30/5

Γεωμετρική Σπουδή (Μελέτη) της έλλειψης:

Ορισμός: Έλλειψη είναι ο Γ.Τ. των σημείων Μ ώστε $\frac{d(M,E)}{d(M,\delta)} = e<1$

όπου E: εστία, (δ): διευθετούσα

2ος ορισμός: Έλλειψη είναι ο Γ.Τ. των σημείων Μ, ώστε

$d(M,E_1)+d(M,E_2)=2a=$ σταθ., όπου E_1, E_2: εστίες

Ο πρώτος και ο δεύτερος ορισμός είναι ισοδύναμοι (Προς απόδειξη)

Πλεονέκτημα του 1ου ορισμού:
→ Δίνει με ενιαίο τρόπο και τις τρεις καμπύλες

$\frac{d(M,E)}{d(M,\delta)}$ σταθ.
- $=1$ → παραβολή
- >1 → υπερβολή
- <1 → έλλειψη

• Αρχίζω με τον ορισμό 1 και μελετάω το αντικείμενο που προκύπτει. Θα βρω χαρακτηριστικά σημεία του τόπου.

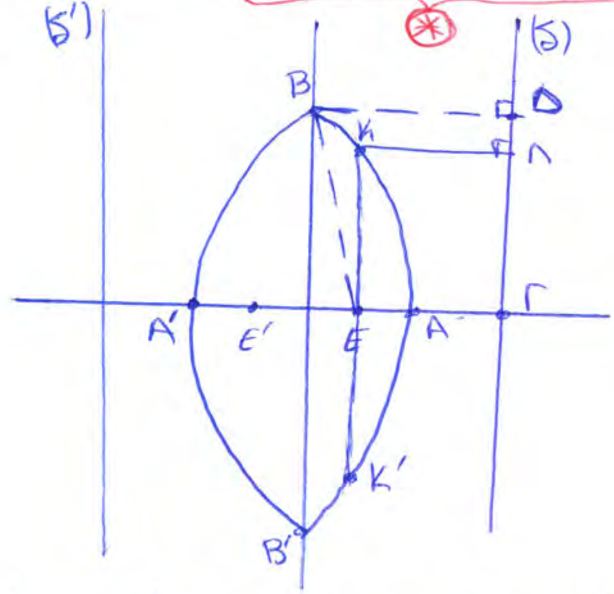
• Πάνω στην κάθετη ΕΓ, ∃ 2 σημεία του τόπου Α κ' Α'

• Φέρω την μεσοκάθετη του ΑΑ'. Πάνω σ' αυτήν ∃ άλλα 2 σημεία του τόπου Β κ' Β'.

Θέτω $AA'=2a$ και το $BB'=2b$, για το τυχαίο Μ: $\frac{d(M,E)}{d(M,\delta)}=e$

Πρόταση: $\boxed{OE=a\cdot e}$, $\boxed{O\Gamma=\frac{a}{e}}$, $\boxed{EB=a}$, $\boxed{\frac{b^2}{a^2}=1-e^2}$

*



Απόδειξη: $\frac{AE}{A\Gamma}=e=\frac{A'E}{A'\Gamma}=\frac{BE}{B\Delta}$

(επειδή Α, Α', Β: σημεία του τόπου)

$(1)\ a-OE=(EA)=e(A\Gamma)=e((O\Gamma)-a)$

$(2)\ a+OE=(A'E)=e(A'\Gamma)=e(a+(O\Gamma))$

$\xrightarrow{(1)+(2)}\ 2a=2e(O\Gamma)$

$(1)-(2)\ \ 2OE=2ea$

$\Rightarrow \boxed{O\Gamma=a/e}$ κ' $\boxed{OE=e\cdot a}$

$\frac{BE}{B\Delta}=e \Rightarrow (BE)=e(B\Delta)\Rightarrow (BE)=e(O\Gamma)\Rightarrow$

$\Rightarrow (BE)=e\cdot\frac{a}{e}\Rightarrow \boxed{(BE)=a}$

$b^2=(OB)^2=(BE)^2-(OE)^2=a^2-e^2a^2=a^2(1-e^2)\Rightarrow \boxed{\frac{b^2}{a^2}=1-e^2}$

Ισχυρισμός: Έστω κ το σημείο του τόπου ώστε $KE\perp AA'$ τότε:

$(EK)=\frac{b^2}{a^2}=1-e^2$.

Θα υπολογίσω το ΚΚ'.

$(KK')=2(KE)=2e(K\Lambda)=2e(E\Gamma)=2e[(O\Gamma)-(OE)]\overset{*}{=}2e\left[\frac{a}{e}-ae\right]=$

$=2a(1-e^2)\Longrightarrow \boxed{KK'=2a(1-e^2)}$

Άρα $KK' = \frac{2b^2}{a}$, θέτω $c^2 = b^2 - a^2$ (εισάγω νέα σταθερά)

Οπότε $E(ae, 0) = E(c, 0)$, $c^2 + b^2 = a^2$

$\delta \longrightarrow \Gamma(O\Gamma, 0) = \Gamma(\frac{a}{e}, 0) = \Gamma(\frac{a}{c/a}, 0) = \Gamma(\frac{a^2}{c}, 0)$

$\delta \longrightarrow x = \frac{a^2}{e}$

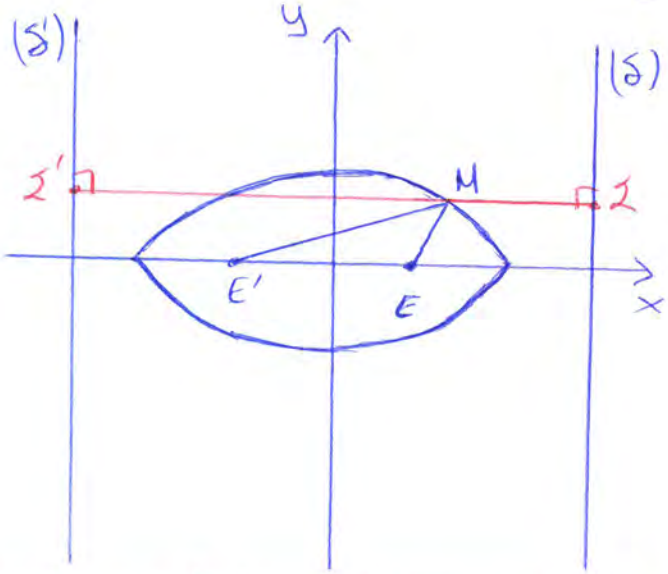
Λόγω συμμετρίας: $\exists E'(-c, 0)$ / $\exists \delta' \longrightarrow x = -\frac{a^2}{c}$ (∃ δύο εστίες κ' δύο διευθετούσες)

Αν Μ: τυχαίο σημείο της έλλειψης $M(x, y)$ κ' ισχύουν

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad d(M, E) + d(M, E') = 2a$$

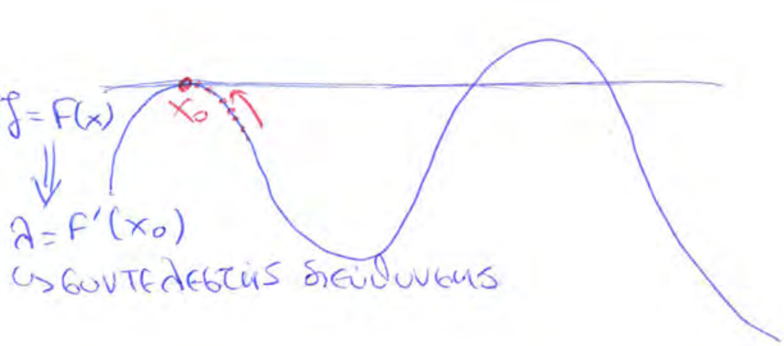
Ειδικά για τον 2ο τύπο:

$$\frac{d(M,E)}{d(M,\delta)} = \frac{d(M,E')}{d(M,\delta')} = e \Leftrightarrow d(M,E) + d(M,E') = e[d(M,\delta) + d(M,\delta')] =$$
$$= e(\Sigma\Sigma') = e(2(O\Gamma)) = 2e\frac{a}{e} = 2a$$



