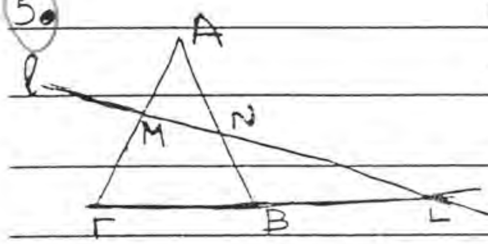
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ [φυλλάδιο Εισαγωγικό]

1. Έστω ℓ η ευθεία που ορίζουν τα $A(\vec{u}_A)$ και $B(\vec{u}_B)$. Τότε για κάθε σημείο $\Gamma(\vec{u}_\Gamma)$ της ℓ υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $\vec{u}_\Gamma = (1-t)\vec{u}_A + t\vec{u}_B$, όπου ο λόγος (των πραγματικών αριθμών) $t : (1-t)$ είναι ο λόγος [των (προσανατολισμένων) συνευθειακών τμημάτων] $\overline{A\Gamma} : \overline{\Gamma B}$.

2. Αν τα $A(\vec{u}_A)$, $B(\vec{u}_B)$, $\Gamma(\vec{u}_\Gamma)$ είναι συνευθειακά, τότε υπάρχουν $x, y, z \in \mathbb{R}$, όχι όλα μηδέν: $\{x+y+z=0$ και $x\vec{u}_A + y\vec{u}_B + z\vec{u}_\Gamma = 0\}$.

3. Αν για τα $A(\vec{u}_A)$, $B(\vec{u}_B)$, $\Gamma(\vec{u}_\Gamma)$ και τα x, y, z που δεν είναι όλα μηδέν ισχύει $\{x+y+z=0,\ x\vec{u}_A + y\vec{u}_B + z\vec{u}_\Gamma = 0\}$, τότε τα A, B, Γ είναι συνευθειακά.

4. Αν τα A, B, Γ είναι διακεκριμένα και μη συνευθειακά τότε:
$\{(x+y+z=0)$ και $(x\vec{u}_A + y\vec{u}_B + z\vec{u}_\Gamma = 0)\} \Rightarrow x=y=z=0$.

5. 

Έστω ότι η ευθεία ℓ συναντά τις πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$ στα σημεία L, M, N (όπου το L στην $B\Gamma$, το M στην ΓA, το N στην AB). Τότε $(\overline{BL} : \overline{L\Gamma}) \cdot (\overline{\Gamma M} : \overline{MA}) \cdot (\overline{AN} : \overline{NB}) = -1$.

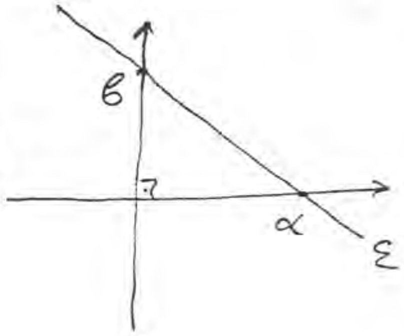
6. Αν δοθούν $A(\vec{u}_A)$, $B(\vec{u}_B)$, $\Gamma(\vec{u}_\Gamma)$ μη συνευθειακά και $P(\vec{u}_P)$ τυχαίο τότε: Υπάρχουν μοναδικά $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\{x+y+z=1$ και $\vec{u}_P = x\vec{u}_A + y\vec{u}_B + z\vec{u}_\Gamma\}$

7. Αν οι ευθείες $AP, BP, \Gamma P$ συναντούν τις απέναντι πλευρές του τριγώνου $(AB\Gamma)$ στα L, M, N αντίστοιχα, τότε ισχύει η σχέση:
$$(\overline{BL} : \overline{L\Gamma}) \cdot (\overline{\Gamma M} : \overline{MA}) \cdot (\overline{AN} : \overline{NB}) = 1$$

8. Να αποδειχθεί ότι στο τυχαίο τρίγωνο τα 9 σημεία που καθορίζουν: τα μέσα των πλευρών, τα μέσα των τμημάτων που ενώνουν τις κορυφές με το ορθόκεντρο, τα ίχνη των υψών πάνω στις πλευρές βρίσκονται στον ίδιο κύκλο. (κύκλος των εννέα σημείων).
(Υπόδειξη: για το κέντρο N του κύκλου ισχύει $\vec{u}_N = \vec{u}_A + \vec{u}_B + \vec{u}_\Gamma + \vec{u}_\Delta$ A, B, Γ οι κορυφές του τριγώνου, Δ το ορθόκεντρο.) οι κορυφές του τριγώνου και Ν: ορθόκεντρ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ
(Εξίσωση της ευθείας και Εφαρμογές)

