Βήμα 2 | Αφού $J_3=0$, η (Q) δεν έχει κέντρο!
Θεωρούμε τώρα την εξίσωση: $t^2-J_1t+J_2=0$
$\Leftrightarrow t^2-28t+192=0$ που έχει ρίζες: $\alpha=12$, $\beta=16$
οπότε $a_3^2=+\frac{J_4}{J_2}=+\frac{12^3\cdot 4\cdot 16}{192} \Rightarrow a_3 = \pm 24$

Βήμα 3 | Υπάρχει μια αλλαγή συντεταγμένων έτσι ώστε να φτάσουμε στη μορφή: $12(x')^2+16(y')^2-48(z')+8=0$
Θεωρούμε τώρα: $X=x'$, $Y=y'$ και $Z=z'-\frac{2}{12}$
οπότε το κανονικό σύστημα, (Q) $\Leftrightarrow \frac{X^2}{4}+\frac{Y^2}{3}=Z$

Συμπέρασμα: Η (Q) είναι ένα ελλειπτικό παραβολοειδές

4º Κεφάλαιο: Πολυδιάστατη Γεωμετρία

Είναι η "Γεωμετρία σ'ένα Διανυσματικό Χώρο (συνήθως πεπερασμένης διάστασης, αλλά όχι πάντα)

Ο ρόλος των συντεταγμένων:
$\dim V = n$ - πεπερασμένο, πάνω από το $\mathbb{R}$
Βασικό Θεώρημα: $V \cong \mathbb{R}^n$
↳ ισόμορφος

Απόδειξη: "Γνωρίζουμε" ότι ο V έχει βάση (και όλες οι βάσεις έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων)

Έστω $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ μια Διατεταγμένη βάση $n=\dim V$
<-> επιλέγω βάση B
① $x\in V$, $x=x_1v_1+\dots+x_nv_n$, $(x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}$: μοναδικά$)$
$x \underset{B}{\longleftrightarrow} (x_1,\dots,x_n)$ τα x_i λέγονται συντεταγμένες του x, ως προς B.
ορίζω απεικόνιση $f_B: V\to\mathbb{R}^n$, $(x)\longrightarrow(x_1,\dots,x_n)$
η f_B: είναι γραμμικός ισομορφισμός (άσκηση)
↳ για να το αποδείξουμε πρέπει πρώτα να αποδείξουμε:
① γραμμική: $f_B(\lambda x+y)=\lambda f_B(x)+f_B(y)$ / "1-1": $f_B(x)=f_B(y) \Leftrightarrow \boxed{x=y}$
"επί": $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $a=a_1v_1+\dots+a_nv_n$, $f_B(a)=(a_1,\dots,a_n)$

συντεταγμένες $\longleftrightarrow$ $\boxed{\text{επιλογή}}$ βάσης
↳ αλλαγή βάσης $\longrightarrow$ αλλαγή συντεταγμένων
(1º βήμα) (2º βήμα)

Αλλαγή βάσης: $B_1 \equiv \{u_1, \dots, u_n\} \longleftrightarrow B_2 \equiv \{w_1, \dots, w_n\}$

$V \ni x$, $\quad (x_1, \dots, x_n) \xleftrightarrow{?} (y_1, \dots, y_n)$ μέσω γ_{B_1} και γ_{B_2} αντίστοιχα.

(Θέλουμε να δούμε τη σχέση που έχουν μεταξύ τους οι n-άδες)

$$w_1 = a_{11}u_1 + \dots + a_{1n}u_n$$
$$\vdots$$
$$w_n = a_{n1}u_1 + \dots + a_{nn}u_n$$

$$x = y_1w_1 + \dots + y_nw_n = y_1a_{11}u_1 + \dots + y_1a_{1n}u_n$$
$$+ y_2a_{21}u_1 + \dots + y_2a_{2n}u_n$$
$$\vdots$$
$$+ y_na_{n1}u_1 + \dots + y_na_{nn}u_n$$
$$= \underbrace{(y_1a_{11} + y_2a_{21} + \dots + y_na_{n1})}_{x_1}u_1 + \dots + \underbrace{(y_1a_{1n} + \dots + y_na_{nn})}_{x_n}.u_n$$ (βάσης)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1a_{11} + y_2a_{21} + \dots + y_na_{n1} \\ &\vdots \\ x_n &= y_1a_{n1} + y_2a_{n2} + \dots + y_na_{nn} \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A^T} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$\{w\} = A\{u\}$

$\{x\} = A^T\{y\}$ / (σε στήλες)

Συμπέρασμα: Οι συντεταγμένες είναι μια αναπαράσταση των στοιχείων του χώρου με αριθμούς.

Παράδειγμα: $\mathbb{R}[x \in [0,1]]$ = πολ/κες συναρτήσεις με Π.Ο. $[0,1]$ και $\deg \leq 2$ βαθμό ≤ 2 (πραγματικές)

$\dim V = 3$, $B = \{1, x, x^2\}$, $f \in V$, $f = ax^2 + bx + \gamma$, $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$

$x \in [0,1]$, $f \longleftrightarrow (a, b, \gamma)$

$M(n \times n, \mathbb{R}) = V$

όλοι οι πίνακες $(n \times n)$, με πραγματικούς συντελεστές

$\dim V = n^2$

βάση: (E_{ij}) $\begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix}$ το a_{ij} έχει 1 και όλα τα υπόλοιπα είναι 0.

20/6

V: διανυσματικός χώρος
(χαρακτηριστικά: επί του $\mathbb{R}$, $\dim V = n < \infty$)

Θεώρημα: $V \cong \mathbb{R}^n$
↳ ισόμορφο

Πολυδιάστατη Γεωμετρία, γενικεύει τη Γεωμετρία του $\mathbb{R}^3$
Στο $\mathbb{R}^n$ ένα υπερεπίπεδο είναι η γενίκευση του επιπέδου στο $\mathbb{R}^3$
Δηλαδή διάστασης $n-1$.

- αν περιέχει το 0 → υπόχωρος
- αλλιώς → μεταφορά υπόχωρου

Πρόταση: $\left\{\begin{array}{c}\text{Υπερεπίπεδα} \\ \text{που περιέ-} \\ \text{χουν το } 0\end{array}\right\} \longleftrightarrow \underbrace{\left\{\begin{array}{c} f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ \text{γραμμική} \\ (\text{επί})\end{array}\right\}}_{\text{γραμμικό συναρτησοειδές}}$

<=> Απόδειξη:

($\Longrightarrow$) $W \leq V$, $\dim W = n-1$
$\{u_1, \dots, u_n\}$: βάση του W
επεκτείνω σε μία βάση $\{u_1, \dots, u_{n-1}, a\}$ του V
(π.χ. παίρνω $a \notin W$)
Ορίζω $f: V \to \mathbb{R}$
$f(u_i) = 0$ και επεκτείνω γραμμικά
$f(a) = 1$
$\ker f = W$
f: επί
$f(x) = f(\Sigma x_i u_i + \lambda a) = f(\lambda a) = \lambda$, f: γραμμική και επί

($\Longleftarrow$) Έστω $g: V \to \mathbb{R}$, γραμμική και επί
$\{l_1, \dots, l_n\}$: βάση του V
$y \in V$, $y = \Sigma y_i l_i$, $f(y) = \Sigma y_i \underset{\substack{\| \\ b_i \in \mathbb{R}}}{f(l_i)} = \Sigma b_i y_i$, $W = \ker f$

$\dim W = \dim V - \dim \mathbb{R}$, $f(y) = b_1 y_1 + \dots + b_n y_n$
$= n-1$

W: υπόχωρος $\Longrightarrow$ υπερεπίπεδο

• Συμπέρασμα: $\forall$ υπερεπίπεδο H στο $\mathbb{R}^n$ υπάρχουν $k_1, \dots k_n \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ ώστε: $x = (x_1, \dots, x_n) \in H \iff k_1 x_1 + \dots + k_n x_n = \gamma$

• Πώς θα μιλήσω για "καθετότητα" σ'ένα τυχαίο διανυσματικό χώρο.

$\Longrightarrow$ Η έννοια του εσωτερικού γινομένου

V: διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$

Ορισμός: Μια απεικόνιση $\mathcal{E}: V \times V \to \mathbb{R}$ που είναι συμμετρική, διγραμμική και θετικά ορισμένη, ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο στο **V**.

$$V \times V \ni (x, y) \longrightarrow \mathcal{E}(x, y) \in \mathbb{R}$$

(Ιδιότητες:)

i) $\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{E}(y,x)$, $\forall\, x, y \in V$ (συμμετρική)

ii) $\mathcal{E}(\lambda x + y, z) = \lambda \mathcal{E}(x,y) + \mathcal{E}(y,z)$, $\forall\, x, y, z \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (διγραμμική)

iii) $\mathcal{E}(x,x) \geq 0$, $\mathcal{E}(x,x) = 0 \iff x = 0$ (θετικά ορισμένο)

Το ζεύγος $(V, \mathcal{E})$ ονομάζεται χώρος εσωτερικού γινομένου.

[αυτό υποδεικνύει ότι υπάρχουν "πολλά" εσωτερικά γινόμενα?]

Παράδειγμα:

$I = [0, 1]$

$V = C_{\mathbb{R}}([0,1]) = \{ f \mid f: [0,1] \to \mathbb{R}, \text{ συνεχής} \}$

$$\left.\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\lambda f)(x) &= \lambda \cdot f(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow V: \text{διανυσματικός χώρος}$$

Προσοχή! ο V δεν έχει πεπερασμένη διάσταση.

π.χ. $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ γραμμικά ανεξάρτητα

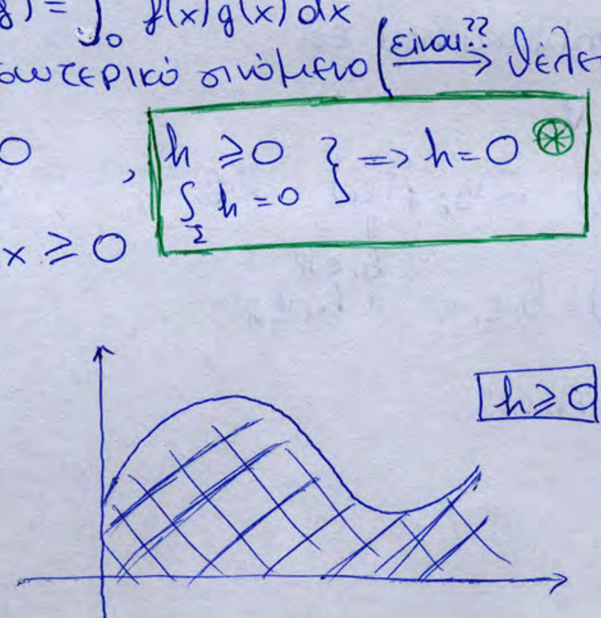
Στο V ορίζουμε $\mathcal{E}(f, g) = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$

$\mathcal{E}: V \times V \to \mathbb{R}$, εσωτερικό γινόμενο (είναι?? $\Rightarrow$ θέλει απόδειξη μόνο η 3η ιδιότητα (θετικά ορ.))

$$\left.\begin{aligned} h &\geq 0 \\ I & \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int_I h \geq 0 \quad , \quad \boxed{\left.\begin{aligned} h &\geq 0 \\ \int_I h &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = 0 \ ⊛}$$

$$\mathcal{E}(f,f) = \int_0^1 \underbrace{(f(x))^2}_{\geq 0} dx \geq 0$$

⊛ 1η απόδειξη (εποπτική):



⊛ 2η απόδειξη (θεωρητικά):

$$h \geq 0 \,,\ \int_I h = 0 \Rightarrow h = 0$$

Έστω $\exists\, x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow h(x) = l > 0$

$\exists\, \varepsilon > 0$ ώστε $h|(x_0-\varepsilon,\, x_0+\varepsilon) > 0$

$$\int_{(x_0-\varepsilon)}^{(x_0+\varepsilon)} h > 0, \quad \int_I h \geq \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} h > 0 \Longrightarrow \boxed{\int_I h \geq 0}$$

Παράδειγμα: $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$

Θεωρώ: $Q(x,y) = Q((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 - x_2y_2$

Είναι το Q εσωτερικό γινόμενο??