(το αντίστροφο άσκηση)

Εφαπτομένη Έλλειψης: (Μια συζήτηση για το τι είναι εφαπτομένη)



• Ένας ικανοποιητικός ορισμός είναι η οριακή θέση της τέμνουσας

Έλλειψη: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $M(x_0,y_0) \rightsquigarrow \lambda=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$

Εφαπτόμενη στο (x_0,y_0): $\boxed{\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{y\cdot y_0}{b^2}=1}$? Η (ε) έχει το σωστό συντελεστή διεύθυνσης και διέρχεται από το (x_0,y_0) άρα είναι η εφαπτομένη.

Απόδειξη:

1ος τρόπος:

$$\underbrace{b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2}_{f(x,y)}=0$$

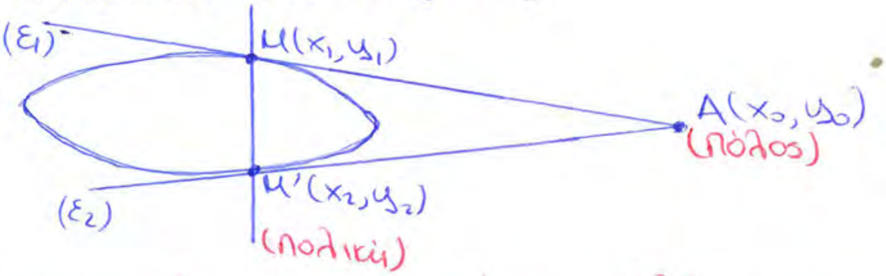
$$2b^2x\,dx+2a^2y\,dy$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2b^2x}{2a^2}=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

2ος τρόπος: (επειδή η εξίσωση είναι ειδικού τύπου)

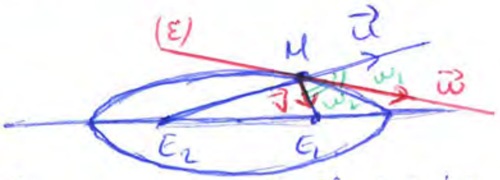
$\left\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right\}$ (2) και να αντικαταστήσω να οδηγεί σε 2ο-βάθμια εξίσωση που να έχει διπλή ρίζα $\Rightarrow \Delta=0$

Εφαρμογή: Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $M(x_1,y_1)$, $M'(x_2,y_2)$ σημεία της, A σημείο τομής των εφαπτομένων. Αν $A(x_0,y_0)$ ποια η εξίσωση της χορδής;



$$\left.\begin{aligned}\frac{x_1x_0}{a^2}+\frac{y_1y_0}{b^2}&=1\\ \frac{x_2x_0}{a^2}+\frac{y_2y_0}{b^2}&=1\end{aligned}\right\}\ \boxed{\frac{x\cdot x_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1}$$

Χαρακτηρισμός Εφαπτόμενης Έλλειψης: Η εφαπτόμενη διχοτομεί τη γωνία των εστιακών ακτινών.



1ος τρόπος απόδειξης: (αναλυτική γεωμετρία)

$\sigma υν\omega_1=\sigma υν\omega_2$

$$\frac{\langle\vec{u},\vec{w}\rangle}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{w}\|}=\frac{\langle\vec{w},\vec{v}\rangle}{\|\vec{w}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

$\vec{u}\equiv\vec{E_2M}$

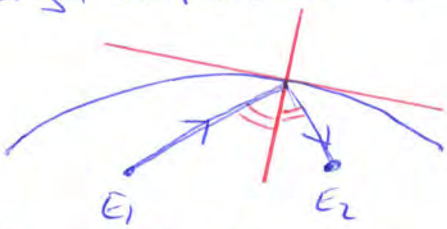
$\vec{v}\equiv\vec{ME_1}$

$\vec{w}/\!/(\varepsilon) \rightsquigarrow \lambda_u=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_0}{y_0}$

$M\in(C) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

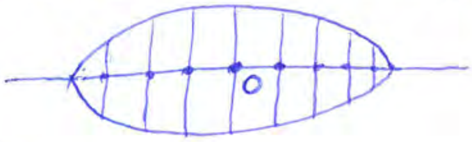
Εστιακή Ιδιότητα των κωνικών!

φωτεινά σήματα που εκπέμπονται από το E_1 και ανακλώνται στην έλλειψη διέρχονται από το E_2



Βασική Ιδιότητα: Τα μέσα των παράλληλων χορδών!

ο Γ.Τ. των μέσων των παράλληλων χορδών είναι ευθεία που διέρχεται από το Ο: κέντρο της έλλειψης.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ y=kx+\mu\end{array}\right\}$$ Τα άκρα κάθε ευθ. τμήματος (χορδής) είναι λύσεις του συστήματος $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \longrightarrow \left(\begin{array}{l} x_M=\dfrac{x_1+x_2}{2} \\ y_M=\dfrac{y_1+y_2}{2}\end{array}\right)$

$\downarrow$

M: μέσον κάθε χορδής

k=σταθ., $\mu \in \mathbb{R}$ (οικογένεια παράλληλων χορδών)

$\mu \rightsquigarrow$ παράμετρος

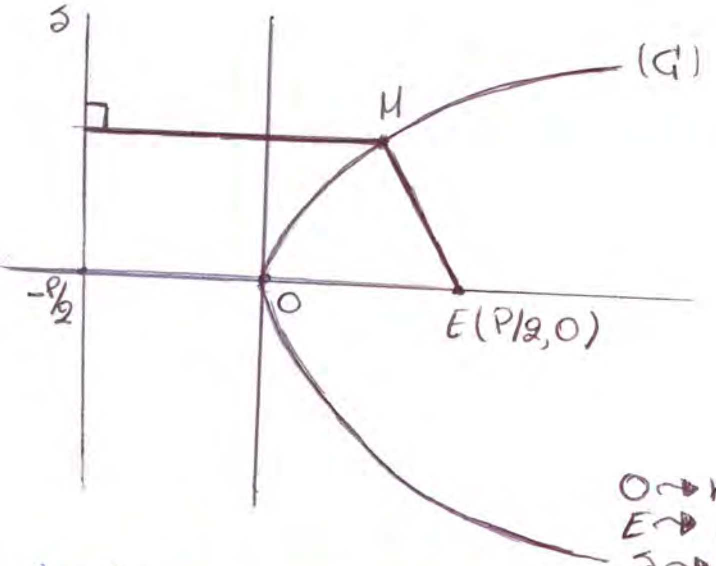
Για να βρώ το Γ.Τ. απαλοίφω το μ.

$$\left.\begin{array}{l} b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2 \\ b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2 \\ y_1=kx_1+\mu \\ y_2=kx_2+\mu \end{array}\right\} \overset{(-)}{\Longrightarrow} \left.\begin{array}{l} b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)+a^2(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0 \quad (\kappa') \\ y_1-y_2=k(x_1-x_2) \end{array}\right\}$$

$$\underbrace{\frac{y_1+y_2}{2}=\text{σταθ.}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)}_{y_M=\lambda x_M}$$