(1) Έστω Ρ το σημείο τομής της ευθείας $Ax+By+\Gamma=0$ και της ευθείας που ορίζουν τα σημεία $M(x_1,y_1)$ και $N(x_2,y_2)$. Να δειχθεί ότι το Ρ διαιρεί το $\overrightarrow{MN}$ σε λόγο $-\dfrac{Ax_1+By_1+\Gamma}{Ax_2+By_2+\Gamma}$.

(2) 

Στο διπλανό σχήμα η ευθεία (ε) είναι μεταβλητή και τέμνει τους άξονες έτσι ώστε $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=$ σταθ. Να αποδειχθεί ότι η (ε) διέρχεται από σταθερό σημείο.

(3) Να αποδειχθεί ότι: Οι ευθείες που ενώνουν τα μέσα των απέναντι πλευρών τετραπλεύρου και η ευθεία που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(4) Δίνονται οι ευθείες
$$\begin{cases}(\varepsilon_1) & 5x-y=22\\ (\varepsilon_2) & x+5y=-6\\ (\varepsilon_3) & 5x-y=-4\end{cases} \text{ και } (\varepsilon_4):\ 5y+x-k=0.$$

Να εξετασθεί αν υπάρχουν τιμές του k έτσι ώστε οι $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2),(\varepsilon_3)$ και (ε_4) να ορίζουν τετράγωνο.

(5) Να αποδειχθεί ότι οι διαγώνιοι τετραπλεύρου οι πλευρές του οποίου είναι ευθείες με εξισώσεις
$$\begin{cases}\alpha x+by=\alpha b\\ bx+\alpha y=\alpha b\\ \alpha x+by=2\alpha b\\ bx+\alpha y=2\alpha b\end{cases},$$
είναι ευθείες κάθετες.

(6) Δίνονται σημεία A,B,C,D τέτοια ώστε:
- Τα A,C βρίσκονται στους θετικούς ημιάξονες και $|AC|=$ σταθ.
- Τα B,D είναι απέναντι πλευρές τετραγώνου με διαγώνιο AC.

Να αποδειχθεί ότι τα B και D βρίσκονται επί ευθειών με εξισώσεις $x-y=0$ και $x+y=0$ αντίστοιχα!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

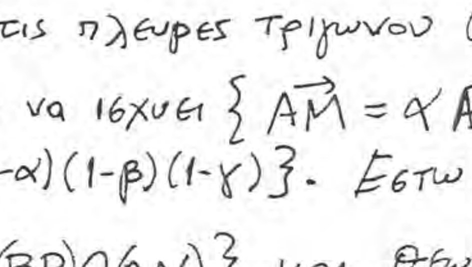
(Μπορουν να λυθουν και με χρηση "εξωτερικου γινομενου").

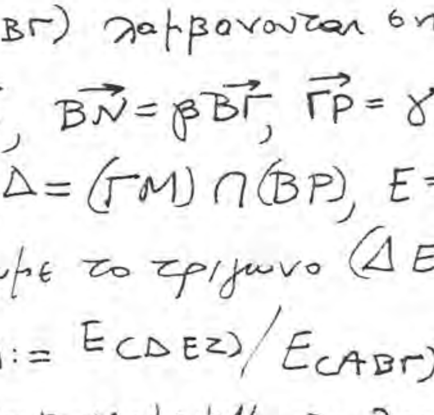
1. Στις πλευρες τριγωνου $(\overset{\Delta}{AB\Gamma})$ λαμβανονται (εσωτερικα) σημεια M, N, P ετσι ωστε $\vec{AM} = \alpha \vec{AB}$, $\vec{BN} = \alpha \vec{B\Gamma}$, $\vec{\Gamma P} = \alpha \vec{\Gamma A}$. Για ποιες τιμες του α, το εμβαδον του τριγωνου με πλευρες $\vec{\Gamma M}, \vec{AN}, \vec{BP}$ γινεται ελαχιστο.

