$

Ας συγκρίνουμε την παραπάνω ταυτότητα, με την εξίσωση που έχουμε να λύσουμε

$$x^3+px+q=0$$

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σχολιασμός (2/2)

βλέπουμε ότι αν μπορούμε να βρούμε αριθμούς s και t ώστε

$$st=-\frac{1}{3}p \qquad \text{και} \qquad s^3+t^3=-q,$$

τότε ο $s+t$ είναι λύση της τριτοβάθμιας εξίσωσης. Το παραπάνω σύστημα, οδηγεί στο

$$s^3t^3=-\frac{1}{27} \qquad s^3+t^3=-q$$

οπότε, όπως είναι γνωστό και από το Γυμνάσιο, τα s^3, t^3 είναι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$y^2+\frac{p}{3}y-q=0$$

την οποία λύνουμε. Ουσιαστικά, αυτή την απόδειξη δώσαμε, και

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 89

Α.7.ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΡΙΤΟΥ...   -89-

στην θέση των s^3, t^3 ήσαν τα $\frac{A}{27}$, $\frac{B}{27}$

Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει την ποιότητα των ριζών του πολυωνύμου g.

<u>Α.7.8.Θεώρημα.</u> Έστω ότι το g έχει πραγματικούς συντελεστές. Τότε ισχύουν

(α) Αν $\Delta<0$, τότε το g έχει τρείς άνισες ρίζες, που είναι η μια πραγματική και οι άλλες δύο είναι μιγαδικές συζυγείς.

(β) Αν $\Delta=0$, τότε όλες οι ρίζες του g είναι πραγματικές και μια από αυτές είναι πολλαπλή.

(γ) Αν $\Delta>0$ τότε το g έχει τρείς πραγματικές διακεκριμένες ρίζες.

Υπενθύμιση:
«Το σύμβολο -3Δ», το ορθόν είναι η ρίζα του

Φυσικά, συνήθως υπάρχουν δυο μιγαδικοί αριθμοί που να έχουν αυτή την ιδιότητα, (Βλέπε Άσκηση Α.7.2.) Το σύμβολο -3Δ, δηλώνει τον έναν από αυτούς, που τον διαλέγουμε εφ' άπαξ για το κεφάλαιο αυτό. Στην συνέχεια ορίζουμε τις ποσότητες

$$A=-\frac{27}{2}q+\frac{3}{2}\sqrt{-3\Delta} \qquad \text{και}$$

$$B=-\frac{27}{2}q-\frac{3}{2}\sqrt{-3\Delta}.$$

Κάνοντας τις πράξεις είναι εύκολο να δή κανείς ότι

<u>Α.7.6.Λήμμα</u>. Είναι, $A\cdot B=-3^3p^3$

Το προηγούμενο Λήμμα μας δείχνει ότι μπορούμε να κάνουμε

Υπενθύμιση

<u>Α.7.7.Θεώρημα.</u> (Τύποι του Cardano). Το πολυώνυμο

$$x^3+px+q$$

έχει τις εξής ρίζες:

$$x_1=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)$$

$$x_2=\frac{1}{3}\left(\omega\cdot\sqrt[3]{A}+\omega^2\cdot\sqrt[3]{B}\right)$$

$$x_3=\frac{1}{3}\left(\omega^2\cdot\sqrt[3]{A}+\omega\cdot\sqrt[3]{B}\right)$$

(Σημ. ω είναι μια μιγαδική κυβική ρίζα του 1. (Βλέπε Άσκηση Α.7.4.)).

Υπενθύμιση: «Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 89

Το προηγούμενο θεώρημα επισημαίνει μια περίεργη κατάσταση. Δηλαδή, όταν $\Delta>0$, ενώ είναι όλες οι ρίζες πραγματικές εν τούτοις αυτές εμφανίζονται με τύπους που έχουν εξαγωγές ριζών επί μιγαδικών αριθμών, των Α και Β. Ας το δούμε καλλίτερα αυτό σε ένα παράδειγμα.