2/6

• Παραβολή: $y^2 = 2px$



$$Μ: \frac{d(Μ,Ε)}{d(Μ,δ)} = e = 1$$

Ο → κορυφή
Ε → εστία
δ → διευθετούσα

Η εξίσωση της εφαπτομένης: $Μ(x_0, y_0) \in C$ η εφαπτομένη στο Μ

$$\boxed{yy_0 = p(x+x_0)}$$

Απόδειξη: (i) Αναλυτική: $y^2 = 2px$

$2ydy = 2pdx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$, $y \neq 0$ (για διαφορετικά από την κορυφή)

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

$yy_0 - y_0^2 = px - px_0 \Rightarrow yy_0 - y_0^2 = px - px_0$

$yy_0 - 2px_0 = px - px_0$

$$\boxed{yy_0 = p(x+x_0)}$$

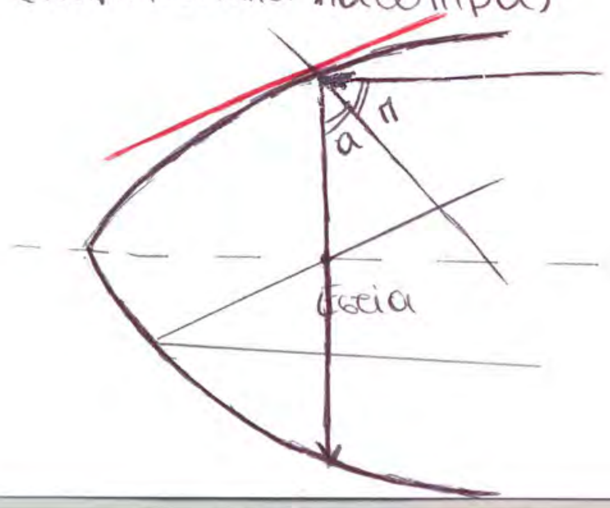
(ii) Γεωμετρική: $\left.\begin{array}{l} y = \lambda x + \mu \\ y^2 = 2px \end{array}\right\}$ (2)

για σημεία διαφορετικά της κορυφής

(2) → να οδηγεί σε τριώνυμο και να έχει διπλή ρίζα

$\lambda = \frac{p}{y}$

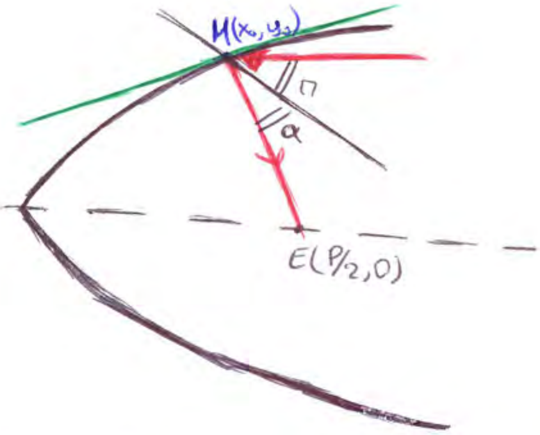
2 → Γεωμετρικός χαρακτηρισμός - Μέσω της ανακλαστικής ιδιότητας (Παραβολικά κάτοπτρα)

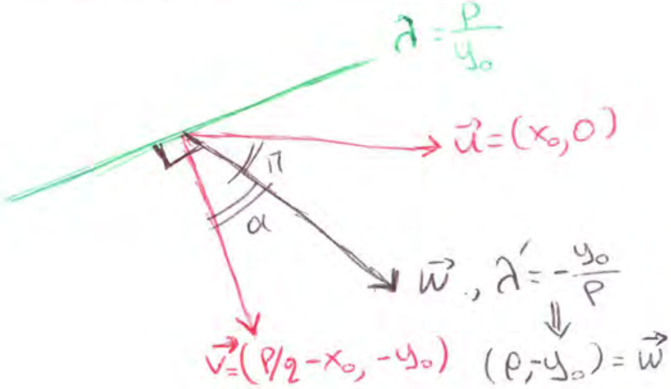


Ιδιότητα: Αν μία δέσμη ακτινών πέσει παράλληλα προς τον κύριο άξονα οι ανακλώμενες διέρχονται από την εστία.

Μεταφράσαμε γεωμετρικά: Στο σημείο επαφής να φέρω την κάθετη και την εφαπτόμενη γωνία πρόσπτωσης = γωνία ανάκλασης.

Απόδειξη της Ιδιότητας (με Αναλυτική Γεωμετρία):





Θέλω $\hat{\alpha}=\hat{\pi}$, συν$\hat{\alpha}$ = συν$\hat{\pi}$, $\boxed{y^2=2px}$

$$\frac{\langle \vec{w},\vec{v}\rangle}{\|\vec{w}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{\langle \vec{u},\vec{w}\rangle}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{w}\|}$$

$$\frac{\langle (p,-y_0),(p/2-x_0,y_0)\rangle}{\sqrt{y_0^2+(\frac{p}{2}-x_0)^2}}=\frac{\langle (x_0,0),(p,-y_0)\rangle}{\sqrt{x_0^2+0^2}}$$

$$\frac{p(\frac{p}{2}-x_0)+y_0^2}{\sqrt{y_0^2+(\frac{p}{2}-x_0)^2}}=\frac{px_0}{\sqrt{x_0^2}} \longleftrightarrow \frac{p^2-\underbrace{2px_0}_{=-y_0^2}+2y_0^2}{2\sqrt{y_0^2+(\frac{p}{2}-x_0)^2}}=\frac{px_0}{\sqrt{x_0^2}}$$

$$\frac{p^2+y_0^2}{2\sqrt{y_0^2+(\frac{p}{2}-x_0)^2}}=\frac{px_0}{\sqrt{x_0^2}} \longrightarrow \frac{p^2+y_0^2}{y_0^2+(\frac{p}{2}-x_0)^2}=\frac{y_0^2}{\sqrt{x_0^2}}$$

$$\frac{p^2+2px_0}{\sqrt{y_0^2+(\frac{p}{2}-x_0)^2}}=\frac{2px_0}{\sqrt{x_0^2}} \quad (*)$$

Όμως: $\sqrt{y_0^2+(\frac{p}{2}-x_0)^2}=\sqrt{2px_0+\frac{p^2}{4}-px_0+x_0^2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}+px_0+x_0^2}=$

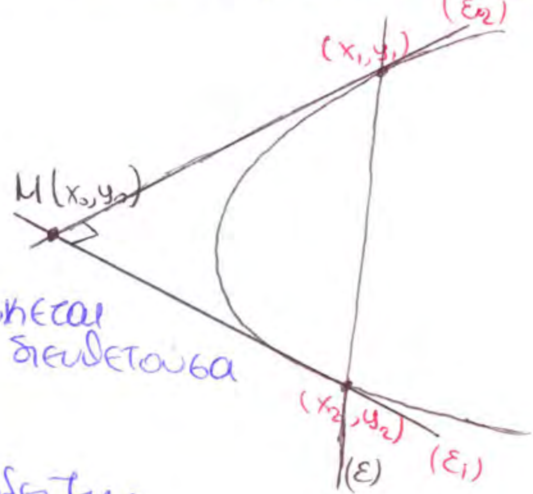
$$=\sqrt{(p/2+x_0)^2}$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \frac{p^2+2px_0}{\frac{p}{2}+x_0}=\frac{2px_0}{x_0}$$

