ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών

Ιστορία νεότερων Μαθηματικών

Ενότητα 3: Η Άλγεβρα της Αναγέννησης

Παπασταυρίδης Σταύρος
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Μαθηματικών

Περιγραφή Ενότητας

Ιταλοί Αβακιστές. Αλγεβρικός Συμβολισμός. Άλγεβρα στην Γαλλία, Γερμανία, Αγγλία. Εξισώσεις τρίτου και τετάρτου βαθμού. Μιγαδικοί αριθμοί. Εξισώσεις τετάρτου βαθμού και συμμετρίες.

Περιεχόμενα Υποενότητας

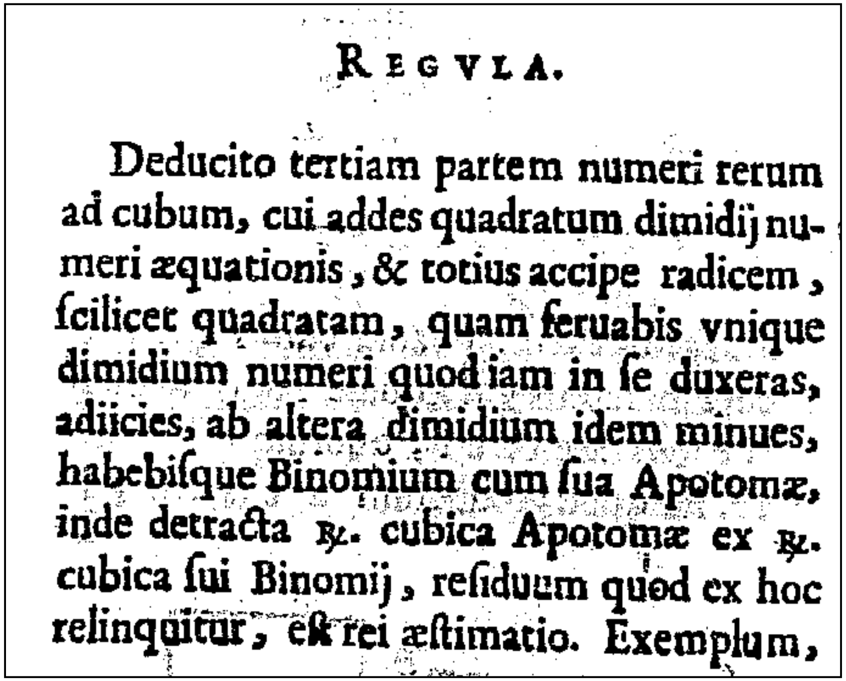
- Σύμβολα του Ars Magna, παραδείγματα
- Παραδείγματα τεταρτοβάθμιων εξισώσεων

Η Άλγεβρα της Αναγέννησης

Επίλυση εξίσωσης τετάρτου βαθμού

Σχόλια επί των προηγούμενων

Σύμβολα του Ars Magna



REGVLA.

Deducito tertiam partem numeri rerum ad cubum, cui addes quadratum dimidij numeri æquationis, & totius accipe radicem, ſcilicet quadratam, quam ſeruabis, vnique dimidium numeri quod iam in ſe duxeras, adiicies, ab altera dimidium idem minues, habebiſque Binomium cum ſua Apotomæ, inde detracta ℞. cubica Apotomæ ex ℞. cubica ſui Binomij, reſiduum quod ex hoc relinquitur, eſt rei æſtimatio. Exemplum,

- Rule
- Cube one-third the coefficient of *x; add to it the square of one-half* the constant of the equation; and take the square root of the whole. You will duplicate this, and to one of the two you add one-half the number you have already squared and from the other you subtract one-half the same. You will then have a *binomium and its apotome. Then* subtracting the cube root of the *apotome from the cube root of the binomium, the remainder [or] that which is left is the value of x.*

Ξεκινάμε από την εξίσωση $x3 \ + cx = d$

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^3}+\frac{d}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^3}-\frac{d}{2}}.$$

Exemplum $x^3 + 6x = 20$ (1/3)

relinquitur, est rei æstimatio. Exemplum,

cubus p̃. 6. rebus æqualis 20.

2. 20.

8. ——— 10.

108.

℞. 108. p̃. 10.

℞. 108. m̃. 10.

℞. V. cu. ℞. 108. p̃. 10.

m̃. ℞. V. cu. ℞. 108. m̃. 10.

cubus & 6. positiones, æquantur 20. ducito 2. tertiam partem 6. ad cubum, fit 8. duc 10. dimidium numeri in se, fit 100.