2. Να αποδειχθει οτι το εμβαδον του τριγωνου που εχει ως πλευρες τις διαμεσους ενος τριγωνου $AB\Gamma$, ειναι τα $(3/4)$ του εμβαδου του τριγωνου $AB\Gamma$.

3. Στις πλευρες τριγωνου $(AB\Gamma)$ λαμβανονται σημεια M, N, P ετσι, ωστε να ισχυει $\{\vec{AM} = \alpha \vec{AB}$, $\vec{BN} = \beta \vec{B\Gamma}$, $\vec{\Gamma P} = \gamma \vec{A\Gamma}$ και $\alpha\beta\gamma \neq (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\}$. Εστω $\{\Delta = (\Gamma M) \cap (BP)$, $E = (\Gamma M) \cap (AN)$ και $Z = (BP) \cap (AN)\}$ και θεωρουμε το τριγωνο $(\Delta E Z)$. Να δοθει το πηλικον των εμβαδων $\lambda := E(\Delta EZ) / E(AB\Gamma)$, ως συναρτηση των α, β, γ. [Εφαρμογη: $\alpha = \beta = \gamma = k \neq 1/2 \Rightarrow \lambda = \dfrac{(k-\frac{1}{2})^2}{\frac{3}{4} + (k-\frac{1}{2})^2}$]

4.

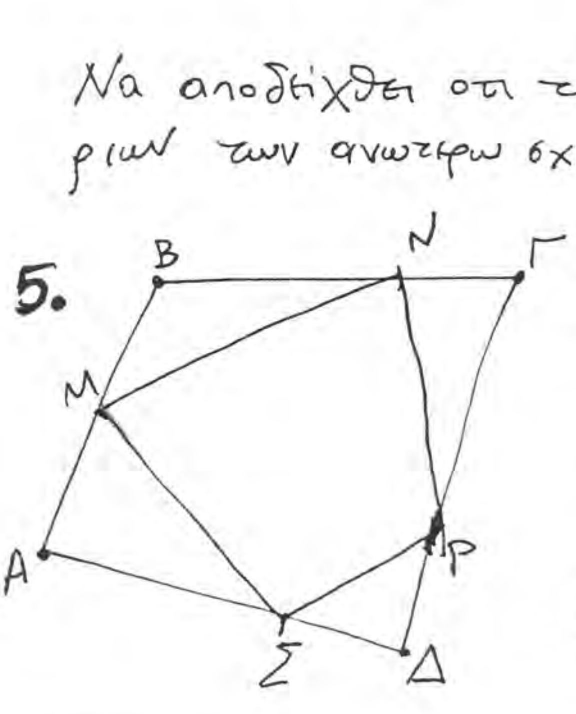




(Τα Β και Δ βρισκονται "εκατερωθεν" της ΒΓ)

Να αποδειχθει οτι το εμβαδον των γραμμοσκιασμενων χωριων των ανωτερω σχηματων δινεται απο τη σχεση $\frac{1}{2} \| \vec{A\Gamma} \times \vec{B\Delta} \|$.

5.



Στο διπλα σχημα $\dfrac{|AM|}{|AB|} = \dfrac{|BN|}{|B\Gamma|} = \dfrac{|\Gamma P|}{|\Gamma \Delta|} = \dfrac{|\Delta\Sigma|}{|\Delta A|} = \alpha$.

Για ποιες τιμες του α, το εμβαδον του τετραπλευρου $(MNP\Sigma)$ ελαχιστοποιειται;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ

1) Στο χωρο δινονται τεσσερα μη συνεπιπεδα σημεια A, B, Γ, Δ και τα σημεια P_1, P_2, P_3, P_4 για τα οποια: $\vec{AP_1} = k\vec{P_1B}$, $\vec{BP_2} = \lambda\vec{P_2\Gamma}$, $\vec{\Gamma P_3} = \mu\vec{P_3\Delta}$ και $\vec{\Delta P_4} = \nu\vec{P_4A}$ με $k, \lambda, \mu, \nu \neq -1$. Να αποδειχθει οτι τα P_1, P_2, P_3, P_4 βρισκονται στο ιδιο επιπεδο, τοτε και μονον τοτε αν $k\lambda\mu\nu = 1$.

2) Τα σημεια A, B, Γ κινουνται επι των θετικων ημιαξονων Ox, Oy, Oz ενος τρισορθογωνιου κανονικου συστηματος συντεταγμενων, ετσι ωστε να ισχυουν: $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{O\Gamma} = \frac{1}{\lambda}$, λ σταθερα. Να αποδειχθει οτι το επιπεδο των A, B, Γ διερχεται απο σταθερο σημειο.