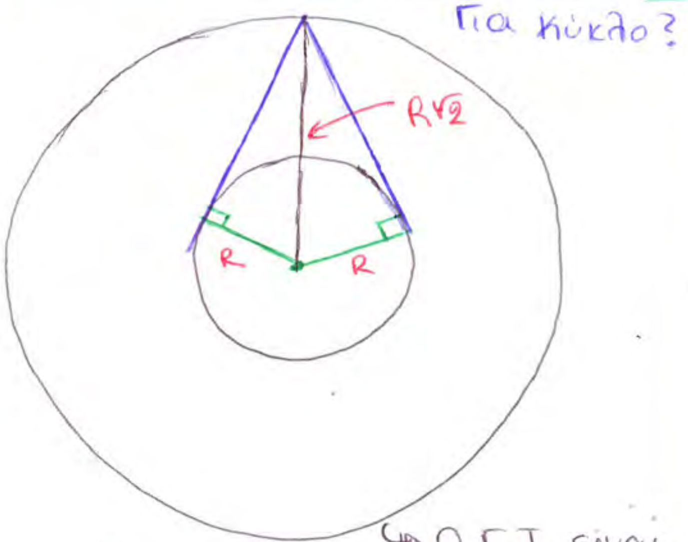
Εύρεση ειδώλου:

Χαρακτηριστική Ιδιότητα διευθετούσας:

"Ο Γ.Τ. των σημείων που άγονται κάθετες εφαπτόμενες"



Για κύκλο?



→ Ο Γ.Τ. είναι κύκλος $R\sqrt{2}$

Για έλλειψη κύκλος $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

Απόδειξη:

Η (ε) λέγεται πολική του Μ και το Μ λέγεται πόλος της (ε)

$M(x_0, y_0) \longrightarrow (\varepsilon): y y_0 = p(x+x_0)$

(Απόδειξη: ίδια με την έλλειψη → έχει γίνει)

Έστω Μ σημείο του τόπου, τότε οι εφαπτόμενες στα άκρα της πολικής είναι κάθετες.

Ποια είναι τα άκρα? είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} y y_0 = p(x+x_0) \\ y^2 = 2px \end{array}\right\} \quad y y_0 = px + px_0 \Rightarrow y y_0 = \frac{y^2}{2} + p x_0 \Rightarrow 2 y y_0 = y^2 + 2 p x_0 \Rightarrow y^2 - (2y_0) y + 2 p x_0 = 0$$

$$y_1, y_2 \Rightarrow \boxed{y_1 y_2 = 2 p x_0}$$

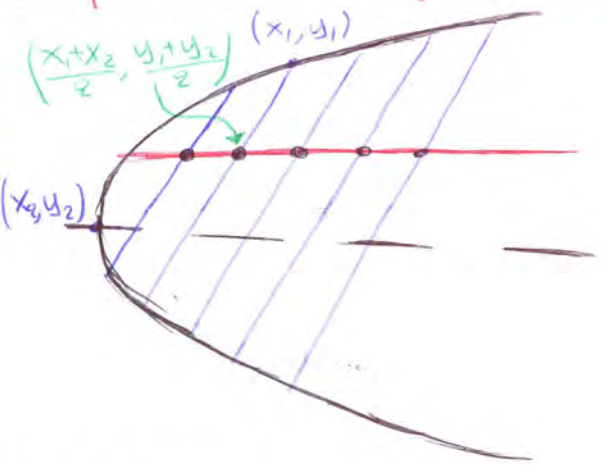
$A(x_1, y_1) \longrightarrow \lambda_{\varepsilon_2} = \frac{p}{y_1} \quad \left(\lambda_{\kappa\alpha\theta} = -\frac{y_1}{p}\right)$

$B(x_2, y_2) \longrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} = \frac{p}{y_2} \quad \left(\lambda_{\kappa\alpha\theta} = -\frac{y_2}{p}\right)$

Θέλω $\longrightarrow \lambda_{\varepsilon_1} \cdot \lambda_{\varepsilon_2} = -1$ (κάθετες εφαπτόμενες)

$$\frac{p^2}{y_1 y_2} = -1 \Rightarrow \frac{p^2}{2 p x_0} = -1 \Rightarrow \boxed{x_0 = -p/2}$$ (διευθετούσα)

Τα μέσα των παράλληλων χορδών!



Επ' ευθείας // με τον κύριο άξονα)

Απόδειξη:

$y^2 = 2px$ (αν είναι κάθετη στον άξονα ⟶ τότε είναι ο άξονας)

$y = \lambda x + \mu$, $\underset{\text{σταθερό}}{\lambda} \neq 0$, τις ευθείες στις οποίες βρίσκονται οι χορδές.

$$y^2 = \lambda^2 x^2 + 2\lambda\mu x + \mu^2$$

$$2px = \lambda^2 x^2 + 2\lambda\mu x + \mu^2$$

$$\lambda^2 x^2 + (2\lambda\mu - 2p)x + \mu^2 = 0$$

$$\boxed{\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2\lambda\mu - 2p}{2\lambda^2}}$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \lambda\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \mu = \frac{-(2\lambda\mu - 2p)}{2\lambda} + \mu = -\mu + \frac{p}{\lambda} + \mu$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{\lambda}}$$

2ος τρόπος:

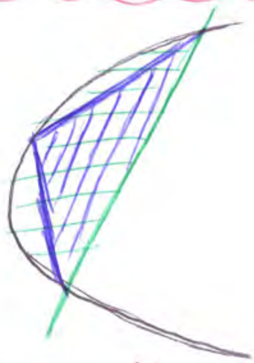
$$\left.\begin{aligned} y_1^2 &= 2px_1 \\ y_2^2 &= 2px_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2p(x_1 - x_2)$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \lambda x_1 + \mu \\ y_2 &= \lambda x_2 + \mu \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1 - y_2 = \lambda(x_1 - x_2)$$

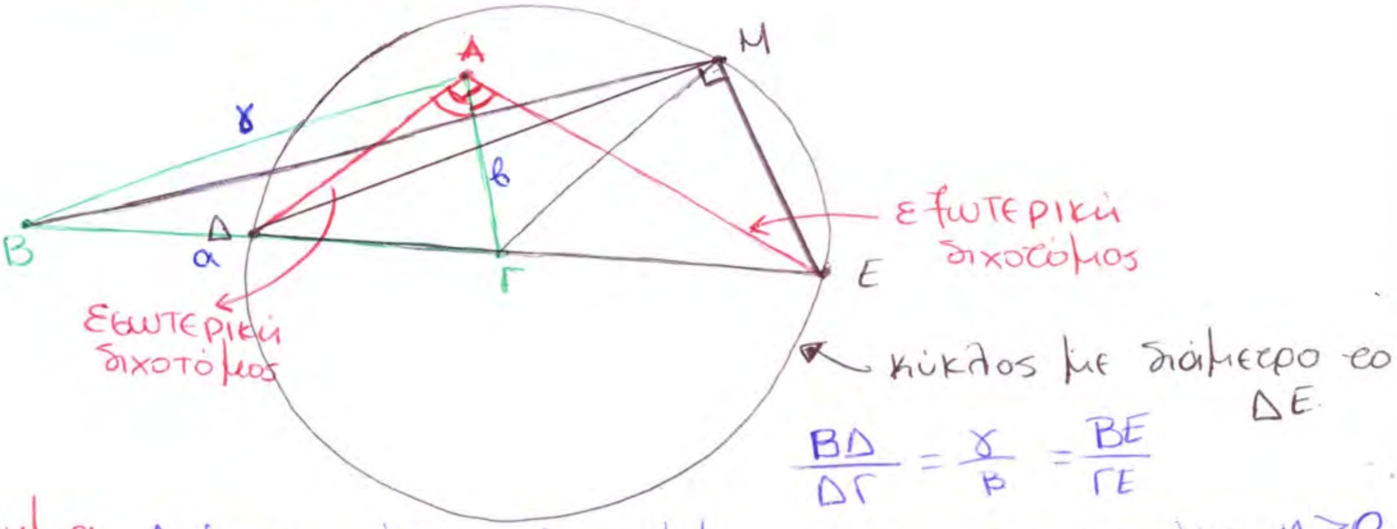
$$\Leftrightarrow \lambda \cdot \left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) = p$$

$$\boxed{\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{\lambda} = \text{σταθερό}}$$