For example,

$$x^3 + 6x = 20.$$

Cube 2, one-third of 6, making 8; square 10, one-half the constant; 100 results. ~~Add 100 and 8, making 108, the square root of which is~~

Exemplum $x^3 + 6x = 20$ (2/3)

iunge 100. & 8. fit 108. accipe radicem quæ eſt ℞. 108. & eam gemina bis, alteri addes 10. dimidium numeri, a b altero minues tantundem, habebis Binomium ℞. 108. p̃. 10. & Apotomen ℞. 108. m̃. 10. horum accipe ℞^{es} cub^{as} & minue illam quæ eſt Apotomæ, ab ea quæ eſt Binomij, habebis rei æſtimationem, ℞. v. cub. ℞. 108. p̃. 10. m̃. ℞. v. cubica ℞. 108. m̃. 10.

~~100 results.~~ Add 100 and 8, making 108, the square root of which is $\sqrt{108}$. This you will duplicate: to one add 10, one-half the constant, and from the other subtract the same. Thus you will obtain the *binomium* $\sqrt{108}+10$ and its *apotome* $\sqrt{108}-10$. Take the cube roots of these. Subtract [the cube root of the] *apotome* from that of the *binomium* and you will have the value of x:

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}\,[8] - \sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

Exemplum $x^3 + 6x = 20$ (3/3)

$$x^3 + cx = d$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{3}\right)^3 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{d}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{c}{3}\right)^3 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{d}{2}}$$

Examplum $x^3 + 6x = 20$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{6}{3}\right)^3 + \left(\frac{20}{2}\right)^2} + \frac{20}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{6}{3}\right)^3 + \left(\frac{20}{2}\right)^2} - \frac{20}{2}}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$$

Ομως $(\sqrt{3} + 1)^3 = 6\sqrt{3} + 10$

$(\sqrt{3} - 1)^3 = 6\sqrt{3} - 10$

αρα $x = 2$

Τεταρτοβάθμια εξίσωση, παράδειγμα

Παράδειγμα (1/3)

- Θεωρούμε πολυώνυμο 4ου βαθμού με ρίζες 1, 1, 2, -4, είναι το
- $(x-1)(x-1)(x-2)(x+4) = (x^2-2x+1)(x^2+2x-8) = x^4 - 11x^2 + 18x - 8$
- Η εξίσωση $x^4 - 11x^2 + 18x - 8 = 0$, γράφεται:
- $x^4 - 8 = 11x^2 - 18x$
- Θα προσθέσουμε σε αμφότερα τα μέλη ένα δευτεροβάθμιο τριώνυμο με απροσδιόριστη για την ώρα παράμετρο b, ώστε το πρώτο μέλος να είναι τέλειο τετράγωνο **εκ κατασκευής**, το δε δεύτερο μέλος θα γίνεται τέλειο τετράγωνο με κατάλληλη επιλογή του b.
- Θα προσθέσουμε το $2bx^2 + b^2 + 8$, οπότε έχουμε
- $x^4 + 2bx^2 + b^2 = (11+2b)x^2 - 18x + b^2 + 8$

Παράδειγμα (2/3)

- Το πρώτο μέλος λοιπόν είναι τέλειο τετράγωνο ό,τι και να είναι το b. Το δεύτερο μέλος θα γίνει τέλειο τετράγωνο με κατάλληλη επιλογή του b. Προς τούτο, επειδή είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, θα πρέπει η (λυκειακή) διακρίνουσα του να είναι 0. Δηλαδή:
- $18^2 - 4(11 + 2b)(b^2 + 8) = 0$, η μετά από πράξεις:
- $2b^3 + 11b^2 + 16b - 7 = 0$
- Η ως άνω εξίσωση είναι η Επιλύουσα (Resolvent) της αρχικής τεταρτοβάθμιας.

Παράδειγμα (3/3)

- Αν το b ικανοποιεί αυτή την εξίσωση, τότε
- $(11 + 2b)x^2 \; - 18x + b^2 \; + 8 = = (11 + 2b)\Big(x -$

Τεταρτοβάθμια εξίσωση παράδειγμα. KATZ, p. 403

- Cardano's pupil Lodovico Ferrari (1522 –1565) , succeeded in finding the solution to the fourth-degree equation. Cardano presented this solution briefly near the end of the Ars magna, where he listed the 20 different types of quartic equations, outlined a basic procedure, and calculated a few examples. This basic procedure begins with a linear substitution that eliminates the …

Τεταρτοβάθμια εξίσωση παράδειγμα. KATZ, p. 404. Taking square roots, is ignored.