3) Στο χωρο δινονται τεσσερα μη συνεπιπεδα σημεια A, B, Γ, Δ και τα σημεια K, Λ, M, N τα οποια ειναι τα κεντρα βαρους των τριγωνων $B\Gamma\Delta$, $A\Gamma\Delta$, $AB\Delta$ και $AB\Gamma$ αντιστοιχα. Να αποδειχθει οτι οι ευθειες AK, $B\Lambda$, ΓM και ΔN διερχονται απο το ιδιο σημειο.

4) Ενα επιπεδο συναντα τους αξονες ενος τρισορθογωνιου συστηματος συντεταγμενων στα σημεια A, B, Γ. Να αποδειχθει οτι η καθετος που αγεται απο την αρχη του συστηματος προς το επιπεδο, διερχεται απο το ορθοκεντρο του τριγωνου $(AB\Gamma)$.

5) Στο χωρο δινονται 4 μη συνεπιπεδα σημεια A, B, Γ, Δ. Να αποδειχθει οτι οι ευθειες που ενωνουν τα μεσα των συνδυασμων τμηματων ($A\Gamma$ και $B\Delta$), (AB και $\Gamma\Delta$), ($B\Gamma$ και $A\Delta$) διερχονται απο το ιδιο σημειο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

(ΚΥΚΛΟΣ - ΕΛΛΕΙΨΗ - ΥΠΕΡΒΟΛΗ - ΠΑΡΑΒΟΛΗ)

1)

α) Δινεται ο κυκλος $x^2+y^2=1$ και το σημειο $A(1,0)$. Να ευρεθει ο γ.τ. των μεσων των χορδων του κυκλου που διερχονται απο το σημειο A. Να εξετασθει το ιδιο ερωτημα για τα σημεια $A'(2,0)$ και $A''(\frac{1}{2},0)$.

β) Δινεται η παραβολη $y^2=2x$ και το σημειο $A(0,0)$. Να ευρεθει ο γ.τ. των μεσων των χορδων της παραβολης που διερχονται απο το σημειο A. Να εξετασθει το ιδιο ερωτημα για τα σημεια $A'(2,2)$, $A''(2,4)$ και $A'''(2,1)$.

Μπορειτε να διατυπωσετε και να αποδειξετε ενα γεωμετρικο συμπερασμα [redacted] (:θεωρημα;) που να ενσωματωνει και να γενικευει τα αποτελεσματα των περιπτωσεων α) και β);

2) Στο επιπεδο, και για ενα ορθοκανονικο συστημα αξονων Oxy, θεωρουμε τα σημεια $A(\alpha,0)$ $(\alpha>0)$, $B(0,\beta)$ $(\beta>0)$ και $M(x,y)$, ετσι ωστε: $|AB|=\gamma=$ σταθερο και επιπλεον $\vec{AM}=\lambda\vec{MB}$, οπου λ σταθερα $\neq -1$. Ζητειται ο γ.τ. του σημειου M. Εφαρμογη: $\lambda=1$.

3) Θεωρουμε ισοσκελη υπερβολη (C) και τρια μη συνευθειακα σημεια A, B, Γ στην (C). Να αποδειχθει τοτε οτι, το ορθοκεντρο H του τριγωνου $AB\Gamma$ ειναι σημειο της υπερβολης (C).

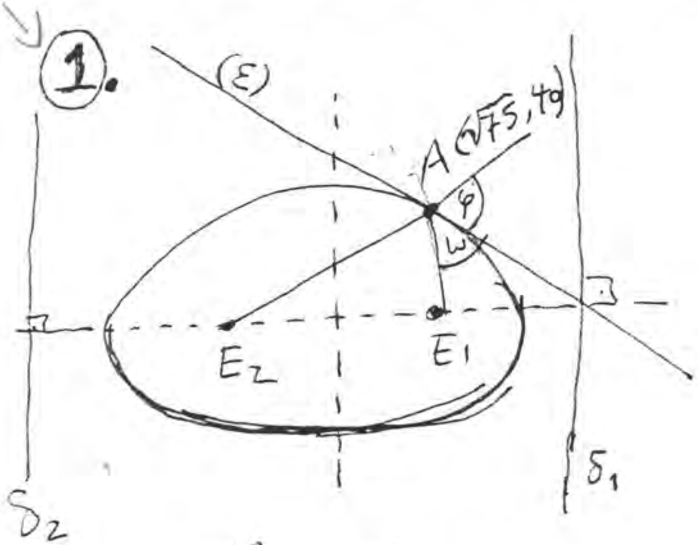
4) Διδεται ελλειψη και ζητειται ο γ.τ. των σημειων απο τα οποια οι εφαπτομενες που αγονται προς την ελλειψη ειναι ευθειες καθετες. Εφαρμογη: Η περιπτωση του κυκλου.