• Συμμετρικό - Διγραμμικό: Έλεγχος σε χώρο συντεταγμένων!

$$Q(x,y) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \boxed{x^tAy}, \quad A = A^t: \text{συμμετρικός}$$

$\Downarrow$

Q: συμμετρικός

Διγραμμικό (πράξεις πινάκων)

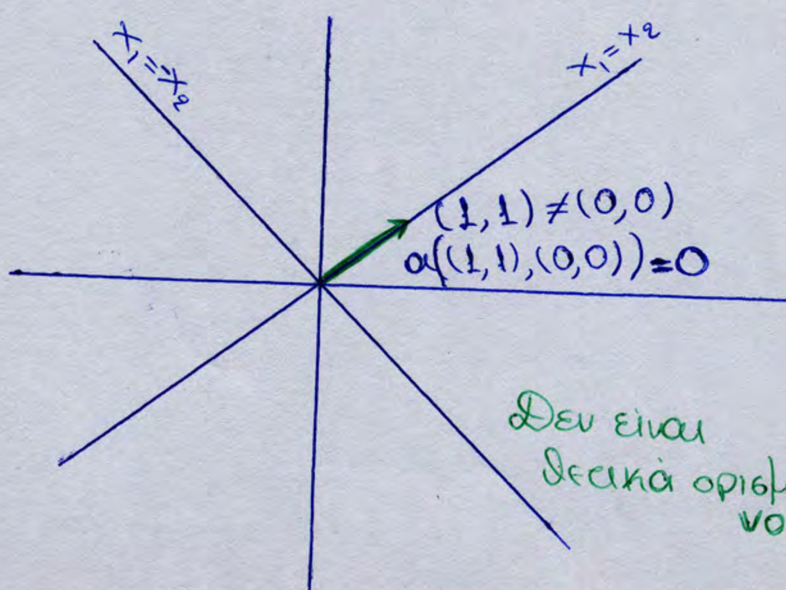
$$Q(x+x', y) = (x+x')^tAy = (x^t + x'^t)Ay = x^tAy + x'^tAy = Q(x,y) + Q(x',y)$$

• Μένει το "θετικά ορισμένο":

$Q(x,x) = x_1^2 - x_2^2$

$Q(x,x) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2$

"Κώνος" στο $\mathbb{R}^2$



Δεν είναι θετικά ορισμένο.

Ερώτημα: Έχει νόημα τα μη θετικά ορισμένα εσωτερικά γινόμενα?

$$\mathbb{R}^4 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow A$$

$\mathbb{R}^4$: μη ευκλείδιος χώρος και εδώ θεμελιώνεται η θεωρία της σχετικότητας.

Χώρος Εσωτερικού Γινομένου

V: διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{R}$, $\dim V = n < 0$

$\mathcal{E}: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ $\begin{cases} \text{Διγραμμική} \\ \text{συμμετρική} \\ \text{Θετικά ωρισμένη} \end{cases}$

(i) $\mathcal{E}(x,y) = \mathcal{E}(y,x)$, $\forall x,y \in V$

(ii) $\mathcal{E}(\lambda x + y, z) = \lambda \mathcal{E}(x,z) + \mathcal{E}(y,z)$, $\forall x,y,z \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $\mathcal{E}(x,x) \geq 0$, $\forall x \in V$, $\mathcal{E}(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $x \in V$

Παραδείγματα: $\mathbb{R}^n$ [δχ. $\dim V = n$]

$L = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$

$x = (x_i)$, $y = (y_i)$

$\mathcal{E}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \underbrace{\left(y_1 x_1 + \dots + y_n x_n = \mathcal{E}(y,x)\right)}$

Ισχυρισμός: $\mathcal{E} \Longrightarrow$ εσωτερικό γινόμενο

Αποδ: $\mathcal{E}(x,y) = \sum x_i y_i = \sum y_i x_i = \mathcal{E}(y,x)$

$\mathcal{E}(\lambda x, y) = \sum (\lambda x_i) y_i = \sum \lambda (x_i y_i) = \lambda \sum x_i y_i = \lambda \mathcal{E}(x,y)$

$\mathcal{E}(x+y, z) = \sum (x_i + y_i) z_i = \sum (x_i z_i + y_i z_i) = \sum x_i z_i + \sum y_i z_i = \mathcal{E}(x,z) + \mathcal{E}(y,z)$

$\mathcal{E}(x,x) = \sum x_i^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$, $\mathcal{E}(x,x) = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Άλλος τρόπος γραφής:

$x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$

$= x^t I_n y = \mathcal{E}(x,y)$, $\mathcal{E}$: συμμετρικός, διγραμμικός

συμμετρ: $I_n^t = I_n$

$(\mathcal{E}(x,y) = x^t A y, \; A^t = A)$

$\mathbb{R}^n$ συμμετρικό διγραμμικό

Παραδείγματα:

$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ Δ.χ. διάσταση 2

$Q: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = 5x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$

Να εξετάσετε αν ορίζει εσωτερικό γινόμενο

(i)+(ii) $Q((x_1,x_2)(y_1,y_2)) = (x_1,x_2)\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} =$

$\left(= (5x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 5x_1y_1 + y_1x_2 + x_1y_2 + 2x_2y_2\right)$

$A^T = A \Rightarrow A$: συμμετρικός $\Rightarrow Q$: συμμετρικός

$Q(x,y) = x^t A y \Rightarrow Q$: διγραμμικός

• Θετικά ωρισμένο:

$Q(x,x) \xrightarrow[x=(x_1,x_2)]{x=y} 5x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_2 + 2x_2^2 = 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 =$

$= 4x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2 \geq 0$

$Q(x,x) = 0 \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$

$\iff x = (0,0) \iff x = 0 \in \mathbb{R}^2$

2> Το ίδιο ακριβώς:

$A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$Q(x,x) = -5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = -4x_1^2 - x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 + 3x_2^2$

$= -4x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2 \leq 0$ (Δεν είναι θετικά ορισμένο)

Παράδειγμα: $V = \mathbb{R}[x \mid [0,1]] = \{ax^2 + bx + \gamma \mid a, b, \gamma \in \mathbb{R},\ x \in [0,1]\}$
$\deg \leq 2$

V: δ.χ. επί του $\mathbb{R}$
$\dim V = 3$, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ βάση
διγραμμικό, συμμετρικό
(Ιδιότητες του ολοκληρώματος)

$p(x), q(x) \in V$

$\mathcal{E}(p,q) = \int_0^1 (p(x) \cdot q(x))\,dx$

Το $\mathcal{E}$ είναι εσωτερικό γινόμενο

• Θετικά ωρισμένο: $\mathcal{E}(p,p) = \int_0^1 \underbrace{[p(x)]^2}_{\geq 0}\,dx \geq 0$

$\int_0^1 (p(x))^2\,dx = 0 \iff p(x) = 0$

$\mathcal{E}(1,x) = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

$\mathcal{E}(x,x) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1/3$

$\mathcal{E}(1, x-1/2) = \int_0^1 (x-1/2)dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$\left.\begin{array}{l} p(x) \equiv 1 \equiv 0x^2 + 0x + 1 \\ q(x) \equiv x - \frac{1}{2} = 0\cdot x^2 + 1\cdot x - \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{E}(p, q) = 0$

Γεωμετρία σ'ένα χώρο εσωτερικού γινομένου

$(V, \mathcal{E})$ χώρος εσωτερικού γινομένου $\left\{\begin{array}{l} \text{Έχω το } V \\ \text{Δίνεται ένα } \mathcal{E}: V\times V \to \mathbb{R} \end{array}\right\}$

Το $\mathcal{E}$ είναι επιπλέον ΔΟΜΗ!

$\mathcal{E}$ → $\boxed{\text{Μέτρηση}}$, → Ορθογωνιότητα

Μέτρηση: $\mathcal{E}: V\times V \to \mathbb{R}$

$\Downarrow$ (θα φτιάξω)

$P: V \to \mathbb{R}$

$\Downarrow$ ιδιότητες

① $P(x) \geq 0, \forall x \in V, P(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

② $P(\lambda x) = |\lambda| P(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}$

③ $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$

• Αν κοιτάξω: (V, P) αυτόνομα (δηλ. χωρίς αναφορά σε $\mathcal{E}$)

Αυτή η Δομή ονομάζεται χώρος με νορμ. (→ είναι ασθενέστερη έννοια από το εσωτερικό γινόμενο)

Θεώρημα: Από κάθε εσωτερικό γινόμενο προκύπτει μια νορμ.

Δηλ. $(V, \mathcal{E}) \to (V, P)$, $P = P_{\mathcal{E}}$ (όπου το P προκύπτει από το $\mathcal{E}$)

Απόδ: $\mathcal{E}(x,x) \geq 0$ και είναι πραγματικός αριθμός

Άρα $\exists! P(x) \in \mathbb{R}^+$, ώστε $(P(x))^2 = \mathcal{E}(x,x)$

Ορίζω $P: V \to \mathbb{R}^+$, ώστε $(P(x))^2 = \mathcal{E}(x,x)$ [Ο ορισμός είναι καλός ($\mathbb{R}^+$)]

Ισχυρίζομαι ότι το P είναι νορμ.

↳ Απόδειξη: • $P(x) \geq 0, \forall x \in V$ από τον ορισμό του και

$P(x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{E}(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in V$

• $P(\lambda x)$?, $(P(\lambda x))^2 = \mathcal{E}(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 \mathcal{E}(x,x) = \lambda^2 (P(x))^2$

$\xrightarrow{P(x) \geq 0} P(\lambda x) = |\lambda| P(x)$

• $P(x+y) \leq P(x) + P(y) \xLeftrightarrow[\text{όλα } \geq 0]{\text{επειδή}} (P(x+y))^2 \leq (P(x)+P(y))^2$

N.δ.ο.

$\Leftrightarrow \mathcal{E}(x+y, x+y) \leq \mathcal{E}(x,x) + 2P(x)P(y) + \mathcal{E}(y,y)$

$\Leftrightarrow \cancel{\mathcal{E}(x,x)} + \mathcal{E}(x,y) + \mathcal{E}(y,x) + \cancel{\mathcal{E}(y,y)} \leq \cancel{\mathcal{E}(x,x)} + 2P(x)P(y) + \cancel{\mathcal{E}(y,y)}$

$\Leftrightarrow 2\mathcal{E}(x,y) \leq 2P(x)P(y) \Leftrightarrow \mathcal{E}(x,y) \leq P(x)P(y)$

↳ δεν ξέρουμε αν είναι αρνητικό ή θετικό άρα δεν μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο

↳ Άρα: Αποδείξαμε κάτι ισχυρότερο!

$|\mathcal{E}(x,y)| \leq P(x)\cdot P(y)$

$\Leftrightarrow (\mathcal{E}(x,y))^2 \leq (P(x))^2 (P(y))^2$

$\Leftrightarrow \boxed{(\mathcal{E}(x,y))^2 \leq \mathcal{E}(x,x)\cdot\mathcal{E}(y,y)}$ 1 (C-S) (Ανισότητα Cauchy Schwarz)

↳ Θέλουμε ν.α. ότι ισχύει.

Απόδειξη: Θεωρούμε τα στοιχεία $x+\lambda y$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και τη συνάρτηση $\phi(\lambda) = \mathcal{E}(x+\lambda y, x+\lambda y)$

Τότε $\phi(\lambda) \geq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\phi(\lambda) = \mathcal{E}(x,x) + \mathcal{E}(x,\lambda y) + \mathcal{E}(\lambda y, x) + \mathcal{E}(\lambda y, \lambda y) =$

$= \mathcal{E}(x,x) + 2\lambda\,\mathcal{E}(x,y) + \lambda^2\mathcal{E}(y,y) =$

$= \underbrace{(\mathcal{E}(y,y))\lambda^2 + (2\mathcal{E}(x,y))\lambda + \mathcal{E}(x,x)}$

Τι βαθμού ως προς λ είναι?? Για $y \neq 0$ είναι 2ου βαθμού, άρα τριώνυμο! με $\mathcal{E}(y,y) > 0$ κ' $\phi(\lambda) \geq 0, \forall\lambda$

Άρα $\Delta \leq 0$, $\Delta = (2\mathcal{E}(x,y))^2 - 4\mathcal{E}(x,x)\cdot\mathcal{E}(y,y) \leq 0$

$\Rightarrow \mathcal{E}(x,y)^2 \leq \mathcal{E}(x,x)\cdot\mathcal{E}(y,y)$

– Για $y=0$ Η 1 (C-S) ισχύει ως ισότητα.

Άρα αποδείξαμε ότι ισχύουν:

$P(x+y) \leq P(x) + P(y)$ (Τριγωνική Ανισότητα)

$\mathcal{E}(x,y) \leq P(x)P(y)$ (Ανισότητα C-S)

↳ Πότε ισχύει η ισότητα? $\Leftrightarrow$ Αν τα x και y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Απόδειξη:

$(\Leftarrow)$ $x = \mu\cdot y$, $|\mathcal{E}(\mu y, y)| \leq P(\mu\cdot y)P(y)$

$|\mu|\,\mathcal{E}(y,y) \leq |\mu|\cdot(P(y))^2 = |\mu|\mathcal{E}(y,y)$

$\Longrightarrow)$ $y=0$, γραμ. εξαρτημένα

$y \neq 0 \iff \Delta = 0$ (Διπλή ρίζα)

$$\hookrightarrow \lambda = -\frac{2\varepsilon(x,y)}{2\varepsilon(y,y)} \quad \left(= -\frac{b}{2a}\right)$$

$$\phi(\lambda) = 0, \quad x + \lambda y = 0$$

Παράδειγμα: $V = \mathbb{R}^n$, $\varepsilon((x_i),(y_i)) = \sum_{i=1}^{n} (x_i y_i)$

$$\varepsilon \rightsquigarrow P_\varepsilon(x) = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

(Στο $\mathbb{R}^n$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, P_ε = είναι το μήκος του διανύσματος)

Εν γένει δεν θα έχω γεωμετρική παράσταση. Πως μπορώ να το αντιληφθώ??