Τετραγωνισμός χωρίου Παραβολής (Αρχιμήδης):



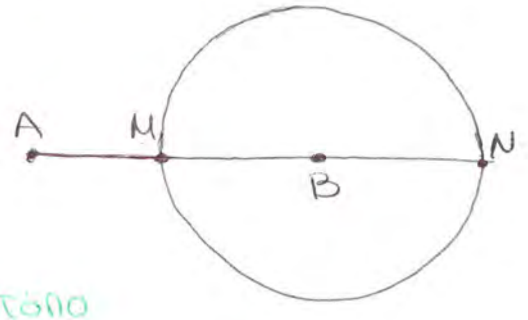
Απολώνιος Κύκλος (Απλή περίπτωση):



$$\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{BE}{\Gamma E}$$

Πρόβλημα: Δίδονται ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και ένα $\kappa > 0$
Ν.Β. ο Γ.Τ. των σημείων M ώστε $\frac{MA}{MB} = \kappa$

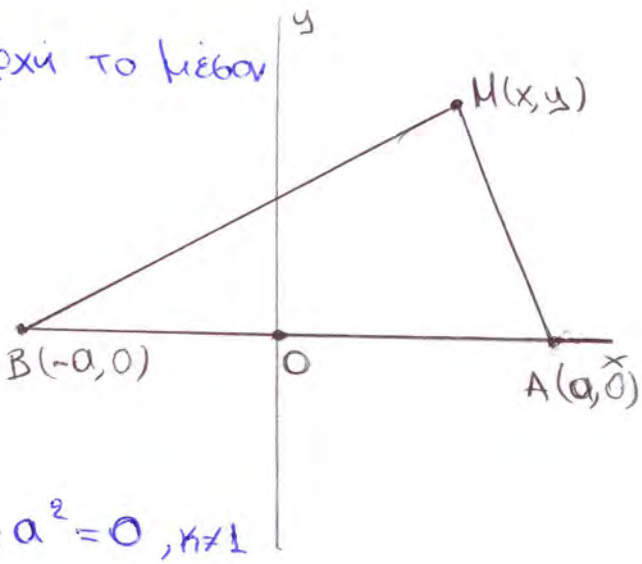
Ποια σχέση έχει με το προηγούμενο;



Πάνω στο AB υπάρχουν 2 σημεία του τόπου M, N που το χωρίζουν εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο κ.

Η περιφέρεια με διάμετρο MN δίνει τον τόπο

Η απόδειξη με αναλυτική γεωμετρία:
Θεωρώ ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το μέσον O του AB $Ox \longleftrightarrow AB$, $Oy \perp AB$



$A(0,0)$

$B(-a,0)$

$$\frac{MA}{MB} = \kappa \neq 1$$

$$\frac{MA^2}{MB^2} = \kappa^2$$

$$\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2} = \kappa^2 \iff x^2+y^2+2\frac{(\kappa^2+1)}{\kappa^2-1}a\cdot x + a^2 = 0, \ \kappa \neq 1$$

$x^2+y^2+f\cdot x+g\cdot y+h=0$

$O\left(-f/2, -g/2\right)$, $R=\sqrt{\frac{f^2}{4}+\frac{g^2}{4}-h}$

$O\left(-\frac{(k^2+1)a}{k^2-1}, 0\right)$, $R=\frac{2x_0}{|k^2-1|}$

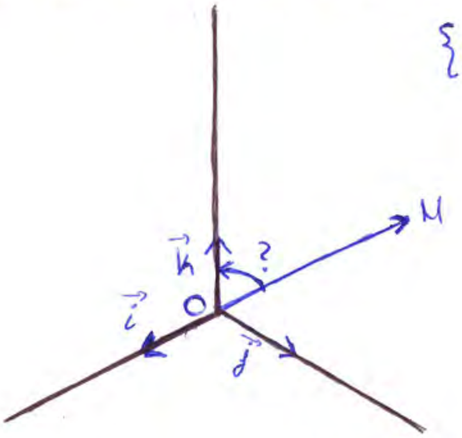
• Στο μιγαδικό επίπεδο:

$|z-z_1|=k\,|z-z_2|$, $k>0$, $k\neq 1$

$\Rightarrow$ κύκλος
- κέντρου (?)
- ακτίνας (?)

Επιφάνειες στο Χώρο:

(Ι) Συστήματα συντεταγμένων στο χώρο (Σύντομη Υπενθύμιση)



$\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ορθοκανονικό

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$x = \langle \vec{OM}, \vec{i} \rangle$$

$$y = \langle \vec{OM}, \vec{j} \rangle$$

$$z = \langle \vec{OM}, \vec{k} \rangle$$

$$(\hat{\vec{k}, \vec{OM}}) = ?$$

$$\text{συν}(\hat{\vec{OM}, \vec{k}}) = \frac{\langle \vec{OM}, \vec{k} \rangle}{\|\vec{OM}\| \cdot \|\vec{k}\|} = \frac{\langle \vec{OM}, \vec{k} \rangle}{\|\vec{OM}\|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\text{συν}(\hat{\vec{OM}, \vec{i}}) = \frac{\langle \vec{OM}, \vec{i} \rangle}{\|\vec{OM}\|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\text{συν}(\hat{\vec{OM}, \vec{j}}) = \frac{\langle \vec{OM}, \vec{j} \rangle}{\|\vec{OM}\|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\vec{OM} \to \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$$

έχει μήκος 1

[το μοναδιαίο που ορίζει το $\vec{OM}$]

$$\left.\begin{aligned} x &= \text{συν}(\hat{\vec{OM}, \vec{i}}) \cdot \rho \\ y &= \text{συν}(\hat{\vec{OM}, \vec{j}}) \cdot \rho \\ z &= \text{συν}(\hat{\vec{OM}, \vec{k}}) \rho \end{aligned}\right\} \text{Λέγονται Διευθύνοντα συνημίτονα}$$

$\rho = \|\vec{OM}\|$

(Διευθύνοντα συνημίτονα ⊕ Μήκος) $\longleftrightarrow$ Βρίσκω το σημείο

Πώς συνδέονται 2 ορθοκανονικά συστήματα στο χώρο:

α) Με την ίδια αρχή!

$$\left.\begin{aligned} &(Oxyz) \\ &(Ox'y'z') \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$P : (3\times3)$ αντιστρέψιμος πίνακας

P: ορθογώνιος πίνακας

$$P \cdot P^T = I_3$$

Απόδειξη: $x^2+y^2+z^2=(x')^2+(y')^2+(z')^2$, $\forall\, x,y,z,x',y',z'$
(Αφού το μήκος είναι ίδιο και τα δύο συστήματα)

$$\Longleftrightarrow x^2+y^2+z^2=(x,y,z)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(x',y',z')\,P^T\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=$$

$$=(x',y',z')\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=x'^2+y'^2+z'^2$$

$\Longleftrightarrow P^T\cdot P=I_3$

$\det(P^T\cdot P)=1$

$(\det(P))^2=1$

$\det(P)= +1$ ή -1

Παράδειγμα: $\left(\begin{array}{cc|c}\cos\phi & -\sin\phi & 0\\ \sin\phi & \cos\phi & 0\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)$ αφήνει το z αναλλοίωτο, στρέφει στο Oxy κατά γωνία φ.