<u>Α.7.9.Παράδειγμα</u>. Να λυθεί η εξίσωση

$$x^3-7x+6=0$$

Παράδειγμα και λύση (1/4)

<u>Α.7.9.Παράδειγμα</u>. Να λυθεί η εξίσωση

$$x^3-7x+6=0$$

-90-

<u>Λύση</u>. Αν ξεχάσουμε, προς στιγμήν, τους τύπους που βρήκαμε στο κομμάτι αυτό, μπορούμε να δοκιμάσουμε να βρούμε τις ρητές λύσεις της εξίσωσης αυτής, αν βέβαια υπάρχουν, χρησιμοποιώντας την μέθοδο που αποδεικνύεται από την Άσκηση Α.5.9. Τότε βλέπουμε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 1,2,-3. Ας δούμε λοιπόν τώρα, τι θα μας δώσουν οι τύποι του παραπάνω θεωρήματος. Στο παράδειγμα μας, έχουμε $p=-7$ και $q=6$, οπότε $\Delta=400$ και $A=-81+30\sqrt{3}\cdot i$, $B=-81-30\sqrt{3}\cdot i$

Παράδειγμα και λύση (2/4)

οπότε προκύπτει το ερώτημα: Τι είναι το $\sqrt[3]{A} = \sqrt[3]{-81-30\sqrt{3}\cdot i}$

Και πως οδηγούμεθα στις ρίζες 1,2,-3 από τους τύπους του παραπάνω θεωρήματος. Η απάντηση είναι απλή και απογοητευτική:

Δεν υπάρχει τρόπος να "δούμε" τις ρίζες 1,2,-3 μέσα από τους πολύπλοκους τύπους του θεωρήματος μας. Βέβαια οι τύποι του θεωρήματος αυτού δίνουν τις ρίζες 1,2,-3, αλλά μέσω πολυπλόκων εκφράσεων εξαγωγής κυβικών ριζών επί μιγαδικών αριθμών, ώστε να μην είναι εμφανές ότι οι ρίζες είναι απλοί ακέραιοι αριθμοί.

Παράδειγμα και λύση (3/4)

Καθοδηγούμενοι από το γεγονός ότι ξέρουμε ήδη ποιές είναι οι ρίζες, και πειραματιζόμενοι λιγάκι με ορισμένες δοκιμές πράξεων, βλέπουμε ότι $(3+2\sqrt{3}\cdot i)^3=-81+30\sqrt{3}\cdot i$

Οπότε μπορούμε να επιλέξουμε

$$\sqrt[3]{A}=3+2\sqrt{3}\cdot i \quad \text{και} \quad \sqrt[3]{B}=3-2\sqrt{3}\cdot i$$

Παράδειγμα και λύση (4/4)

Οπότε οι τύποι του θεωρήματος 3 δίνουν

$$x_1=\frac{1}{3}\left(\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}\right)=2$$

$$x_2=\frac{1}{3}\left(\omega\sqrt[3]{A}+\omega^2\sqrt[3]{B}\right)=1$$

(παίρνουμε $\omega=\dfrac{1+\sqrt{3}\cdot i}{2}$

$$x_3=\frac{1}{3}\left(\omega^2\sqrt[3]{A}+\omega\sqrt[3]{B}\right)=-3$$

Το θέμα είναι ότι, φθάσαμε στις ρίζες του πολυωνύμου μας, μέσω

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 91 (1/3)

των τύπων του θεωρήματος μας βασιζόμενοι στην διαίσθηση και στην καλή μας τύχη. Το γεγονός ότι οι τύποι του Cardano μας δίνουν τις πραγματικές λύσεις τριτοβάθμιου εξισώσεως μέσω τύπων που εμφανίζουν κυβικά ριζικά επί μιγαδικών αριθμών, εθεωρήθη μεγάλο μειονέκτημα την εποχή εκείνη για δύο λόγους: Πρώτον: Οι τύποι αυτοί ήσαν πλέον, πολύ λίγο χρήσιμοι για τις εφαρμογές (π.χ. Τριγωνομετρία). Δεύτερον και κύριον, οι μαθηματικοί του $16^{ου}$ αιώνα πολύ λίγη πίστη είχαν στους μιγαδικούς αριθμούς. Έγιναν προσπάθειες να βρεθούν άλλοι τύποι που να μην έχουν αυτό το μειονέκτημα, δηλαδή να μπορούν να εκφράσουν