$S(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid P_\varepsilon(x) = r\} \equiv$ "σφαίρες" κέντρου O και ακτίνας R

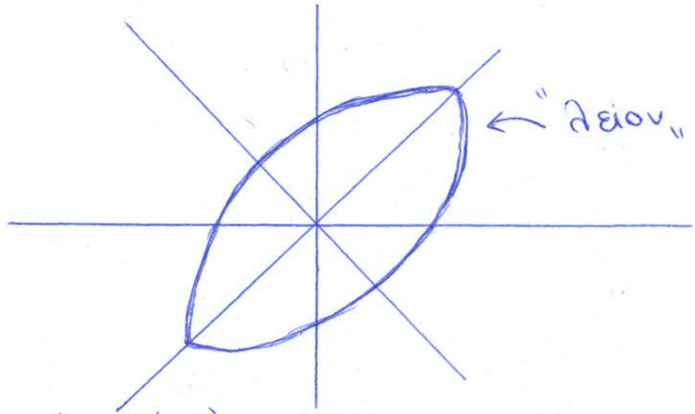
$$Q(x,y) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} J_1 = 7 \\ J_2 = 9 > 0 \\ J_3 < 0 \end{array}\right\} \text{Έλλειψη}$$

$$P_Q(x) = \sqrt{5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2}$$

(x_1, x_2)

C^∞ (σε άπειρο διαφορίσιμη) – Διαφορίσιμη και προς τις δύο μεταβλητές

$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid P_Q(x) = 1\} \iff \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 1\}$ έλλειψη στο επίπεδο κέντρου O(0,0)



Παράδειγμα:

$\mathbb{R}^2$, $q((x_1,x_2)) = |x_1| + |x_2| = q(x)$

Ισχυριζόμαστε ότι το q είναι νόρμα, $x = (x_1, x_2)$

- $q(x) \geq 0$ (αφού το $q(x)$ είναι άθροισμα απολύτων)

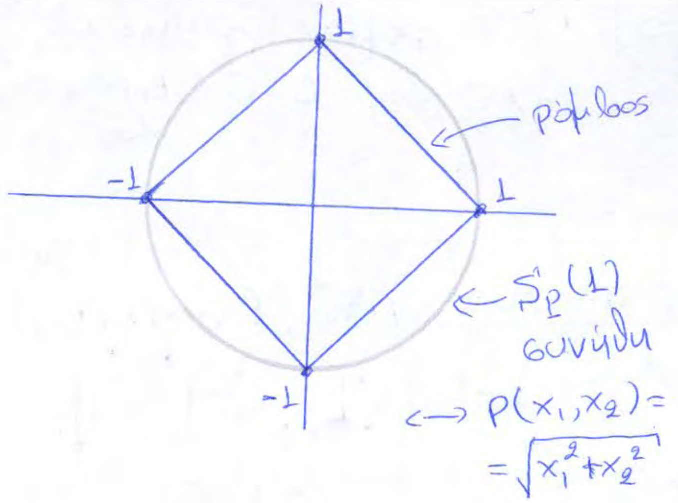
  $q(x) = 0 \iff x_1 = x_2 = 0 \iff x = 0 \in \mathbb{R}^2$

- $q(\lambda x) = |\lambda x_1| + |\lambda x_2| = |\lambda|(|x_1| + |x_2|) = |\lambda| q(x)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$

- $q(x+y) = q(x_1+y_1, x_2+y_2) = |x_1+y_1| + |x_2+y_2| \leq (|x_1|+|x_2|) + (|y_1|+|y_2|) = q(x) + q(y)$

Πως μετράω μήκη διανυσμάτων?

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid q(x) = 1\} = S_q^1(1)$$
$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| = 1\}$$



25/6

(V, ε) χώρος εσωτερικού γινομένου

$\varepsilon \longrightarrow P_\varepsilon$ = νόρμα

$[P_\varepsilon(x)]^2 = \varepsilon(x,x)$, $P_\varepsilon(x) \geq 0$

$P_\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon(x,x)}$ [Σχόλιο: νόρμα μπορεί να οριστεί αυτοδύναμα]

↪ μήκος διανύσματος

(V, ε) χώρος εσωτερικού γινομένου.

Ιδιότητες του ε:

· Νόμος παρ/μου: $\varepsilon(x+y, x+y) + \varepsilon(x \cdot y, x \cdot y) = 2[\varepsilon(x,x)+\varepsilon(y,y)]$ (1)

$\varepsilon \rightsquigarrow P_\varepsilon$

$$(P_\varepsilon(x+y))^2 + (P_\varepsilon(x-y))^2 = 2[(P_\varepsilon(x))^2 + (P_\varepsilon(y))^2]$$

Ακόμα πιο εποπτικά:

$\varepsilon \rightarrow \langle , \rangle$ = συνήθες στο $\mathbb{R}^2$

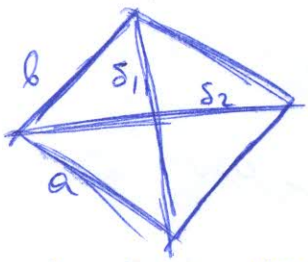
$P_\varepsilon \rightarrow \|\cdot\|$ = μήκος

$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2]$

Απόδ: $\varepsilon(x+y, x+y) = \varepsilon(x,x) + 2\varepsilon(x,y) + \varepsilon(y,y)$

$\oplus\ \varepsilon(x-y, x-y) = \varepsilon(x,x) - 2\varepsilon(x,y) + \varepsilon(y,y)$

$\Downarrow$ (1) / $\ominus \Rightarrow \varepsilon(x+y, x+y) - \varepsilon(x-y, x-y) = 4\varepsilon(x,y)$



$\boxed{\delta_1^2 + \delta_2^2 = 2(a^2+b^2)}$ = Θεώρημα Διαμέσων

Σχόλιο: Αν μία νόρμα είναι νόρμα εσωτερικού γινομένου $[\varepsilon \rightsquigarrow P_\varepsilon]$ τότε για την P_ε ισχύει ο νόμος του παρ/μου

Συμπέρασμα: Αναγκαία συνθήκη για να προέρχεται μία νόρμα από εσωτερικό γινόμενο είναι να ικανοποιείται γι'αυτήν ο νόμος του παρ/μου.

Αν δεν ικανοποιείται τότε δεν προέρχεται!

Παράδειγμα:

$V=\mathbb{R}^2,\ x=(x_1,x_2)$

$q(x)=\max\{|x_1|,|x_2|\}$

η q είναι νόρμα

Όμως δεν ικανοποιείται ο νόμος του παρ/μου

Άρα δεν προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο.

Τώρα θα αντιστοιχίσουμε τον συμβολισμό:

$\varepsilon \rightsquigarrow \langle\,,\,\rangle$ (χωρίς αυτό να σημαίνει ότι ο τύπος του είναι ο συνήθης στο $\mathbb{R}^n$)

$\downarrow$

$P_\varepsilon \rightsquigarrow \|\ \|$ (— » —)

$\langle f,g\rangle=\int_I f(x)g(x)\,dx$

$\|f\|=\left[\int_I (f(x))^2\right]^{1/2}$

Στον χώρο $(V,\langle\,,\,\rangle)$ εσωτερικού γινομένου ορίζεται μια έννοια ορθογωνιότητας.

$x,y\in V$ λέγονται ορθογώνια ως προς $\langle\,,\,\rangle$ αν

$\langle x,y\rangle=0$ [Γενικεύει την έννοια κάθετα της Ευκλ. Γεωμετρίας]

- Το $0\in V$ είναι ορθογώνιο σε κάθε $x\in V$, $\langle v,0\rangle=0, \forall x\in V$
- κάθε σύνολο μη μηδενικών ορθογωνίων ανά δύο στοιχείων του V, είναι ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ.

Απόδ: Έστω $\{x_1,\dots x_k\}$, $x_i\neq 0$ $i=1,2\dots k$

με $\langle x_i,x_j\rangle=0$, $i\neq j$

Έστω $r_1x_1+\dots+r_kx_k=0$ είναι γραμμικός ...
$\{x_1,\dots,x_k\}$

$? \Longrightarrow r_i=0,\ i=1,2,\dots,k$

$0=\langle r_1x_1+\dots+r_kx_k, x_1\rangle = r_1\langle x_1,x_1\rangle + r_2\langle x_2,x_1\rangle \dots + r_k\langle x_k,x_1\rangle$

$\boxed{=0}$

$\left(\begin{array}{l}\text{όμως } \langle x_2,x_1\rangle=\langle x_3,x_1\rangle=\dots=\langle x_k,x_1\rangle=0 \\ \text{και } \langle x_1,x_1\rangle\neq 0 \text{ αφού } x_1\neq 0\end{array}\right) \Longrightarrow$

$\Rightarrow r_1\langle x_1,x_1\rangle=0 \Rightarrow \boxed{r_1=0}$

(ii) $\langle x_j, \sum_{i=1}^{k} r_ix_i\rangle = 0 \Rightarrow \boxed{r_j=0}$

• $\langle x,y\rangle=0 \iff \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$

$\iff \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle$

$\iff \langle x,x\rangle+2\langle x,y\rangle+\langle y,y\rangle = \langle x,x\rangle+\langle y,y\rangle$

$\iff \langle x,y\rangle=0$

• Ιδιότητα: $x\neq 0$, $\dfrac{x}{\sqrt{\langle x,x\rangle}} = \dfrac{x}{\|x\|} \Longrightarrow \left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\|=1$

Αποδ. $\left\|\dfrac{x}{\|x\|}\right\|^2=\left\langle \dfrac{x}{\|x\|}, \dfrac{x}{\|x\|}\right\rangle = \dfrac{1}{\|x\|^2}\cdot\langle x,x\rangle=1$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο στοιχείων του V ονομάζεται ορθοκανονικό αν είναι ορθογώνιο και τα στοιχεία του είναι μοναδιαία $\langle x_i,x_j\rangle=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$

Ερώτημα: $\exists$ τέτοια σύνολο??

Παράδειγμα: $\{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$ ορθογώνιο

ορθογώνιο $\{\cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \dots\}$ — άπειρα σύνολα

$\langle f,g\rangle=\frac{1}{2\pi}\int_I fg,\ I=[0,2\pi]$

$\int \sin x\sin 2x\,dx$ (εσωτερ. γινόμ.) $\sin A\sin B = \underbrace{\cos(A-B)}_{\cos x} - \underbrace{\cos(A+B)}_{\cos 3x}$

και είναι κ' ορθογώνια μεταξύ τους: $\int_I \cos nx\cdot\sin mx = $ (εσωτερικό γινόμενο)

• Η έννοια της προβολής

$(V, <,>)$ χώρος εσωτερικού γινομένου και $a, b \in V$

Τότε $\boxed{\text{prob}_b a \underset{\text{ορ.}}{=} \left(\frac{<a,b>}{<b,b>}\right)\cdot b}$

[γραμμ. ανεξάρτ.) ⟹ παράγουν ένα υπόχωρο]

Αν $\{a_1, \dots, a_k\}$ ορθογώνιο σύνολο $\neq 0$ στοιχείο του V.

$x \in V$, $\text{prob}_{a_i} x = \left(\frac{<a_i, x>}{<a_i, a_i>}\right) a_i = \lambda_i a_i$ (→ ειδικό όνομα): συντελεστές Fourier

$\left(\sum_{i=1}^{k} \text{prob}_{a_i} x\right) =$ [στοιχείο του υποχώρου που παράγουν τα $\{a_1, \dots, a_k\}$] $= W$, $\dim W = k$

$\left(\sum_{k=1}^{k} \lambda_i a_i\right)$ → $\text{prob}_W x$

Ειδική περίπτωση: Αν το $\{a_1, \dots, a_n\}$ να είναι ορθογώνια βάση. ← [Υπάρχει??]

$x \in V \Rightarrow x = r_1 a_1 + \dots + r_n a_n$, $r_i \in \mathbb{R}$ μοναδικά

Ισχυρισμός: $r_i = \lambda_i = \frac{<x, a_i>}{<a_i, a_i>}$

Απόδειξη: $<x, a_i> = <r_1 a_1 + \dots + r_n a_n, a_i> = r_i <a_i, a_i> \Rightarrow$ ← $\boxed{<a_i, a_j> = 0, i \neq j}$

$\Rightarrow \boxed{r_i = \frac{<x, a_i>}{<a_i, a_i>}}$

Εύρεση ορθοκανονικών συνόλων: (Μοναδικός τρόπος)

$\{x, y\} \hookrightarrow \underbrace{\{x, y - \text{prob}_x y\}}_{\text{ορθογώνιο}} = \{w_1, w_2\} = \left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}\right\}$

$x, y \neq 0$!