5) Ορθογωνιο τριγωνο εγγραφεται σε παραβολη ουτως ωστε η κορυφη της ορθης γωνιας να συμπιπτει με την κορυφη της παραβολης. Να αποδειχθει τοτε οτι η υποτεινουσα διερχεται απο σταθερο σημειο.

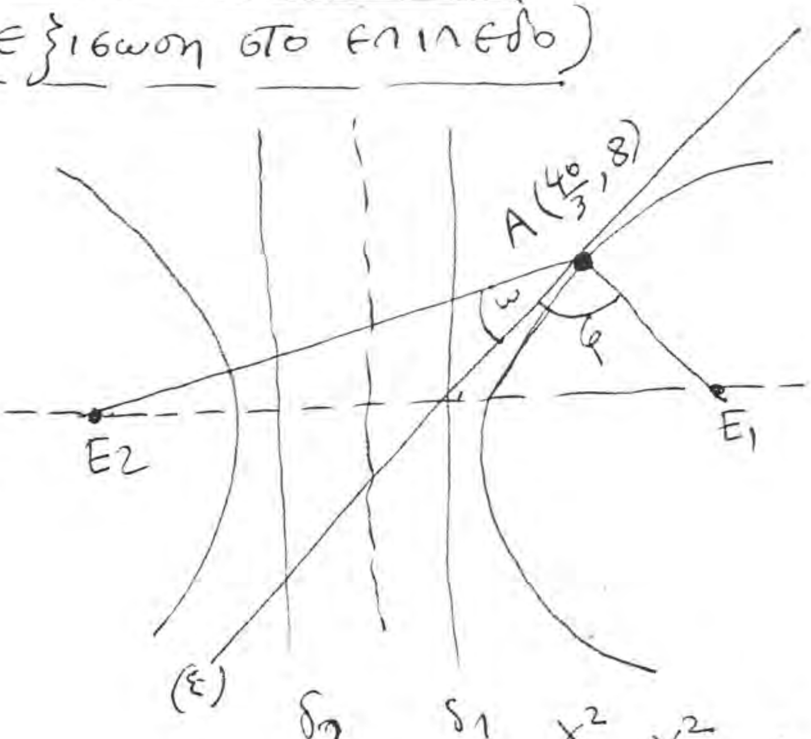
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

(Η δευτεροβάθμια εξίσωση στο επίπεδο)

1.



$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$$



$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$$

Για τις καμπύλες που υποδεικνύονται στα παρακάτω σχήματα

- Υπολογίστε τα: εστίες, διευθετούσες, εκκεντρότητα
- Αν η (Ε) είναι εφαπτομένη στο Α, συγκρίνετε τις γωνίες ω και φ.

2) Αφού αναγνωρισθεί ότι η εξίσωση $x^2-6xy+y^2+4x+4y-3=0$ παριστάνει υπερβολή, στη συνέχεια να βρεθούν: οι εστίες, η διευθετούσα και η εκκεντρότητα.

3) Δίνεται η (Ε) $x^2-2\lambda xy+y^2-6\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y-6=0$

- Να προσδιορισθούν οι τιμές του λ για τις οποίες η (Ε) παριστάνει έλλειψη ή υπερβολή
- Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ακριβώς ένα θετικό λ, ώστε η (Ε) να παριστάνει παραβολή και σ' αυτή τη περίπτωση προσδιορίστε την εστία και την διευθετούσα.

4) Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$ και το σημείο $A(1,4)$. Ζητείται να εξετασθεί αν υπάρχουν ευθείες με την ακόλουθη ιδιότητα: Να διέρχονται από το Α και να συναντούν την παραβολή ~~σε~~ τρόπο ώστε να σχηματίζεται ορθή γωνία με την εφαπτομένη στο σημείο συνάντησης.