β) Με διαφορετική αρχή!
Oxyz, O'x'y'z'

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}+\underbrace{\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\z_0\end{bmatrix}}_{\text{διάνυσμα μεταφοράς}}$$

$$\boxed{X=PX'+H\ ,\quad P\cdot P^T=I_3}$$
Γενικός Τύπος

• Παραδείγματα Επιφανειών:

$(t,s)\longmapsto \vec{r_0}+t\vec{u}+s\cdot\vec{v}$, $\vec{u}\times\vec{v}\neq 0$
$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$

Περιγράφεται με δύο παραμέτρους t, s

Γεωμετρικά: Επίπεδο που διέρχεται από το $\vec{r_0}$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\ell}=\vec{u}\times\vec{v}$. Είναι // με τον υπόχωρο που παράγουν τα $\{\vec{u},\vec{v}\}$

Η επιφάνεια της σφαίρας:

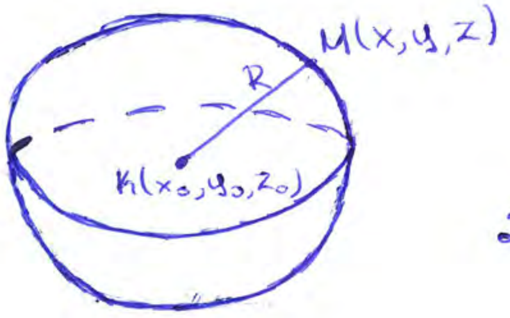
1ος Ορισμός: Είναι ο Γ.Τ. των σημείων του χώρου που απέχουν από (γνωστό) σημείο (γνωστό) και σταθερή απόσταση.

2ος ορισμός: είναι αυτό που παράγεται „όταν" περιστρέφεται „στο χώρο ένα ημικύκλιο γύρω από τη διάμετρό του. [Στοιχεία Ευκλείδη!]

Ο 1ος ορισμός στα πλαίσια της Αναλυτικής Γεωμετρίας:

Πρόταση: Η σφαίρα σε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων έχει την εξίσωση: $x^2+y^2+z^2=R^2$, $R>0$ (κ' αντίστροφο)

Απόδειξη:



$$\|\vec{KM}\| = R,\ R>0$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$

Στο $K.XYZ$, παράλληλα στο $Oxyz$

$$\boxed{X^2+Y^2+Z^2=R^2}$$

Η γενική εξίσωση της σφαίρας:

$Oxyz$

$x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ παριστάνει σφαίρα κι ποιά?

$$\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\beta}{2}\right)^2+\left(z+\frac{\gamma}{2}\right)^2=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4}-\delta$$

παριστάνει σφαίρα $\Longleftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta>0$

οπότε Κέντρο $K\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2},-\frac{\gamma}{2}\right)$, $R=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4}-\delta}=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta}{4}}$

Εφαρμογή: Ζητείται σφαίρα από τα σημεία $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$

Οδηγούμαι στο σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l}\delta=0\\ 1+\alpha+\delta=0\\ 1+\beta+\delta=0\\ 1+\gamma+\delta=0\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=-1$$

$$x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$$

$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\tfrac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$K\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right),\ R=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άσκηση: Γενικά σημεία $\Rightarrow \det\overset{5\times5}{(\quad)}=0$

Σφαιρικές Συντεταγμένες: (Πολικές Συντεταγμένες $\xrightarrow[\text{περνάω}]{}$ Χώρο)

Θεωρώ ως πόλο την αρχή του χώρου (κέντρο σφαίρας)

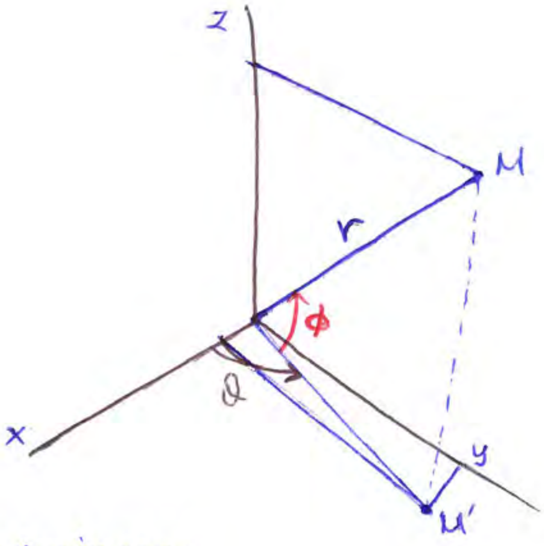
$\|OM\| = r\ (>0)$

$\hat{\phi} \to M'\hat{O}M$

$\hat{\theta} \to x\hat{O}M'$

M' είναι η ορθή προβολή του M στο xOy

Εισάγονται δύο γωνίες



Τώρα ισχύουν οι σχέσεις:

$(OM') = (OM)\cos\phi = r\cdot\cos\phi$

$x = (OM')\cos\theta = r\cos\theta\cos\phi$

$y = (OM')\sin\theta = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\phi$

$z = (OM')\sin\phi = r\cdot\sin\phi$

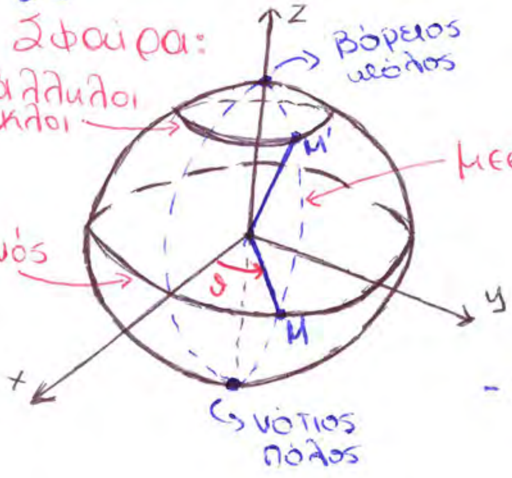
$M(x,y,z) = M(r\cos\theta\cos\phi,\ r\sin\theta\cdot\cos\phi,\ r\cdot\sin\phi)$

$r>0$ $\qquad M(r,\theta,\phi)$

$\theta\in[0,2\pi)$ $\qquad$ ↳ σφαιρικές συντεταγμένες

$\phi\in[-\pi/2,\pi/2]$

Εφαρμογή στη Σφαίρα:



σφαίρα R = σταθερό

ϕ = σταθ. $\Longrightarrow$ κύκλος παράλληλος

θ = σταθ. $\Longrightarrow$ μεσημβρινός

- Γεωμετρικό μήκος

↓

θ

- Γεωμετρικό πλάτος

↓

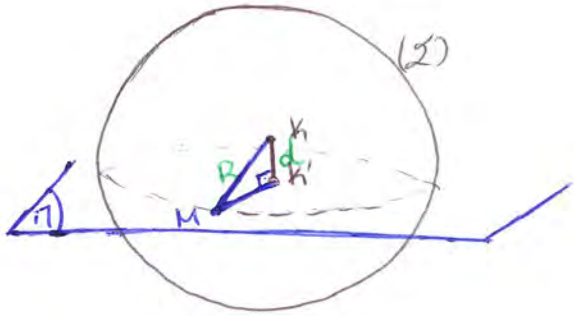
ϕ

Τομές Επιπέδου και Σφαίρας:

$(\Sigma) \cap (\Pi) = ?$

• αν $(\Sigma) \cap (\Pi) \neq \emptyset$

1ο βήμα: Προβάλω το κέντρο της σφαίρας στο επίπεδο και έστω και η προβολή



2ο βήμα: Αν M σημείο $(\Sigma) \cap (\Pi)$ φέρω την K'M

Σχηματίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο $(\overset{\triangle}{KK'M})$, $\hat{K'} = 1L \rightarrow d$

$KK' = d(K,(\Pi))$ = δοσμένη και σταθερή $(KM) = R$ = η ακτίνα της σφαίρας

Από Πυθαγόρειο $\Longrightarrow (KM)^2 = (KK')^2 + (K'M)^2$

3ο βήμα: Στο (Π) τα σημεία τομής (όπως το M) απέχουν από το K' σταθερή απόσταση ακτίνας $\sqrt{R^2 - d^2}$ άρα είναι κύκλος

Απάντηση: Έστω $d(K,(\Pi))$

(1η) $d > R$, $\nexists$ σημεία τομής!