Αποδ.: $<x, y - \text{prob}_x y> = <x, y> - <x, \left(\frac{<x,y>}{<x,x>}\right) x> = <x, y> - \left(\frac{<x,y>}{<x,x>}\right) <x, x> = 0$

$V = \mathbb{R}[x \mid x \in [0,1]]_{\deg \leq 2} = \{ax^2 + bx + \gamma \mid a, b, \gamma \in \mathbb{R}\}$

$<p, q> = \int_0^1 p \cdot q$

$\{1, x\}$, $\int_0^1 1\cdot x\,dx = \frac{1}{2}$

$\langle 1, x\rangle \neq 0$

$\{1, x - \text{prob}_1 x\}$, $\text{prob}_1 x = \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\cdot 1 = \frac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 1\,dx}\cdot 1 = \frac{\frac{1}{2}}{1}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

ΑΡΑ: $\{1, x - 1/2\}$

(ιδιότητα)

$\langle x, y\rangle \longrightarrow \langle x, z\rangle$: βασικό να παράγουν τον ίδιο υπόχωρο

↳ ορθογώνιο

$y = \lambda x + \mu z$

$\mu z = y - \lambda x$

$\mu\langle z, x\rangle = \langle y, x\rangle - \lambda\langle x, x\rangle$, $\lambda = \frac{\langle x, y\rangle}{\langle x, x\rangle}$

↳ ΑΡΑ: ο τρόπος επίλυσης είναι μοναδικός.

π.χ. e^x να το προβάλλουμε στο $\{1, x, x^2, \dots\}$

όπου $\langle\ ,\ \rangle = \int$

$\lambda_1 = \frac{\langle e^x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{\int_0^1 e^x\,dx}{\int_0^1 1\,dx} = e - 1$

$\lambda_2 = \frac{\langle e^x, x\rangle}{\langle x, x\rangle} = \frac{\int_0^1 x e^x\,dx}{\int x^2\,dx} = \frac{x e^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1}{\frac{x^3}{3}\Big|_0^1} = 3$

$\lambda_3 = \frac{\langle e^x, x^2\rangle}{\langle x^2, x^2\rangle} = \dots$

27/6

$\mathbb{R}^2$: (παίρνουμε μια βάση:) $\mathbb{B}_1 = \{ \overset{u_1}{\overset{\shortparallel}{(1,1)}}, \overset{u_2}{\overset{\shortparallel}{(-1,1)}} \}$

$\downarrow$

$\mathbb{B}_2 = \{ w_1, w_2 \}$: ορθοκανονικά

$\langle w_1, w_2 \rangle = 0$

$\langle w_1, w_1 \rangle = \langle w_2, w_2 \rangle = 1$

Εσωτερικό γινόμενο : $\langle , \rangle$ = συνήθες

$$\boxed{\begin{aligned} w_1 &= r_{11} u_1 + r_{12} u_2 \\ w_2 &= r_{21} u_1 + r_{22} u_2 \end{aligned}}$$

$\langle w_1, w_2 \rangle = 0 = \langle r_{11} u_1 + r_{12} u_2, r_{21} u_1 + r_{22} u_2 \rangle = r_{11} r_{21} \langle u_1, u_1 \rangle + r_{11} r_{22} \langle u_1, u_2 \rangle +$

$+ r_{12} r_{21} \langle u_2, u_1 \rangle + r_{12} r_{22} \langle u_2, u_2 \rangle$ (υπάρχουν δυσκολίες)

Ζωική προσέγγιση:

$\left.\begin{aligned} w_1 &= r_{11} u_1 \\ w_2 &= r_{21} u_1 + r_{22} u_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_1 = \frac{w_1}{r_{11}}$

$\langle w_1, w_1 \rangle = 1 \Rightarrow$

$\langle r_{11} u_1, r_1 u_1 \rangle = 1$

$r_{11}^2 \langle u_1, u_1 \rangle = 1$

$\Leftrightarrow r_{11}^2 = \frac{1}{\langle u_1, u_1 \rangle}$ // w_1 : γνωστό

$0 = \langle w_1, w_2 \rangle \Rightarrow \langle w_1, r_{21} \frac{w_1}{r_{11}} + r_{22} u_2 \rangle = 0$

$\langle w_2, w_2 \rangle = 1$

↳ μοναδικός άγνωστος

Το σύστημα λύνεται!

Μέθοδος Gram - Schmidt:

$(V, \langle , \rangle)$ χώρος εσωτερικού γινομένου

$\mathbb{B} = \{ u_1, \dots, u_n \}$: βάση του V

Θέτω: $w_1 = u_1$

$w_2 = u_2 - \mathrm{prob}_{w_1} u_2$

$\perp$

$w_3 = u_3 - \mathrm{prob}_{w_1} u_3 - \mathrm{prob}_{w_2} u_3$

$w_k = \dots$

$w_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \mathrm{prob}_{w_i} u_{k+1}$

$u_3 \notin \mathcal{L}\{ w_1, w_2 \}$

Ισχυρισμός: Το σύνολο $\{w_1, \dots, w_n\}$ είναι ορθογώνιο..... !!

οπότε $\mathbb{B}_2 = \left\{ \frac{w_1}{\|w_1\|}, \dots, \frac{w_n}{\|w_n\|} \right\}$: ορθοκανονικό

Σχόλιο! $\mathcal{L}(w_1, \dots w_k) = \mathcal{L}(u_1, \dots, u_k)$ σε όλα τα βήματα

↑ υπόχωρος παράγεται

Απόδειξη: Με πεπερασμένη επαγωγή

• Πρώτα παρατηρώ ότι $\{w_1, w_2\}$ είναι ορθογώνιο αν το σύνολο $\{u_1, \dots u_k\}$ είναι ορθογώνιο $\Longrightarrow$ $\{w_1, \dots, w_k, w_{k+1}\}$ είναι ορθογώνιο

$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle u_1, u_2 - \text{prob}_{u_1} u_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle - \langle u_1, \text{prob}_{u_1} u_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle -$ $(=w_1=u_1)$

$- \langle u_1, \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle - \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} \langle u_1, u_1 \rangle = 0$

• $\langle w_{k+1}, w_j \rangle$, $j = 1, 2, \dots k$

$= \langle u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \text{prob}_{w_i} u_{k+1}, w_j \rangle$

$= \langle u_{k+1}, w_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle \text{prob}_{w_i} u_{k+1}, w_j \rangle$ $\quad \frac{\langle u_{k+1}, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i$

$= \langle u_{k+1}, w_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle u_{k+1}, w_i \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} \langle w_i, w_j \rangle$ $\quad = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \neq 0, & i = j \end{cases}$

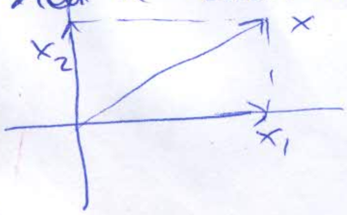
$= \langle u_{k+1}, w_j \rangle - \frac{\langle u_{k+1}, w_j \rangle}{\langle w_j, w_j \rangle} \langle w_j, w_j \rangle = 0$

Προβολή ως προς υπόχωρο:

V, $\dim_{\mathbb{R}} V = n < \infty$, $W \leq V$
(↳ υπόχωρος του V)

$x \in V$ τότε $x = x_1 + x_2$ _ $x_1 \in W$ κ' x_2 ορθογώνιο ως προς το W Δηλ. $\langle x_2, y \rangle = 0$, $\forall y \in W$ Δηλ. $x_2 \in W^{\perp}$.

και η ανάλυση είναι μοναδική.



Πόρισμα: $V = W \oplus W^{\perp}$ ευθύ άθροισμα

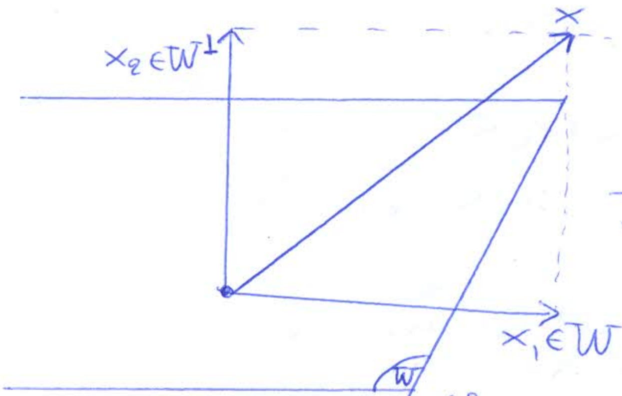
Απόδειξη: Έστω $k = \dim W$ (πάντα είμαστε στην πεπερασμένη διάσταση)
Πάντα μπορώ να βρω μια ορθοκανονική βάση του W, $\mathcal{B}_1 = \{u_1, \dots, u_k\}$
(θυμίζω πως γίνεται G-S)

Θέτουμε $x_1 = \text{prob}_W x = \sum_{i=1}^{k} \text{prob}_{u_i} x$ (= το άθροισμα των προβολών στα στοιχεία της ορθ. βάσης)
και $x_2 = x - x_1$. Τότε $x_1 \in W$ αφού $x_1 = \sum \frac{\langle x, u_i\rangle}{\langle u_i, u_i\rangle} u_i = \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i\rangle u_i =$

$= \sum_{i=1}^{k} x_i u_i \in W$, $y \in W$

$$\langle y, x_2\rangle = \langle \sum_{j=1}^{k} r_j u_j, x - \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i\rangle u_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{k} r_j u_j, x\rangle -$$

$$- \langle \sum_{j=1}^{k} r_j u_j, \sum_{i=1}^{k} \langle x, u_i\rangle u_i \rangle = \sum_{j=1}^{k} r_j \langle u_j, x\rangle - \sum_{j=1}^{k} r_j \langle x, u_j\rangle \underbrace{\langle u_j, u_j\rangle}_{=1} = 0$$



$x = x_1 + x_2$

$\langle x_1, x_2\rangle = 0$

$\langle x_2, y\rangle = 0, \ \forall y \in W$

Ισχυρίζομαι ότι η ανάλυση είναι μοναδική $\Longleftrightarrow W \underbrace{\oplus}_{\text{ευθύ}} W^\perp = V$

Δηλ. $(V, \langle\,,\rangle)$ εσωτερικό γινόμενο (θετικά ορισμένο): $W \cap W^\perp = \{0\}$

$y \in W \cap W^\perp \Rightarrow \begin{cases} y \in W \\ y \in W^\perp \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle y, y\rangle = 0 \Rightarrow y = 0$
χώρο εσωτερικού γινομένου.

Μοναδική Ανάλυση:

$x_1, x_1' \in W$, $x_2, x_2' \in W^\perp$

$x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$

$\Rightarrow \underbrace{x_1 - x_1'}_{\in W} = \underbrace{x_2 - x_2'}_{\in W^\perp}$ (υπόχωρος)

$\Rightarrow (x_1 - x_1') \in \underbrace{W \cap W^\perp}_{= \{0\}} \ni (x_2 - x_2')$

$x_1 = x_1'$ $\qquad x_2 = x_2'$

$W^\perp = \{ z \in V \mid \langle z, y\rangle = 0, \ \forall y \in W \}$ είναι υπόχωρος

$z_1, z_2 \in W^\perp \Rightarrow \langle z_1, y\rangle = \langle z_2, y\rangle = 0$

$\langle \underbrace{\lambda z_1 + z_2}_{\in W^\perp}, y\rangle = \lambda \langle z_1, y\rangle + \langle z_2, y\rangle = 0$

• Παρατήρηση: Υπάρχει και απευθείας μέθοδος υπολογισμού των προβολών!

$W \leq V$, $\{w_1, \dots, w_k\}$ βάση του W, $x \in W$

$\text{prob}_W x = x_1$

$x_2 = x - x_1$, $x_2 \perp y$, $\forall y \in W$

$\langle x_2, y \rangle = 0$, $\forall y \in W$, $\langle x - x_1, y \rangle = 0$, $\forall y \in W$

$\left(x_1 = \sum r_i w_i \ , y = w_i \ , i = 1, \dots k \right)$ (1)

r_i ?

$\langle x - \sum r_i w_i , w_j \rangle = 0$, $j = 1, 2, \dots k$

$\langle x, w_j \rangle - \sum r_i \langle w_i, w_j \rangle = 0$

$\langle x, w_1 \rangle = r_1 \langle w_1, w_1 \rangle + r_2 \langle w_2, w_1 \rangle + \dots + r_k \langle w_k, w_1 \rangle$

$\langle x, w_2 \rangle = r_1 \langle w_1, w_2 \rangle + r_2 \langle w_2, w_2 \rangle + \dots + r_k \langle w_k, w_2 \rangle$

$\vdots$

$\langle x, w_k \rangle = r_1 \langle w_1, w_k \rangle + r_2 \langle w_2, w_k \rangle + \dots + r_k \langle w_k, w_k \rangle$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \langle w_1, w_1 \rangle & \dots & \langle w_k, w_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle w_1, w_k \rangle & \dots & \langle w_k, w_k \rangle \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, w_k \rangle \end{pmatrix}$$

$\det(M) \neq 0$, $M \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, w_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, w_k \rangle \end{pmatrix}$ (ο M είναι αντιστρέψιμος)

Ορίζουσα Gramm
$\neq 0$ $\iff$ γραμμικά ανεξάρτητα

$M = (\langle w_i, w_j \rangle)$

30/6

• Άσκηση: Έστω $\phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\phi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = -x_1 y_2 + x_1 y_1 - y_2 x_1 + x_3 y_3 + 2x_2 y_2$$

που δεχόμαστε ότι είναι συμμετρική και διγραμμική.