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 91 (2/3)

τις πραγματικές ρίζες μέσω αλγεβρικών πράξεων και εξαγωγών ριζών επί <u>πραγματικών</u> αριθμών. Οι προσπάθειες αυτές απέτυχαν και σήμερα ξέρουμε ότι ήταν μοιραίο να αποτύχουν διότι τέτοιοι τύποι δεν υπάρχουν. Η απόδειξη αυτού του πράγματος χρειάζεται λίγο προχωρημένη θεωρία σωμάτων και ξεφεύγει των ορίων αυτού του βιβλίου. Για να καταλάβουμε κάπως καλλίτερα το πρόβλημα, ας δούμε τα εξής δύο επί μέρους προβλήματα.

<u>Α.7.10. Πρόβλημα</u>. Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί και θέλουμε να βρούμε πραγματικούς αριθμούς κ,λ ώστε

$$\alpha+\beta i=(\kappa+\lambda i)^3$$

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 91 (3/3)

(Δηλαδή, να βρούμε την κυβική ρίζα μιγαδικού αριθμού). Κάνοντας λοιπόν τις πράξεις και στα δύο μέλη της ισότητας, παίρνουμε

$$\alpha=\kappa^3-3\kappa\lambda^2 \qquad \text{και} \qquad \beta=3\kappa^2\lambda-\lambda^3$$

Αν λοιπόν είναι $\beta\neq0$, (η περίπτωση $\beta=0$ είναι τετριμμένη), τότε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\kappa^3-3\kappa\lambda^2}{3\kappa^2\lambda-\lambda^3}$$ και θέτωντας

$$x=\frac{\kappa}{\lambda} \qquad \mu=\frac{\alpha}{\beta}$$ παίρνουμε

$$\mu=\frac{x^3-3x}{3x^2-1},$$ ή

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 92 (1/3)

-92-

(α) $x^3-3\mu x^2-3x+\mu=0$

'Ισως αυτή τη στιγμή έχει κανείς την απατηλή εντύπωση ότι φθάσαμε στο τέλος του σκοπού μας, διότι ο υπολογισμός του x ανάγεται στην λύση τριτοβάθμιου εξίσωσης, που μάθαμε να λύνουμε τώρα μόλις, οπότε αν βρούμε το x μετά θα βρούμε και τα k ,. Δυστυχώς δεν είναι έτσι τα πράγματα, διότι η τριτοβάθμια εξίσωση στην οποία καταλήξαμε είναι από εκείνες που έχουν τρείς πραγματικές ρίζες και οι οποίες δημιουργούν το πρόβλημα. Αυτό,

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 92 (2/3)

εξ άλλου, αναμενόταν διότι ξέρουμε, (από την Ανάλυση) ότι κάθε μιγαδικός αριθμός $\neq 0$, έχει τρείς κυβικές ρίζες άρα θα πρέπει να υπάρχουν τρείς πραγματικές τιμές του $x=\frac{\kappa}{\lambda}$. Ας δούμε όπως επακριβώς διατί η εξίσωση αυτή έχει τρείς πραγματικές ρίζες.

Κάνουμε τον μετασχηματισμό

$$x=y+\mu$$

δια να απαλοίψουμε τον δευτεροβάθμιο όρο, οπότε η εξίσωση (α) ανάγεται στην

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 92 (3/3)

$$y^3-3(\mu^2+1)y-2\mu(\mu^2+1)=0.$$

Η διακρίνουσα αυτής της τελευταίας εξίσωσης είναι

$$\Delta=2^3\cdot 3^2(\mu^2+1)^2>0,$$

άρα η (α) έχει τρείς πραγματικές ρίζες. Δηλαδή, φαύλος κύκλος.

A.7.11.Πρόβλημα. Αν ϑ είναι μια γωνία να βρεθεί το συνϑ όταν γνωρίζουμε το συν 3ϑ.