(2η) $d = R$, ένα σημείο επαφής το επίπεδο εφάπτεται στη σφαίρα.

(3η) $d < R \Rightarrow$ κύκλος ακτίνας $\sqrt{R^2 - d^2}$ κέντρου: την προβολή το K στο (Π)

Ορολογία: Αν το επίπεδο διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας, τότε $d = 0 \Longrightarrow$ η ακτίνα του κύκλου που προκύπτει $= R$ = μέγιστη!

$\Longrightarrow$ Μέγιστοι κύκλοι (π.χ. ο Ισημερινός, όλοι οι μεσημβρινοί)

Παρατήρηση: Κάθε δύο μέγιστοι κύκλοι τέμνονται σε δύο αντιδιαμετρικά σημεία (π.χ. όλοι οι μεσημβρινοί διέρχονται από τους πόλους)

Εφαπτόμενο Επίπεδο: $\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z = 1}$

$\hookrightarrow$ Γενικός Τύπος

$\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z + \delta = 0$

$(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \delta$

$\delta = -1$

$KK' \perp (\Pi)$, KK' ακτίνα!

Διέρχεται από το K' και είναι κάθετο στο KK'

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \rightarrow K'$, $(\Pi) \perp \vec{R} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

Άσκηση 1: Ν.Β. ο Γ.Τ. των σημείων του χώρου που "βλέπουν" δοθέν ευθύγραμμο τμήμα με ορθή γωνία.

$A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, $M(x,y,z)$ σημείο του τόπου

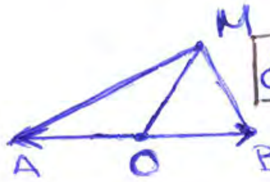
$$\hat{AMB} = 1L \iff \vec{MA} \perp \vec{MB} \iff \langle \vec{MA}, \vec{MB} \rangle = 0$$

1ο Διανυσματικά: Αν O: μέσον του $\vec{AB}$ τότε $\vec{AO} = \vec{OB}$

$$\langle \vec{MO} + \vec{OA}, \vec{MO} + \vec{OB} \rangle = 0 \iff \langle \vec{MO}, \vec{MO} \rangle + \langle \vec{MO}, \vec{OB} \rangle + \langle \vec{OA}, \vec{MO} \rangle + \langle \vec{OA}, \vec{OB} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \|\vec{MO}\|^2 - \langle \vec{OA}, \vec{OA} \rangle 0$$

$$\Rightarrow \|\vec{OM}\|^2 = \|\vec{AO}\|^2 = \left\|\frac{AB}{2}\right\|^2 = \text{σταθ}$$



$\|\vec{OM}\| = \text{σταθ}$

$\boxed{d(O,M) = \frac{d(A,B)}{2}}$

Σφαίρα: κέντρου O ακτίνα $\frac{AB}{2}$

2ο Αναλυτικά: $\langle \vec{MA}, \vec{MB} \rangle = 0$

$$\langle (x - x_A, y - y_A, z - z_A), (x - x_B, y - y_B, z - z_B) \rangle = 0$$

$$\iff (x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$

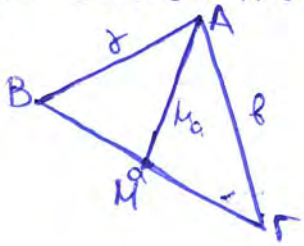
$$\iff x^2 - (x_A + x_B)x + x_A x_B + y^2 - (y_A + y_B)y + y_A y_B + z^2 - (z_A + z_B)z + z_A z_B = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 - \left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + x_A x_B + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 - \left(\frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 + y_A y_B + \left(z - \frac{z_A + z_B}{2}\right)^2 - \left(\frac{z_A + z_B}{2}\right)^2 + z_A z_B = 0$$

$$\iff \left(x - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{z_A + z_B}{2}\right)^2 = \left[\left(\frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 - x_A x_B\right] + \left[\left(\frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 - y_A y_B\right] = \left(\frac{x_A - x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_A - y_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_A - z_B}{2}\right)^2 (> 0)$$

Άσκηση 2: Ζητείται ο Γ.Τ. των σημείων του χώρου ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων τους από τα άκρα δοσμένου ευθύγραμμου τμήματος να είναι σταθερό.

(Το αντίστοιχο πρόβλημα στο επίπεδο:



$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \quad \text{(Θεώρημα Διαμέσων)}$$

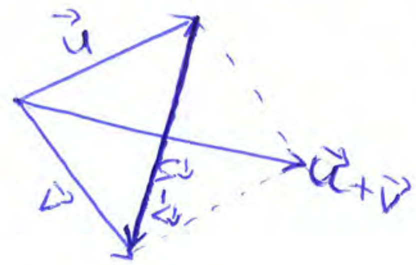
$$\Downarrow$$

$$\mu_\alpha^2 = \frac{(\beta^2 + \gamma^2) - \frac{\alpha^2}{2}}{2} = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{4}$$

$$\Downarrow$$

ο Γ.Τ. είναι κύκλος

Ισοδύναμα: $2\cdot[\beta^2+\gamma^2] = 4\mu_\alpha^2 + \alpha^2 = (2\mu_\alpha)^2 + \alpha^2$



$$\updownarrow$$

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 + \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right]$$

Γεωμετρικά: Στο επίπεδο είναι κύκλος → Στο χώρο σφαίρα

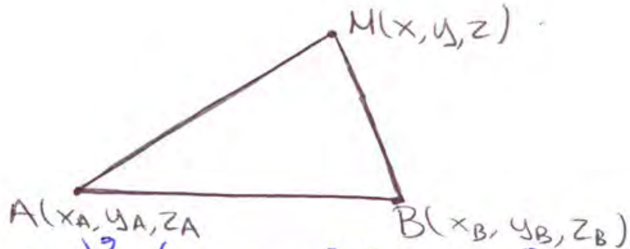
Κέντρο → Μέσο ευθ. τμήματος

ακτίνα → $\sqrt{\dfrac{2k^2-d^2}{4}}$ → μήκος ευθύγραμμου τμήματος

↳ σταθερά

Περιορισμός: $2k^2 > d^2$

Αναλυτική λύση:



$\|\vec{MA}\|^2 + \|\vec{MB}\|^2 = k^2$

$(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2 + (x-x_B)^2 + (y-y_B)^2 + (z-z_B)^2 = k^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2(x_A+x_B)x + 2y^2 - 2(y_A+y_B)y + 2z^2 - 2(z_A+z_B)z + (x_A^2+x_B^2) + (y_A^2+y_B^2) +$
$+ (z_A^2+z_B^2) = k^2$