Θεωρούμε το $\overset{\text{σύνολο}}{W} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_1 + x_3\}$ το οποίο δεχόμαστε ότι είναι υπόχωρος

(i) Ν.δ.ο. η ϕ είναι εσωτερικό γινόμενο

(ii) Να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του W καθώς και του $\mathbb{R}^3$ [ως προς ϕ]

(iii) Έστω $u = (1,2,3)$ Ν.Β. οι ορθές προβολές του u πάνω στα W κ' $W^\perp$ ως προς ϕ

(i) ϕ $\left(\dfrac{\text{συμμετρική (δίνεται)}}{\text{διγραμμική}}\right)$, θετικά ορισμένη

αλλά και $\phi((x_1,x_2,x_3)(y_1,y_2,y_3)) = (x_1,x_2,x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

$= x^t A y$, $A^T = A \Longrightarrow$ διγραμμική, συμμετρική

• Θετικά ορισμένη:

$\phi(u,u) \geq 0$, $\phi(u,u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$u = (x_1, x_2, x_3)$

$\phi(u,u) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$

$\phi(u,u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0$

(ii) Βάσεις του W και του $\mathbb{R}^3$

$x_2 = x_1 + x_3$, $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_3, x_3) = (1,1,0)x_1 + (0,1,1)x_3$

$\Rightarrow \{(1,1,0), (0,1,1)\}$: βάση του W.

$\{(1,1,0), (0,1,1), (0,0,1)\}$: βάση του $\mathbb{R}^3$

$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ $\Big\}$ det = 1 ≠ 0 γραμμ. ανεξ.

Βάση του W $\{(1,1,0), (0,1,1)\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$:

$\{(1,1,0), (0,1,1), (0,0,1)\}$

Εφαρμόζω G-S στη βάση του W: $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (0,1,1) - \text{prob}_{(1,1,0)}(0,1,1)$

$\text{prob}_{(1,1,0)}(0,1,1) = \dfrac{\phi((0,1,1),(1,1,0))}{\phi((1,1,0),(1,1,0))} \cdot (1,1,0) = \dfrac{2}{1}(1,1,0) = 2(1,1,0) =$

$= (2,2,0)$ ορθογώνια βάση του W είναι: $\{(1,1,0), (-2,-1,+1)\}$

$v_2 = (0,1,1) - (2,2,0) = (-2,-1,+1)$

$V_3 = (0,0,1) - \text{prob}_{(1,1,0)}(0,0,1) - \text{prob}_{(-2,-1,1)}(0,0,1)$

$\text{prob}_{(1,1,0)}(0,0,1) = \dfrac{\phi((0,0,1),(1,1,0))}{\phi((1,1,0),(1,1,0))} \cdot (1,1,0) = 0$

$\text{prob}_{(-2,-1,1)}(0,0,1) = \dfrac{\phi((0,0,1),(-2,-1,1))}{\phi((-2,-1,1),(-2,-1,1))} \cdot (-2,-1,1) = \dfrac{1}{3}(-2,-1,1)$

$V_3 = (0,0,1) - \dfrac{1}{3}(-2,-1,1) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = V_3$

$\mathbb{R}^3,\ B = \{\underbrace{(1,1,0)}_{V_1}, \underbrace{(-2,-1,1)}_{V_2}, \underbrace{\left(\tfrac{2}{3},\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}\right)}_{V_3}\}\ \mathbb{R}^3$

ορθοκανονική

α $\phi((1,1,0),(1,1,0)) = 1$

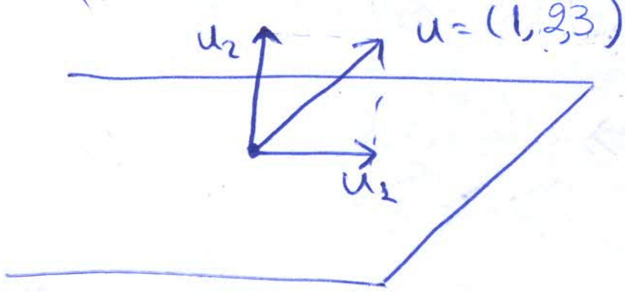
$\phi((-2,-1,1),(-2,-1,1)) = 3$

$\phi((2,1,2),(2,1,2)) = 1^2+1^2+2^2 = 2+4 = 6$

$W_1 = \dfrac{u_1}{\sqrt{\phi(v_1,v_1)}} = (1,1,0)$, $W_2 = \dfrac{u_2}{\sqrt{\phi(v_2,v_2)}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-2,-1,1)$

$W_3 = \dfrac{u_3}{\sqrt{(v_3,v_3)}} = (2,1,2)/\sqrt{6}$

(ii)



$u = u_1 + u_2$, $u_1 \in W$, $u_2 \in W^{\perp}$

Λύση:

(Θεωρία:) $u_1 = \text{prob}_W u$, $u_2 = u - u_1$

για να βρω το $\text{prob}_W u$ θέλω ορθογώνια βάση του $W \longrightarrow \{u_1, u_2\}$

$\text{prob}_W u = \text{prob}_{u_1} u + \text{prob}_{u_2} u$

$\text{prob}_{u_1} u = \dfrac{\phi(u,u_1)}{\phi(u_1,u_1)} u_1 = \dfrac{\phi((1,1,0),(1,2,3))}{\phi((1,1,0),(1,1,0))}(1,1,0) = 2(1,1,0)$

$\text{prob}_{u_2} u = \dfrac{\phi(u,u_2)}{\phi(u_2,u_2)} u_2 = \dfrac{2}{3}(-2,-1,1)$

$W_1 = (2,2,0) + \left(-\dfrac{4}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right) = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$

$u_2 = u - u_1 = (1,2,3) - \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right) = u_2$

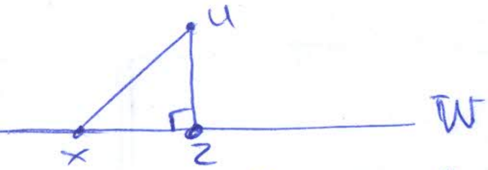
• Ελάχιστα Διαφοροποιητέα η 3η ερώτηση:

Δίνονται W, $u_1 = (1,2,3)$

Ζητείται $z \in W$ ώστε $d(z,u) \leq d(u,x) \ \forall x \in W$.

Ισχυρίζομαι ότι $prob_W u = z$

έχω αυτή την ιδιότητα!



Τώρα: $d^2(z,u) = \|z-u\|^2 = \Phi(z-u, z-u)$

$\|z-u\|^2 \leq \|z-u\|^2 \ \forall x \in W$

Η σχέση γίνεται: ? z τέτοιο ~~ώστε~~:

Έστω $z^* = prob_W u$ τότε $z^* \in W$, οπότε $\forall x \in W$ το $(z^*-x) \in W$

(αφού το $W \leq V$) θεωρώ $w_\perp = u - prob_W u$. τότε το

$w_\perp \in W^\perp \Rightarrow \Phi(w_\perp, z^*-x) = 0$

Άρα ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$\|w_\perp + (z^*-x)\|^2 = \|w_\perp\|^2 + \|z^*-x\|^2$ $\quad \|(u-z^*) + (z^*-x)\|^2 - \|w_1\|^2 =$

$\|z^*-x\|^2 = \|w_\perp + (z^*-x)\|^2 - \|w_\perp\|^2 =$

$= \|u-x\|^2 - \|w_1\|^2 \leq \|u-x\|^2$

$\|w_\perp\|^2 = \|u-x\|^2 - \|z^*-x\|^2 \leq \|u-x\|^2$

$\|z^*-u\|^2 \leq \|u-x\|^2$

• Άσκηση (Θεωρητική):

$S \subseteq V$, V: χώρος εσωτερικού γινομένου

$S^\perp = \{ z \in V \mid \langle z, x \rangle = 0, \ \forall x \in S \}$

Ν.δ. τα εξής:

(i) $S^\perp$ είναι υπόχωρος, $S^\perp = (\mathcal{L}(S))^\perp$ ↳ γραμμική θήκη του S

(ii) $(S^\perp)^\perp \ ? \ S$

↳ τι σχέση έχει με το S? ⟶ (πάντα περιέχει το S)

(i)

$\left. \begin{array}{l} x_1, x_2 \in S^\perp \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \overset{?}{\Longrightarrow} (\lambda x_1 + x_2) \in S^\perp$

απόδειξη

↳ $x_1, x_2 \in S^\perp \rightarrow \langle x_1, x \rangle = \langle x_2, x \rangle = 0, \ \forall x \in S$

$$\underbrace{\langle \lambda x_1 + x_2, x\rangle}_{\in S^\perp} = \lambda \underbrace{\langle x_1, x\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle x_2, x\rangle}_{=0} = 0, \ \forall \in S$$

$S^\perp$ είναι υπόχωρος $= (\mathcal{L}(S))^\perp$

$w \in \mathcal{L}(S) \Rightarrow w = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k, \ x_1, \dots, x_k \in S$

$x \in S^\perp \Rightarrow \langle x, w \rangle = 0$, $\quad S^\perp \subseteq (\mathcal{L}(S))^\perp$

$\supseteq$ άμεσο

$A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$

$x \in B^\perp \Rightarrow (x, y) = 0 \ \forall y \in B$, $A \subseteq B$ $\Big| \Rightarrow \langle x, t \rangle = 0, \ \forall t \in A$

$\Rightarrow x \in A^\perp$

(ii) $w \in (S^\perp)^\perp \Rightarrow \langle w, a \rangle = 0 \ \forall a \in S^\perp$

$\forall \beta \in S, \ \langle \beta, a \rangle = 0, \ \forall a \in S^\perp$

$\Downarrow$

$S \subseteq (S^\perp)^\perp$

Αν έχω πεπερασμένη διάσταση $W \leq V$

Γνωρίζω ότι: $V = W \oplus W^\perp$ ↳ εδώ

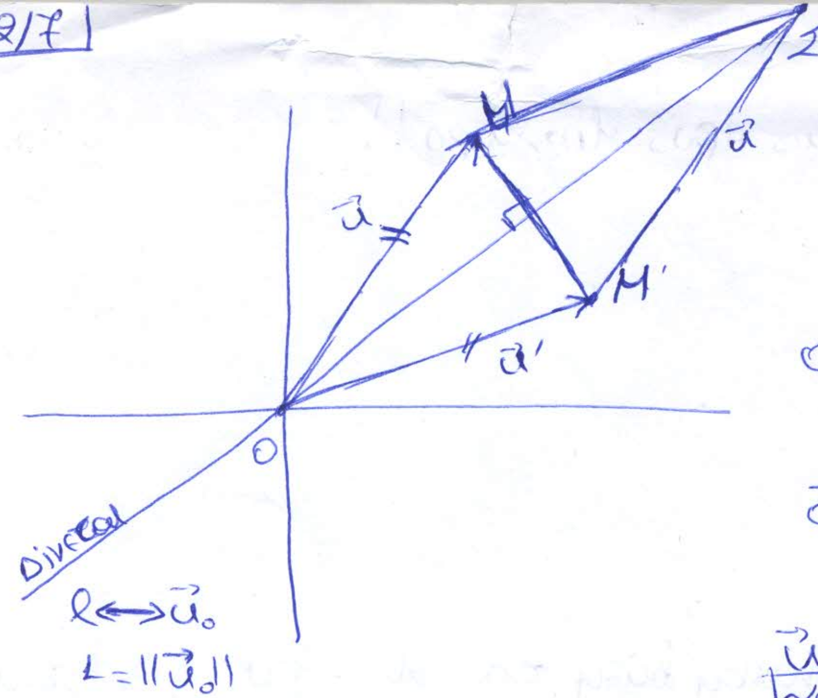
αν ξεκινήσω: $V = W^\perp$

$V = W^\perp \oplus (W^\perp)^\perp$

$V = W^\perp \oplus W$

αν οι διαστάσεις πεπερασμένες $W, (W^\perp)^\perp$ ίσες διαστάσεις

και σχέση υποχώρου $\Rightarrow$ ταυτίζονται



$M \to M' =$ συμμετρικό

$u \to u' = ?$

$\mathbb{R}^2$, $\langle , \rangle =$ συνήθες

$\vec{O\Sigma} = \vec{OM'} + \vec{M'\Sigma} \iff 2\vec{OK} = \vec{u}' + \vec{u}$

$\iff \boxed{\vec{u}' = 2\vec{OK} - \vec{u}}$ (1)

$\vec{OK} = \mathrm{Prob}_{\vec{u}_0}\vec{u} = \dfrac{\langle \vec{u}, \vec{u}_0 \rangle}{\underbrace{\langle \vec{u}_0, \vec{u}_0 \rangle}_{1}} \cdot \vec{u}_0$

$\vec{u} \xrightarrow{f} \vec{u}' = 2\langle \vec{u}, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0 - \vec{u}$

$\boxed{\text{απεικόνιση}}$ του κατοπτρισμού ως προς $\ell \longleftrightarrow \vec{u}_0$