term in x^3, leaving an equation of the form $x^4 + cx^2 + e = dx$, for instance. To solve this equation, second-degree and constant terms are added to both sides to turn each side into a perfect square. One then takes square roots and calculates the answer. We illustrate the procedure with one of Cardano's examples: $x^4 + 3 = 12x$. If we add $2bx^2 + b^2 - 3$ to both sides (where b is to be determined), the left side becomes $x^4 + 2bx^2 + b^2$, a perfect square, while the right side becomes $2bx^2 + 12x + b^2 - 3$. For this latter expression to be a perfect square, we must have $2b(b^2 - 3) = (12/2)^2$ or $2b^3 = 6b + 36$. Therefore, we need to solve a cubic equation in b. (This equation is now called the resolvent cubic of the given quartic.) Cardano, of course, had a rule for solving this equation, but in this case it is clear that $b = 3$ is a solution. Thus, the added polynomial is $6x^2 + 6$, and the original equation is transformed into $x^4 + 6x^2 + 9 = 6x^2 + 12x + 6$. Taking square roots gives $x^2 + 3 = \sqrt{6}(x + 1)$, the solutions to which are easily found to be

Τεταρτοβάθμια εξίσωση παράδειγμα. KATZ, Οι λοιπές ρίζες της επιλύουσας δίνουν περαιτέρω ρίζες της αρχικής τεταρτοβάθμιας?

$$x = \sqrt{1\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\sqrt{6} - 1\frac{1}{2}}.$$

Are these the only roots of the quartic? One can attempt to find others by taking negative square roots in the equation $x^4 + 6x^2 + 9 = 6x^2 + 12x + 6$, but that leads to complex values for x that Cardano ignored. In other examples, he did use both sets of roots. One could also look for other roots by using a second solution of the resolvent cubic. Cardano evidently considered this possibility but only teased the reader about what happens: "I need not say whether having found another value for b . . . we would come to two other solutions [for x]. If this operation delights you, you may go ahead and inquire into this for yourself."[19]

Τεταρτοβάθμια εξίσωση, παράδειγμα: Η περίπτωση μιγαδικών ριζών

- Εξάγοντας τετραγωνικές ρίζες, αγνοεί το $-$
- Οι ρίζες που βρήκε πιο πάνω είναι θετικές
- Δεν λαμβάνει υπ’ όψιν την περίπτωση
- $x^2 + 3 = -6^{1/2}(x+1)$, η οποία έχει μιγαδικές ρίζες

Σύγκρισις λατινικού - αγγλικού
Ars Magna, ch. 39, prob. 9

Qvæstio IX.

Inuenias numerum, cuius quad. quadratum, cum quadruplo ſui, & 8. æquetur decuplo ſui quadrati, dicemus igitur 1. quad. quadratum p̄. 4. poſ. p̄. 8. æquantur 10. quadratis. Quare ſemper poſitiones dabimus

1. quad. quad. p̄. 4. poſ. p̄. 8.
10. quad.

1. quad. quad. p̄. 8. | 10. quad. m̄. 4. poſ.

quadratis, & auferemus à quad. quadrato, & habebimus 1. quad. quadratum p. 8. æquale 20. quadratis m. 4. poſitionibus, &

- Problem IX
- Find a number the fourth power of which plus four times itself plus 8 is equal to ten times its square. We will say, therefore,
- $x^4 + 4x + 8 = 10x^2$.
- Therefore, as always, we give the x's
- to the squares, taking them from x^4, and we will have
- $x^4 + 8 = 10x^2 - 4x$

Ars Magna, trl. T. Richard Witmer, p. 248
Ch. XXXIX (1/5)

PROBLEM IX

Find a number the fourth power of which plus four times itself plus 8 is equal to ten times its square. We will say, therefore,

$$x^4 + 4x + 8 = 10x^2.$$

Therefore, as always, we give the x's to the squares, taking them from x^4, and we will have

$$x^4 + 8 = 10x^2 - 4x$$

and, since we see that the coefficient of x^2 is great and that of x small, we will attempt to decrease the coefficient of x^2 rather than to augment it. This we will do by subtracting $2x^2$ from both sides although the usual practice would be, on the contrary, to begin [by subtracting]

Ars Magna, trl. T. Richard Witmer, p. 248 Ch. XXXIX (2/5)

from the minor quantity [rather than] from the squares[36] since it is not proper that a negative second power should appear on the side of the first power, because there would then be no square root. Having, however, subtracting $2x^2$ from both sides, you will have

$$x^4 - 2x^2 + 8 = 8x^2 - 4x.$$

It is clear, however, that if $x^4 - 2x^2$ is to have a square root, the number must be $+1$. But it is $+8$. So 7 must be subtracted from both sides, and we will accordingly have

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 8x^2 - 4x - 7.$$

Ars Magna, trl. T. Richard Witmer, p. 248 Ch. XXXIX (3/5)