(Σημείωση. Ιστορικά, το πρόβλημα αυτό έπαιξε μεγάλο ρόλο στο να δημιουργηθή ενδιαφέρον και να μελετηθή το θέμα της λύσης τριτοβαθμίων εξισώσεων).

Λύση(;) Ξέρουμε από την τριγωνομετρία

$$\text{συν}3\vartheta=4\text{συν}^3\vartheta-3\text{συν}\vartheta.$$

Θέτω $x=\text{συν}\vartheta$ και $\alpha=\text{συν}3\vartheta$, οπότε έχουμε προς λύση την τριτο-

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 93 (1/2)

βάθμια εξίσωση

$$4x^3-3x-\alpha=0$$

ή

$$x^3-\frac{3}{4}x-\frac{\alpha}{4}=0.$$

Η εξίσωση αυτή έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\frac{27}{16}(1-\alpha^2)\geqslant 0$$

Δηλαδή, πάλι δεν έχουμε γενικούς "πραγματικούς" τύπους που να εκφράζουν το συνϑ συνάρτηση του συν3ϑ.

Ας δούμε και ένα άλλο παράδειγμα.

Α.7.12.Παράδειγμα. Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^3-5x^2+8x-6=0$$

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 93 (2/2)

και θα πρέπει να γράφουμε

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} \quad , \text{ κ.λ.π.}$$

Ειδικά εδώ, παρατηρούμε ότι

$$(2+\sqrt{3})^3=26+15\ \ 3$$

$$(2-\sqrt{3})^3=26-15\ \ 3$$

Άρα, μπορούμε να επιλέξουμε

$$\sqrt[3]{A}=2+\sqrt{3}\ , \quad \sqrt[3]{B}=2-\sqrt{3}\ .$$

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 94 (1/2)

Οπότε οι τύποι του Cardano, δίνουν τις ρίζες

$$y_1=\frac{4}{3},\quad y_2=\frac{1}{3}+i,\quad y_3=\frac{1}{3}-i.$$

Άρα οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι

$$x_1=y_1+\frac{5}{3}=3,\quad x_2=y_2+\frac{5}{3}=2+i\quad \text{και}\quad x_3=2-i$$

Το παραπάνω παράδειγμα μας δείχνει ότι ακόμα και στην περίπτωση που δεν εμφανίζονται Κυβικές ρίζες Μιγαδικών αριθμών, ακόμα και τότε, ενδεχομένως, η απλούστερη μορφή των ριζών, είναι δυνατόν, να μας διαφύγει.

Ας δούμε ένα ακόμα παράδειγμα.

<u>Α.7.13.Παράδειγμα</u>. Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου,

$$x^3-9x+28.$$

«Σύγχρονη» διαχείριση εξισώσεων βαθμού 3, σελ. 94 (2/2)

Λύση. Θα εφαρμόσουμε τους τύπους του Cardano. Είναι

$$\Delta=-4(-9)^3-27\cdot 28^2=-18252$$

άρα $\sqrt{-3\Delta}=234$, $A=-27$, $B=-729$, $\sqrt[3]{A}=-3$, $\sqrt[3]{B}=-9$. Άρα

$$x_1=-4,\quad x_2=2+\sqrt{3}i\ ,\quad x_3=2-\sqrt{3}i\ .$$

Στην Άσκηση Α.7.8. περιγράφεται ένας άλλος τρόπος λύσης τριτοβάθμιας εξίσωσης, που οφείλεται στον J.Lagrange (1736-1813), και φυσικά, οδηγεί στα ίδια αποτελέσματα.

Ας δούμε τώρα μια άλλη πρόταση που αφορά το είδος των ριζών ενός πολυωνύμου τρίτου βαθμού.

Τέλος Υποενότητας

Επίλυση εξίσωσης τρίτου βαθμού

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Παπασταυρίδης Σταύρος. «Ιστορία Νεότερων Μαθηματικών, Η Άλγεβρα της Αναγέννησης». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH113/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες

Εικόνα 1: "ArsMagna" by JCSantos. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ArsMagna.jpg#/media/File:ArsMagna.jpg