$\lambda\vec{u}_0 \longleftrightarrow$ σημεία της ευθείας παραμένουν σταθερά

$2\langle \lambda\vec{u}_0, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0 - \lambda\vec{u}_0 = 2\lambda\underbrace{\langle \vec{u}_0, \vec{u}_0 \rangle}_{1}\vec{u}_0 - \lambda\vec{u}_0 = 2\lambda\vec{u}_0 - \lambda\vec{u}_0 = \lambda\vec{u}_0$

Αυτή είναι γραμμική, 1-1, "επί"

$f(\lambda u_1 + u_2) = \lambda f(u_1) + f(u_2)$

$f^2(\vec{u}) = \vec{u}, \forall \vec{u}$

$f(f(\vec{u})) = f(2\langle \vec{u}, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0 - \vec{u}) = 2\langle 2\langle \vec{u}, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0 - \vec{u}, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0 -$
$-(2\langle \vec{u}, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0 - \vec{u}) = 2\langle 2\langle \vec{u}, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0 + 2\langle -\vec{u}, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0 -$
$-2\langle \vec{u}, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0 + \vec{u} = 4\langle \vec{u}, \vec{u}_0 \rangle \langle \vec{u}_0, \vec{u}_0 \rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0 - 2\langle \vec{u}, \vec{u}_0 \rangle \vec{u}_0$
$+ \vec{u} = \vec{u}$

$f^2 = id_{\mathbb{R}^2}$ $\begin{cases} f: \text{"1-1"} \\ f: \text{"επί"} \end{cases}$ ⊕ γραμμική

$\|f(\vec{u}_1) - f(\vec{u}_2)\|^2 = \|\vec{u}_1 - \vec{u}_2\|^2$

$\boxed{\underbrace{\|f(u)\|^2}_{\text{μόνη}} \neq \|f(u)\| = u}$

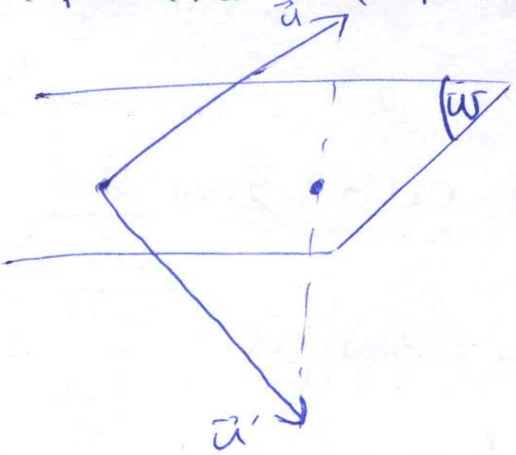
$\|f(\vec{u}_1)\|^2 + \|f(\vec{u}_2)\|^2 - 2\langle f(u_1), f(u_2) \rangle = \|\vec{u}_1\|^2 + \|\vec{u}_2\|^2 - 2\langle u_1, u_2 \rangle$

(βγαίνει με αντικατάσταση)

$\Rightarrow \langle f(u_1), f(u_2) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$

2) Άλλη μια γενίκευση:

Συμμετρία (κατοπτρισμός) ως προς υπόχωρο!!



Βήμα 1ο: Βρίσκω μία ορθοκανονική βάση του W: $\{a_1, \dots, a_k\}$, $k = \dim W$ (πάντα υπάρχει, παίρνω μία τυχαία και κάνω Gram-Schmidt)

Βήμα 2ο: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(\vec{u}) = 2\,\mathrm{prob}_W \vec{u} - \vec{u} = 2\sum_{i=1}^{k} \mathrm{prob}_{a_i} \vec{u} - \vec{u} =$

$= 2\sum <\vec{u}, \vec{a}_i> \vec{a}_i - \vec{u} = F(\vec{u})$

Η F έχει τις εξής ιδιότητες $F^2 = F \circ F = id_{\mathbb{R}^n}$

$<F(u_1), F(u_2)> = <u_1, u_2>$

F : γραμμική, "επί", "1-1" (και) Διατηρεί μήκος

Άλλη άσκηση:

$(V, <,>)$ χώρο εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης $f: V \to V$, $<f(u_1), f(u_2)> = <u_1, u_2>$

Τότε f: "1-1", "επί", γραμμική (γραμμικός ισομορφισμός)

Απόδειξη: • $f(\lambda\vec{u}) = \lambda f(\vec{u})$

$\Leftrightarrow \underbrace{f(\lambda\vec{u}) - \lambda f(\vec{u})}_{\vec{x}} = 0$

$\Leftrightarrow <\vec{x}, \vec{x}> = 0!$, $(V, <,>)$ χώρος εσωτερικού γινομένου Άρα: θετικά ορισμένο.

$<f(\lambda\vec{u}) - \lambda f(\vec{u}), f(\lambda\vec{u}) - \lambda f(\vec{u})> = <f(\lambda\vec{u}), f(\lambda\vec{u})> - 2<f(\lambda u), \lambda f(\vec{u})> +$

$+ <\lambda f(\vec{u}), \lambda f(u)> = <\lambda\vec{u}, \lambda\vec{u}> - 2\lambda <f(\lambda\vec{u}), f(\vec{u})> + \lambda^2 <f(\vec{u}), f(\vec{u})> =$

$= \lambda^2 <\vec{u}, \vec{u}> - 2\lambda <\lambda\vec{u}, \vec{u}> + \lambda^2 <\vec{u}, \vec{u}> = 2\lambda^2 <\vec{u}, \vec{u}> - 2\lambda^2 <\vec{u}, \vec{u}> = 0$

• $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) \Leftrightarrow \underbrace{f(u_1 + u_2) - f(u_1) - f(u_2)}_{<y, y> = 0 \Leftrightarrow y} = 0$

$\langle f(x), f(y)\rangle \equiv \langle x, y\rangle \Longrightarrow f$: "1-1", "επί"

$f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Longleftrightarrow \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle = 0$

$\Updownarrow$

$\langle f(x_1)-f(x_2), f(x_1)-f(x_2)\rangle = 0$

$\Longleftrightarrow \langle f(x_1), f(x_1)\rangle - 2\langle f(x_1), f(x_2)\rangle + \langle f(x_2), f(x_2)\rangle = 0$

$\Longleftrightarrow \langle x_1, x_1\rangle - 2\langle x_1, x_2\rangle + \langle x_2, x_2\rangle = 0$

$\Longleftrightarrow \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle = 0$

($f: V \longrightarrow V$, "1-1", $\dim V$ = πεπερασμένο, f: γραμμική) $\Longrightarrow f$ "επί"

Άσκηση: Γραμμική Εξάρτηση-Ανεξαρτησία μέσω εσωτερικού γινομένου ($\langle , \rangle$ = θετικά ορισμένο, $\dim V$ = πεπερ.)

(A) $x_1, \dots, x_k \neq 0$, ορθογώνια μεταξύ τους $\Longrightarrow$ γραμμικά ανεξάρτητα.

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0 \Longrightarrow \left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, x_j \right\rangle = 0 \Longrightarrow \lambda_j \underbrace{\langle x_j, x_j\rangle}_{\neq 0} = 0 \Longrightarrow \lambda_j = 0$$

(B) $a_1, \dots, a_k$ γραμμ. ανεξάρτητα $\Longleftrightarrow G(a_1, \dots, a_k) =$

$$= \begin{vmatrix} \langle a_1, a_1\rangle & \dots & \langle a_1, a_k\rangle \\ \langle a_2, a_1\rangle & \dots & \langle a_2, a_k\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle a_k, a_1\rangle & \dots & \langle a_k, a_k\rangle \end{vmatrix} \neq 0$$

[↪ ορίζουσα Gram ορίζει εμβαδόν...]

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = 0$$

(Σ)

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, a_j \right\rangle \Longrightarrow \boxed{\lambda_1\langle a_1, a_j\rangle + \lambda_2\langle a_2, a_j\rangle + \dots + \lambda_k\langle a_k, a_j\rangle = 0 \quad j = 1, 2, \dots k}$$

Ομογενές γραμμικό σύστημα με αγνώστους λ_i, $i = 1, 2, \dots, k$ και συντελεστές $\langle a_i, a_j\rangle$, $i, j = 1, 2, \dots, k$

Γραμμικά Ανεξάρτητα $\Leftrightarrow$ το (Σ) έχει μοναδική λύση τη μηδενική!

$\Leftrightarrow$ ορίζουσα συστήματος $\neq 0 \Leftrightarrow \det(\langle a_i, a_j\rangle) \neq 0 \Leftrightarrow G(a_1, \dots, a_k) \neq 0$

Στο επίπεδο: $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, συνήθες εσωτερικό γινόμενο

$\{x_1, x_2\}$: γραμμικά ανεξάρτητα

$$G(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \langle x_1, x_2\rangle \\ \langle x_2, x_1\rangle & \langle x_2, x_2\rangle \end{vmatrix} = \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 - (\langle x_1, x_2\rangle)^2 = \|\vec{x}_1 \times \vec{x}_2\|^2 = \left[\text{Εμβαδόν}(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\right]^2$$

$\vec{x} = (a_1, a_2, a_3)$
$\vec{y} = (b_1, b_2, b_3)$
$\vec{z} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

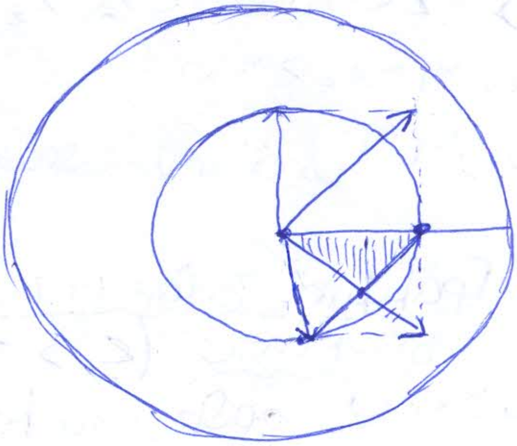
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

$(\det\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\})^2 = G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$\det(A \cdot A^t) = G(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ [ισχύει σε οποιαδήποτε διάσταση]

Άσκηση:

$(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle)$
συνήθες



$S_1 = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{x}\| = 1\}$

$S_1 + S_1 \overset{?}{\subset} \mathbb{R}^2$

$S_1 + S_1 = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\vec{y}\| \leq 2\}$

"$\subseteq$" $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| = 2$

"$\supseteq$" Από το μέσο του διανύσματος φέρω μεσοκάθετη σ' αυτό η κάθετη θα τέμνει τον S_1 σε 2 σημεία αυτά είναι και τα διανύσματα στα οποία αναλύεται το αρχικό διάνυσμα $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

Άσκηση: $(V, \langle , \rangle)$ εσωτερικού γινομένου πεπερασμένης διάστασης

$f: V \to \mathbb{R}$ γραμμική $\exists!\, a \in V : f(x) = \langle a, x \rangle, \forall x \in V$

$\{u_1, \dots, u_n\}$: βάση του V

$f(u_1) = a_1, \dots, f(u_n) = a_n, \; a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$f(x) = f(\Sigma x_i u_i) = \Sigma(x_i f(u_i)) = \Sigma(a_i x_i)$

$\langle a, x \rangle = \langle a, \Sigma x_i u_i \rangle = \Sigma \langle a, u_i \rangle x_i$

$\Sigma a_i x_i = \Sigma \langle a, u_i \rangle x_i, \; \forall x_i$

$\langle a, u_1 \rangle = f(u_1)$
$\vdots$
$\langle a, u_n \rangle = f(u_n)$

Αναδρομική Γεωμετρία $\{u_1, \dots, u_n\}$ ορθοκανονική βάση:

$a = \Sigma f(u_i) u_i$

(Δουλεύει και ανάποδα, χρησιμοποιώ αυτή τη μέθοδο και βρίσκω μια ορθοκανονική βάση)

Δίνονται 3 ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3) στο επίπεδο. Ζητείται ο Γ.Τ. Μ των σημείων ώστε:

$$d^2(M,(\varepsilon_1)) = d(M,(\varepsilon_2))\cdot d(M,(\varepsilon_3))$$

[Τόπος επί τριών ευθειών]

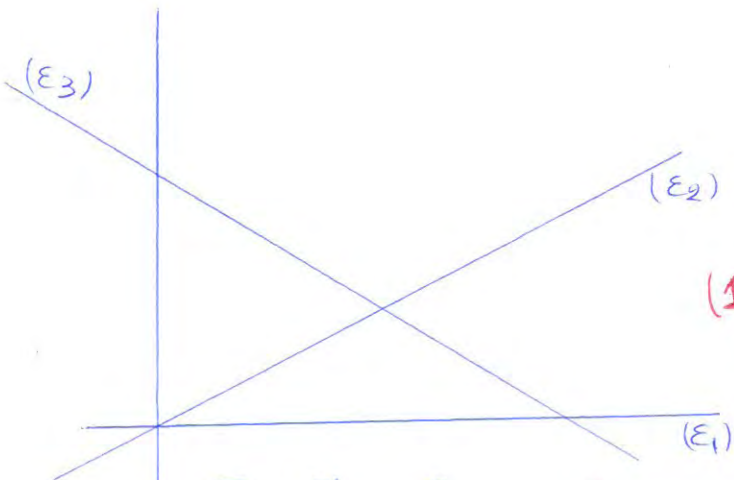
(ε_i), $i=1,2,3,4$

$d_1 d_2 = d_3 d_4$

Μέχρι $i=4$ βγαίνει κωνική τομή

(ε_i), $i=1,\dots,5$

$d_1 d_2 d_3 = d_4 d_5^2$ (→ Απολλώνιος)