We will therefore add in the negative, so to speak, $2bx^2$ to the remaining $-2x^2$, in accordance with the rule, and we will add $b^2 + 2b$ positively, as by the same rule, to the number on both sides. Therefore the two sides will be equal, for the things that were added and subtracted were equal. Hence $(8 - 2b)x^2 - 4x + (b^2 + 2b) - 7$ has a square

Ars Magna, trl. T. Richard Witmer, p. 248 Ch. XXXIX (4/5)

root. By multiplying, therefore, the first part, which is $(8 - 2b)x^2$ by the third, which is $(b^2 + 2b) - 7$, what you see in the margin $[(8b^2 + 16b - 56 - 2b^3 - 4b^2 + 14b)x^2]$ results as the coefficient of x^2 and this must be equal to $4x^2$, which is the number produced by squaring one-half the middle part. Therefore, by canceling x^2 from

Ars Magna, trl. T. Richard Witmer, p. 248 Ch. XXXIX (5/5)

both sides, the multinomial becomes equal to 4. Whence, reducing the parts [still further] to their likenesses,

$$2b^3 + 60 = 4b^2 + 30b$$

and

$$b^3 + 30 = 2b^2 + 15b,$$

wherefore b equals 2, whether working according to the rule or by one's own sense alone.

Note. There are three things to be noted about this: First, that I reduced b in this problem to a number so that you could see its true value more clearly, for it is always foolish to add difficulty to difficulty. Second, that

$$b^3 + 30 = 2b^2 + 15b$$

has another solution besides 2, which can be found by its proper rule,

Ars Magna, trl. T. Richard Witmer

$x^4 - 2x^2(1+\beta) + \beta^2 + 2\beta + 1 =$

$(8-2\beta)x^2 - 4x + (\beta^2 + 2\beta) - 7$

Το πρωτο μελος ειναι $(x^2-(1+\beta))^2$

Αν $\beta = 2$, το δευτερο μελος ειναι

$4x^2 - 4x + 1$, και το πρωτο $x^4 - 6x^2 + 9$

Αρα η εξισωση η αρχικη, εχει γινει

$(x^2-3)^2 = (2x-1)^2$

Ars Magna, trl. T. Richard Witmer p. 250 (1/2)

$$x^4 - 6x^2 + 9 = 4x^2 - 4x + 1.$$

It is evident, moreover, that both [sides] have double roots, as you see, but reduction having been made, they necessarily come to two equations:

$$\text{either} \quad x^2 = 2x + 2$$
$$\text{or} \quad x^2 + 2x = 4.$$

The solutions for these equations are $\sqrt{3} + 1$ and $\sqrt{5} - 1$. I say, therefore, that with these solutions

$$x^4 + 4x + 8 = 10x^2.$$

Ars Magna, trl. T. Richard Witmer p. 250 (2/2)

- σ. 250, $x^4 - 6x^2 + 9 = 4x^2 - 4x + 1$, so
- $(x^2 - 3)^2 = (2x - 1)2\ so\ (x^2 - 3) = (2x - 1)$ or
- $-(2x - 1)$ so
- $x^2 - 2x - 2 = 0$ or $x^2 + 2x - 4 = 0$ the solutions are
- $1 + 3^{1/2}, 1 - 3^{1/2}$ and $-1 + 5^{1/2}, -1 - 5^{1/2}$

Ars Magna, trl. T. Richard Witmer p. 250. Challenging the reader!

The proof of this is given clearly at the side, as is evident. I need not say whether, having found another value for b in the case of

$$b^3 + 30 = 2b^2 + 15b$$

we would come to two other solutions [for x]. If this operation delights you, you may go ahead and inquire into this for yourself.

Ars Magna. Katz, p. 404
Refined and useless

This problem is simply to divide 10 into two parts (here we go again!) such that the product is 40. By standard techniques of solving quadratic equations, Cardano showed that the two parts must be $5 + \sqrt{-15}$ and $5 - \sqrt{-15}$. Although he checked that these answers in fact satisfy the conditions of the problem, he was not entirely happy with the solution, for, as he wrote, "So progresses arithmetic subtlety the end of which, as is said, is as refined as it is useless."[20] Cardano thus left off the discussion and wrote no more about complex numbers.

Τέλος Υποενότητας

Επίλυση εξίσωσης τετάρτου βαθμού

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Αθηνών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών, Παπασταυρίδης Σταύρος. «Ιστορία Νεότερων Μαθηματικών, Η Άλγεβρα της Αναγέννησης». Έκδοση: 1.0. Αθήνα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://opencourses.uoa.gr/courses/MATH113/.

Σημείωμα Αδειοδότησης

Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.

Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

Το Έργο αυτό κάνει χρήση των ακόλουθων έργων:

Εικόνες/Σχήματα/Διαγράμματα/Φωτογραφίες