$\varepsilon_1 \to y=0$, $d_1 = d(M,\varepsilon_1) = |y|$

$\varepsilon_2 \to x-y=0$, $d_2 = d(M,\varepsilon_2) = \dfrac{|x-y|}{\sqrt{2}}$

$\varepsilon_3 \to x+y-1=0$, $d_3 = d(M,\varepsilon_3) = \dfrac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$

$d_1^2 = d_2 d_3 \Rightarrow 2y^2 = |(x-y)(x+y-1)|$

(1) $2y^2 = (x-y)(x+y-1)$

$\Leftrightarrow 2y^2 - x^2 + \cancel{xy} - \cancel{xy} = -x - y^2 + y$

$\Leftrightarrow -x^2 + 3y^2 + x - y = 0$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 1/2 \\ -1/2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1/2 & -1/2 \end{matrix} & 0 \end{bmatrix}$$

$J_1 = 2$

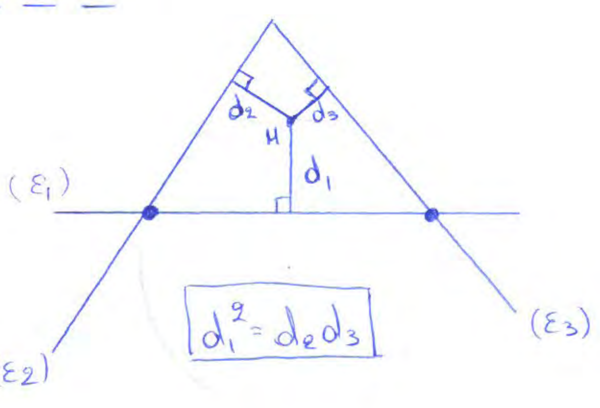
$J_2 = -12$ } Υπερβολή

$J_3 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{2}{4} \neq 0$

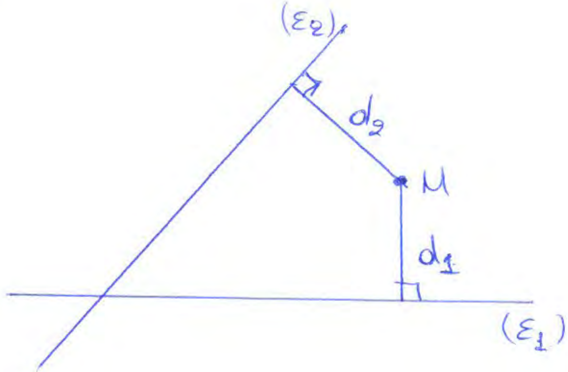
(2) $2y^2 = -x^2 + x + y^2 - y$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - x + y = 0 \Rightarrow$ Κύκλος

Αντίστροφο:



Άσκηση:



$d_1^2 + d_2^2 = k$: θετική σταθερά.

$\varepsilon_1 \longrightarrow y = 0$

$\varepsilon_2 \longrightarrow y = a \cdot x$ ↳ παράμετρος ($\neq 0$)

$$d_1 = |y|$$

$$d_2 = \frac{|y - ax|}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$d_1^2 + d_2^2 = y^2 + \frac{(y-ax)^2}{a^2+1} = k$$

$$(a^2+1)y^2 + y^2 + a^2x^2 - 2axy = k(a^2+1)$$

$$a^2x^2 + (a^2+2)y^2 - 2axy - k(a^2+1) = 0$$

$$\begin{bmatrix} a^2 & -a \\ -a & a^2+2 \end{bmatrix} \quad J_1 = 2a^2 + 2 = 2(a^2+1) > 0$$

$$J_2 = 4a^2(a^2+2) - 4a^2 = 4a^4 + 8a^2 - 4a^2 = 4a^2 + 4a^4 = 4a^2(a^2+1) > 0$$

$$J_3 < 0$$

$$\Downarrow$$

Έλλειψη

Άσκηση:

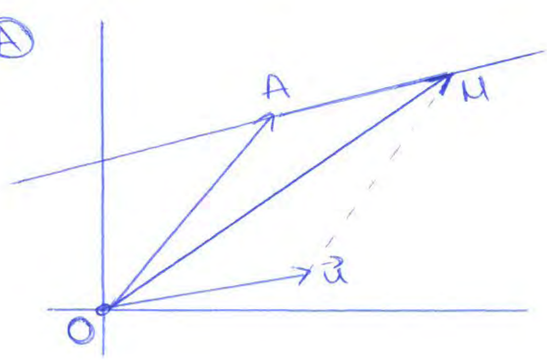
Δίνονται τα σημεία $A_1(-1,1,0)$, $A_2(1,0,1)$ $k=1,2$ έστω (ε_k) η ευθεία
Διαν. $\vec{w}_1 = (0,0,1)$, $\vec{w}_2 = (0,1,0)$
που περιέχει το A_k και είναι $\parallel \vec{w}_k$

(A) Εξισώσεις ευθειών (ε_k)?

(B) Ν.δ.ο. $\exists$ επίπεδο Π_1 που περιέχει την (ε_1) και είναι κάθετο στο $\vec{w}_1 \times \vec{w}_2$ (?) Εξίσωση (Π_1).

(Γ) Να ελεγχθεί αν το (Π_1) έχει κοινά σημεία με την (ε_2)

(A)



$$\vec{OM} = \vec{OA} + t\vec{u}$$

$$(x,y,z) = (x_A, y_A, z_A) + t(a, b, \gamma)$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x_A + ta \\ y &= y_A + t\beta \\ z &= z_A + t\cdot\gamma \end{aligned}\right\} \left(\begin{aligned} &a, \beta, \gamma \neq 0 \\ &\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{\gamma} \end{aligned} \right)$$

(ε_1) $x=-1+t\cdot 0=-1$
$y=1+t\cdot 0=1$
$z=t$

$\left.\begin{array}{l} x=-1+t\cdot 0=-1 \\ y=1+t\cdot 0=1 \\ z=t \end{array}\right\} \{(-1,1,t) \mid t\in\mathbb{R}\}$

(ε_2)

$\left.\begin{array}{l} x=1+t\cdot 0=1 \\ y=0+t\cdot 1=t \\ z=1+t\cdot 0=1 \end{array}\right\} \{(1,t,1) \mid t\in\mathbb{R}\}$

$(x=1\ ,\ y=t\ ,\ z=1)$

(B) $\vec{\ell}=\vec{\omega}_1\times\vec{\omega}_2=(-1,0,0)$

$$\begin{array}{l} \vec{\ell}= \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{array}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = -\vec{i} = (-1,0,0)$$

Όλα τα επίπεδα που είναι κάθετα στο $\vec{\ell}$ είναι της μορφής:

$-1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+\delta=0 \Rightarrow x=\delta \ \|$ Όμως $A_1\in$ (επίπεδο)
$-1=\delta$

Άρα το επίπεδο είναι το $\boxed{x=-1}$

Έχουμε τελειώσει?

$\hookrightarrow$ ΟΧΙ: πρέπει να ελέγξω αν $(\varepsilon_1)\subset(\Pi_1)$

$(-1,1,t)\in(\Pi_1)$, $\Pi_1 \to 1\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+1=0 \Rightarrow (\varepsilon_1)\subset(\Pi_1)$

(Γ) ? $\exists\, t : (1,t,1)\in(\Pi_1) \to x+1=0$

$1+0\cdot t+0\cdot 1+1=0$

$\Leftrightarrow 2=0 \to$ ΑΤΟΠΟ

Άσκηση:

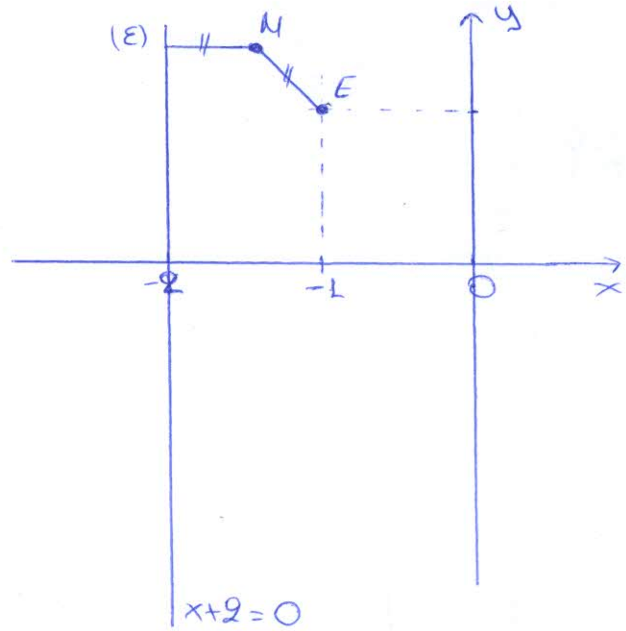
Θεωρούμε την καμπύλη του επιπέδου Oxy που αποτελείται από το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από την ευθεία $x+z=0$ και το σημείο $(-1,1)$

(1) Ν.Β. η εξίσωση της καμπύλης.

Ερωτάται: τι είναι;;
- Κύκλος
- Έλλειψη
- Υπερβολή
- Παραβολή
- Τίποτα

(2) $\exists$? $Y = aX^2$?
$a \in \mathbb{R}$

(1)



$d(M,(\varepsilon)) = d(M,E)$

$\frac{|x+2|}{|1|} = \sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$

$(x+2)^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$

$x^2+4x+4 = x^2+2x+1+y^2-2y+1$

$2x = y^2-2y+1-4+1$

$2x = (y-1)^2-3$

$(y-1)^2 = 2(x+3/2)$

$Y^{*2} = 2X^*$

→ Παραβολή στο σύστημα:

$X^* = (x+3/2)$

$Y^* = (y-1)$

(2) $X^* = 1/2\, Y^{*2}$

$Y = X^*$

$X = Y^*$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X^* \\ Y^* \end{pmatrix} \longleftarrow (X^*, Y^*)$

$\{X^*, Y^*\} \longrightarrow \{Y, X\}$

Άρα $\exists$: $X = y-1$, $Y = x+3/2$, $a = 1/2$

<u>Άσκηση:</u>

$a, b, \gamma \in \mathbb{R}$

(1) Ν.δ.ο. η απόσταση του $M(a,b,\gamma)$ από τον Oy είναι $\sqrt{a^2+\gamma^2}$

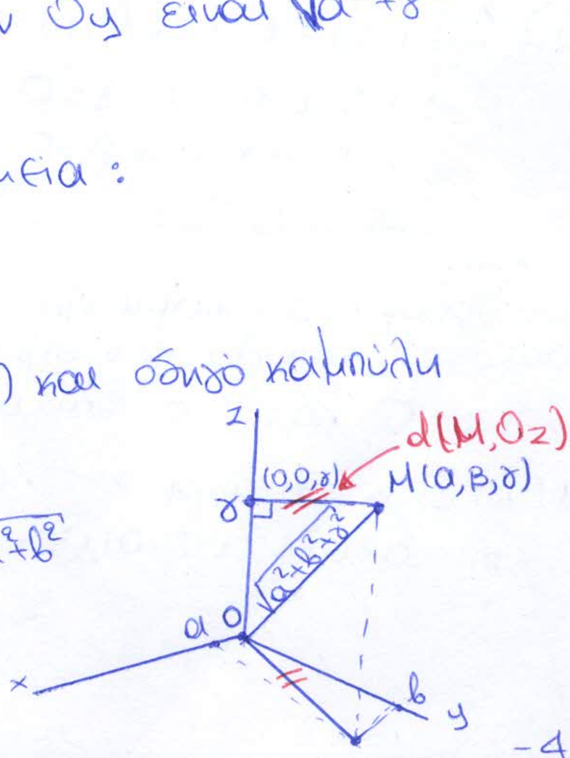
(2) ? Απόσταση M, Ox, Oz

(3) Θεωρούμε την επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με σημεία:

$d(\text{σημείων}, Oy) = 3d(\text{σημείων}, Oz)$

(i) ? Εξίσωση επιφάνειας

(ii) Ν.δ.ο. είναι κώνος (με κορυφή το $(0,0,0)$ και οδηγό καμπύλη $8x^2+9y^2=1$, $z=1$)



(1) ΚΑΙ (2) $d(M,Oz) = \sqrt{\left(\sqrt{a^2+b^2+\gamma^2}\right)^2 - \gamma^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

$d(M,Ox) = \sqrt{b^2+\gamma^2}$

$d(M,Oy) = \sqrt{a^2+\gamma^2}$

(3) $d(M, Oy) = 3\,d(M, Oz)$

$d^2(M, Oy) = 9\,d^2(M, Oz)$

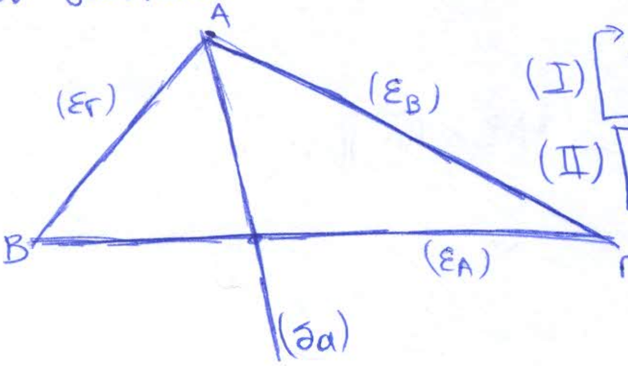
$\Rightarrow x^2 + z^2 = 9x^2 + 9y^2$

$\Leftrightarrow \boxed{8x^2 + 9y^2 - z^2 = 0}$ Κώνος κορυφής $(0,0,0)$

Τομή με το επίπεδο $\boxed{\begin{array}{l} z = 1 \\ 8x^2 + 9y^2 = 1 \end{array}}$ (C)

7/7

Άσκηση: Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ να βρούμε τις εσωτερικές διχοτόμους των γωνιών και να αποδειχθεί ότι συντρέχουν



(I) $d(x, (\varepsilon_\gamma)) = d(x, (\varepsilon_\delta)) \longleftrightarrow \delta_\alpha, \delta_\alpha'$

(II) $\boxed{\delta\alpha \parallel \dfrac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} + \dfrac{\vec{A\Gamma}}{\|\vec{A\Gamma}\|}}$ $\rightarrow$ {και διέρχεται από το Α}

Εφαρμογή: (Λύση σύμφωνα με το II τρόπο:)

$A(0,1)$

$B(1,0)$

$\Gamma(-2,0)$

$\vec{AB}(1,-1)\,,\quad \|\vec{AB}\| = \sqrt{2}$

$\vec{A\Gamma}(-2,-1)\,,\quad \|\vec{A\Gamma}\| = \sqrt{5}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \rightsquigarrow \vec{u}(u_1, u_2)$$

$\{A, \vec{u}\}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = 0$$

$\downarrow$

$\delta_\alpha, \delta_\beta, \delta_\gamma$: συντρέχουν!

$\delta_\alpha \longrightarrow a_1 x + b_1 y + \gamma_1 = 0$

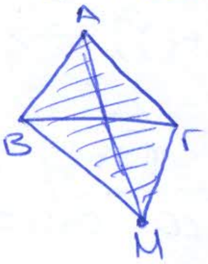
$\delta_\beta \longrightarrow a_2 x + b_2 y + \gamma_2 = 0$

$\delta_\gamma \longrightarrow a_3 x + b_3 y + \gamma_3 = 0$

συντρέχουν $\longleftrightarrow$ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0$

Άσκηση: Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και (ΔΕΖ) τρίγωνο που έχει πλευρές τις διαμέσους του ΑΒΓ. Ζητείται το εμβαδόν (ΔΕΖ).
[→ Δεδομένο]

Θεωρία:



$\Longrightarrow \mathcal{E}(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{A\Gamma}\|$

$$\vec{AM} = \frac{\vec{AB}+\vec{A\Gamma}}{2}$$

Θεωρητικό Ερώτημα:
Σχηματίζεται τρίγωνο από τις διαμέσους?
$\{\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma\}$ είναι πλευρές τριγώνου?

$$\frac{1}{2}\|\vec{AM}\times\vec{BN}\|$$

$$\vec{AM} = \frac{\vec{AB}+\vec{A\Gamma}}{2}$$

$$\vec{BN} = \frac{\vec{BA}+\vec{B\Gamma}}{2}$$

$$\vec{AM}\times\vec{BN} = \frac{1}{4}\left[(\vec{AB}+\vec{A\Gamma})\times(\vec{BA}+\vec{B\Gamma})\right] = \frac{1}{4}\left[\cancel{\vec{AB}\times\vec{BA}}^{\,0} + \vec{AB}\times\vec{B\Gamma} + \vec{A\Gamma}\times\vec{BA} + \vec{A\Gamma}\times\vec{B\Gamma}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\vec{AB}\times(\vec{BA}+\vec{A\Gamma}) + \vec{A\Gamma}(\vec{BA}+\vec{A\Gamma}) + \vec{A\Gamma}\times\vec{BA}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[(\vec{AB}\times\vec{A\Gamma}) + (\vec{A\Gamma}\times\vec{BA}) + (\vec{A\Gamma}\times\vec{BA})\right] = \frac{}{4}\left[(\vec{AB}\times\vec{A\Gamma})\right]$$

ΑΡΑ: $\boxed{E\left(\text{τριγώνου διαμέσων}\right) = \frac{3}{4}E\left(\text{αρχικού τριγώνου}\right)}$

Απάντηση στο θεωρητικό ερώτημα: Για να $\exists$ το τρίγωνο πρέπει ν.α.ο. ισχύει η τριγωνική ανισότητα: $|\mu_\beta-\mu_\gamma| < \mu_\alpha < \mu_\beta+\mu_\gamma$

Άσκηση: [Καθετότητα ευθείας και επιπέδου]

Αν μία ευθεία σχηματίζει ίσες γωνίες με 3 ευθείες ενός επιπέδου τότε είναι κάθετη στο επίπεδο.

[συντρέχουσες ??] $\leftrightarrow$ ΟΧΙ..!

(Θεωρητικά:) Δίνεται $\vec{l}$ ($\leftrightarrow$ ευθεία) και $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ συνεπίπεδα [3 ευθείες του επιπέδου] όλα μοναδιαία και επιπλέον

$<\vec{l},\vec{a}> = <\vec{l},\vec{b}> = <\vec{l},\vec{c}> \Rightarrow <\vec{l},\vec{a}> = <\vec{l},\vec{b}> = <\vec{l},\vec{c}> = 0$

Μπορώ να υποθέσω: $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

$$\underbrace{<\vec{l},\vec{c}>}_{k} = \lambda\underbrace{<\vec{l},\vec{a}>}_{k} + \mu\underbrace{<\vec{l},\vec{b}>}_{k}$$

$\Leftrightarrow k = \lambda k + \mu k$

$\Leftrightarrow k(\lambda+\mu-1) = 0$ $\begin{cases} k=0 \to \text{τελειώσαμε} \\ k\neq 0 \Rightarrow \lambda+\mu=1 \to \text{αποκλείεται!} \end{cases}$

αν $\boxed{\lambda+\mu=1} \Rightarrow (\lambda+\mu)\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

$\Leftrightarrow \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} - (\lambda+\mu)\vec{c} = 0$

$\to$ Αποκλείεται για γεωμετρικούς λόγους

Άσκηση: [Δέσμη Επιπέδων]

(Ε) $(\mu+2\lambda)x + (\mu+3\lambda)y - (\mu+4\lambda)z = 4\mu$ $\quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}-\{0\}$

(i) Η (Ε) παριστάνει επίπεδο

(ii) Όλα τα επίπεδα τέμνονται κατά ευθεία η οποία να προσδιοριστεί

(iii) ? λ, μ, προκύπτει επίπεδο παράλληλο προς την ευθεία

$$\frac{x+15}{1} = \frac{y+16}{2} = \frac{z+17}{3}$$

(i) $|\mu+2\lambda| + |\mu+3\lambda| + |\mu+4\lambda| \neq 0$

$\mu = 2\lambda \quad \Rightarrow \mu = 0$

$3\lambda - 2\lambda = 0 \to \lambda = 0$ $\Big\}\ \mu,\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$

άρα πράγματι είναι επίπεδο!

(ii) Τα κοινά σημεία ικανοποιούν τα εξής:

$$\underbrace{(x+y+z-4)}_{(\Pi_1)}\mu + \underbrace{(2x+3y-4z)}_{(\Pi_2)}\lambda = 0 \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}-\{0\}$$

(Σ) $\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+3y-4z=0 \end{cases}$ Τομή επιπέδων $[(\Pi_1)\cap(\Pi_2)]$

$\Downarrow$

ευθεία

$\Rightarrow (2) \begin{cases} x+y=4-z \\ 2x+3y=4z \end{cases}$ $\begin{array}{l} 2x+2y=8-2z \\ 2x+3y=4z \\ \hline y=+6z-8 \end{array}$ $\ominus$

$\Rightarrow (2) \begin{cases} x+6z-8=4-z \\ x=-7z+12 \end{cases}$ $\dfrac{x-12}{-7}=\dfrac{y+8}{6}=\dfrac{z-0}{1}$

$\boxed{(\varepsilon) \longrightarrow \dfrac{x-12}{-7}=\dfrac{y+8}{6}=\dfrac{z-0}{1}}$

διέρχεται από το $(12,-8,0)$ και $\parallel (-7,6,1)$

(iii) Αναζητώ λ,μ ώστε $\Pi(\lambda,\mu) \parallel \vec{u}(1,2,3)$

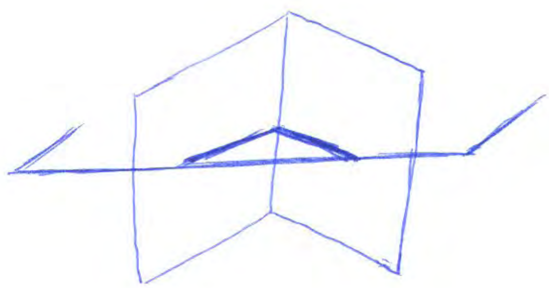
$(\mu+2\lambda)\cdot 1+(\mu+3\lambda)\cdot 2-(\mu+4\lambda)\cdot 3=0$

$\cancel{\mu}+2\lambda+\cancel{2\mu}+6\lambda-\cancel{3\mu}-12\lambda=0$

$\Longleftrightarrow \boxed{\lambda=0}$ όμως λ και $\mu \neq 0$ άρα δεν γίνεται

Άρα $\nexists$ επίπεδο.

(iv)



Ζητείται επίπεδο ώστε να διέρχεται από το $(1,1,1)$ και να είναι $\perp(\Pi)$ $\forall\, \Pi$ της δέσμης
$\Rightarrow$ αρκεί να είναι κάθετο στην κοινή ευθεία.

Άσκηση:

$\mathbb{R}^2$, $Q \longrightarrow$ εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$ ώστε $\{(1,2),(2,3)\}$ να είναι ορθοκανονική βάση $\boxed{\mathbb{R}^2 \text{ ως προς}}$ Q. Θέτουμε $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$, $u=(1,1)$

Ζητείται:

(i) Το μήκος των e_1, e_2 ως προς Q καθώς και η γωνία τους

(ii) Να αναλυθεί $u=u_1+u_2$, $u_1 \parallel e_1$ και $u \perp_Q e_1$

(i) Θέτουμε $w_1=(1,2)$, $w_2=(2,3)$ τότε γνωρίζω

$Q(w_i,w_j)=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases} \quad i,j=1,2$

Θέλω: $Q(e_i,e_j)$, $i,j=1,2$

αναζητώ a_{ij} ώστε: $e_1=a_{11}w_1+a_{12}w_2=-3w_1+2w_2$

$e_2=a_{21}w_1+a_{22}w_2=2w_1-w_2$

$(1,0)=a_{11}(1,2)+a_{12}(2,3)=(a_{11}+2a_{12}, 2a_{11}+3a_{12})$

$(0,1)=a_{21}(1,2)+a_{22}(2,3)=(a_{21}+2a_{22}, 2a_{21}+3a_{22})$

(2.1) $$\left.\begin{array}{l} a_{11}+2a_{12}=1 \\ 2a_{11}+3a_{12}=0 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} a_{12}=2 \\ a_{11}=-3 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{21}+2a_{22}=0 \\ 2a_{21}+3a_{22}=1 \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} a_{22}=-1 \\ a_{21}=2 \end{array}\right\}$$

2ος τρόπος: $$\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix}$$
(λς είναι ο αντίστροφος πίνακας.)

$$Q(e_1,e_1) = Q(-3w_1+2w_2, -3w_1+2w_2) = (-3)^2+2^2 = 9+4 = 13$$
$$Q(e_2,e_2) = Q(2w_1-w_2, 2w_1-w_2) = 2^2+1^2 = 4+1 = 5$$
$$Q(e_1,e_2) = (-3)\cdot 2 + 2\cdot(-1) = -6-2 = -8$$
→ Η βάση είναι ορθοκανονική!

$\|e_1\|_Q = \sqrt{13}$

$\|e_2\|_Q = \sqrt{5}$

$$\text{συν}(\hat{e_1, e_2}) = \frac{Q(e_1,e_2)}{\|e_1\|_Q \|e_2\|_Q} = \frac{-8}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$$

(ii) $$\text{prob}_{e_1} u = \frac{Q(u,e_1)}{Q(e_1,e_1)} \cdot e_1 = u_1$$

Θεωρία: $u_2 = u - u_1$

$$Q(u,e_1) = Q(e_1+e_2, e_1) = Q(e_1,e_1)+Q(e_2,e_1) = 13-8 = 5$$
$$Q(e_1,e_1) = 13$$

άρα $u_1 = \frac{5}{13}\cdot(1,0)$

$$u_2 = (1,1) - \left(\frac{5}{13}, 0\right) = \left(\frac{8}{13}\ 1\right)$$