$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{x_A+x_B}{2}\right)^2 + \left(y - \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)^2 + \left(z - \dfrac{z_A+z_B}{2}\right)^2 = \dfrac{k^2}{2} - \left(\dfrac{x_A^2+x_B^2}{2}\right) -$
$- \left(\dfrac{y_A^2+y_B^2}{2}\right) - \left(\dfrac{z_A^2+z_B^2}{2}\right) = \dfrac{k^2}{2} - \left[\left(\dfrac{x_A-x_B}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{y_A-y_B}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{z_A-z_B}{2}\right)^2\right]$

"σφαίρα": κέντρου → $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}, \dfrac{y_A+y_B}{2}, \dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$

ακτίνα → $\sqrt{\dfrac{k^2}{2} - \dfrac{d^2}{4}}$ $\quad \Big| \; d^2 = (x_A-x_B)^2 + (y_A-y_B)^2 + (z_A-z_B)^2$

$$\| $$

$\sqrt{\dfrac{2k^2-d^2}{4}}$, περιορισμός: $2k^2 > d^2$

Άσκηση 3: Κοινά σημεία 2 σφαιρών.

Παράδειγμα:

$(\Sigma_1): x^2+y^2+z^2=1$

$(\Sigma_2): (x-2)^2+y^2+z^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\overset{(\Sigma_2)-(\Sigma_1)}{\Longrightarrow} (x-2)^2-(x)^2=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow -4x+4=\frac{5}{4}$

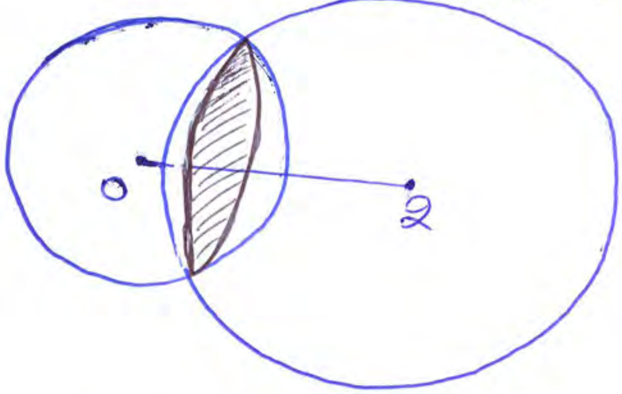
$\Leftrightarrow -x+1=\frac{5}{16}$

$\Leftrightarrow \boxed{x=\frac{11}{16}}$ → Τα κοινά σημεία βρίσκονται όλα στο επίπεδο $x=\frac{11}{16}$

$(\Sigma_1) \Rightarrow \left(\frac{11}{16}\right)^2+y^2+z^2=1$

$\left[\, y^2+z^2=1-\left(\frac{11}{16}\right)^2=1-\left(\frac{11}{16}\right)^2>0 \,\right.$

κύκλο στο επίπεδο $Oxyz \to x=0$]



Συμπέρασμα: είναι κύκλος στο επίπεδο $x=\frac{11}{16}$, κέντρου $\left(\frac{11}{16},0,0\right)$ ακτίνας $\sqrt{1-\left(\frac{11}{16}\right)^2}$

Θεωρητικά:

$(\Sigma_1): x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$

$(\Sigma_2): x^2+y^2+z^2+\alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta'=0$

Θεωρώ την οικογένεια: $\Sigma_1+\lambda\Sigma_2=0,\ \lambda\in\mathbb{R}$

- Για $\lambda\neq-1 \Rightarrow (1+\lambda)x^2+(1+\lambda)y^2+(1+\lambda)z^2+(\alpha+\lambda\alpha')x+\ldots=0$

$x^2+y^2+z^2+\underbrace{\left(\frac{\alpha+\lambda\alpha'}{1+\lambda}\right)}_{\alpha''}x+\underbrace{\left(\frac{\beta+\lambda\beta'}{1+\lambda}\right)}_{\beta''}y+\underbrace{\left(\frac{\gamma+\lambda\gamma'}{1+\lambda}\right)}_{\gamma''}z+\underbrace{(\delta+\lambda\delta')}_{\delta''}=0$

$\to$ σφαίρα.

- Για $\lambda=-1 \Rightarrow \Sigma_1+\lambda\Sigma_2$ παριστάνει επίπεδο

Ποιο επίπεδο;

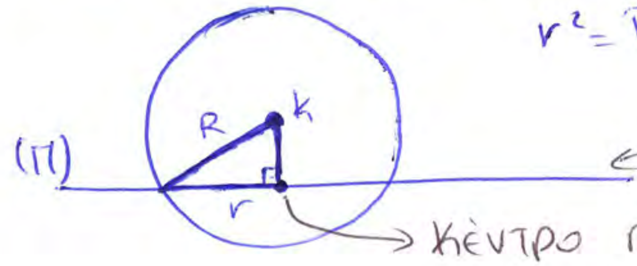
$(\Pi): (\alpha-\alpha')x+(\beta-\beta')y+(\gamma-\gamma')z+(\delta-\delta')=0$

Κάθετο στο διάνυσμα $\left(\frac{\alpha-\alpha'}{2}, \frac{\beta-\beta'}{2}, \frac{\gamma-\gamma'}{2}\right)$ που ορίζουν τα κέντρα των σφαιρών

Κοινά σημεία είναι $(\Sigma_1)\cap(\Pi)$

Τομές επιπέδου και σφαίρας, άρα "κύκλος"

Πώς βρίσκω το κέντρο κ' την ακτίνα?



$$r^2 = R^2 - d^2(K,(\Pi))$$

επίπεδο

σημείο

← επίπεδο

→ κέντρο προκύπτει ως τομή του επιπέδου κ' της ευθείας που άγεται από το κέντρο κάθετη στο επίπεδο.

(Για να βρω το κέντρο λύνω σύστημα)

Αριθμητική Εφαρμογή:

$x^2+y^2+z^2=1$ (Σ)

$x+y+z=1/6$ (Π) , ? $(\Sigma)\cap(\Pi)$

$$d(K,(\Pi)) = \frac{|1\cdot 0+1\cdot 0+1\cdot 0-1/6|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|ax_0+by_0+\gamma z_0+\delta|}{\sqrt{a^2+b^2+\gamma^2}} = d(P,(\Pi)) =$$

$K(0,0,0)$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}} < 1$$

$$r^2 = 1^2 - \frac{1}{3\cdot 36} = \frac{107}{3\cdot 36} \longrightarrow \boxed{r = \frac{\sqrt{107}}{6\sqrt{3}}} \text{ (ακτίνα)}$$

Εύρεση του κέντρου: $\vec{l} = (1,1,1) \perp (\Pi)$

$$(\varepsilon): \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1}$$ Διέρχεται από το κέντρο $\perp$ (Π)

$$\left.\begin{matrix} x+y+z = 1/6 \\ x=y=z \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x = 1/6$$

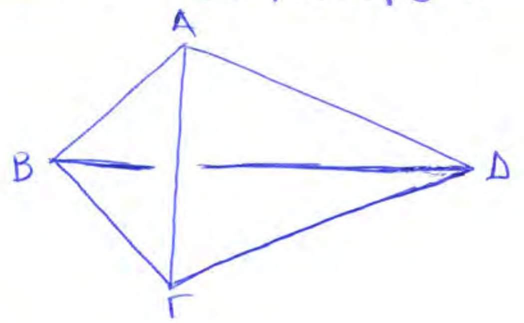
$$\Leftrightarrow \boxed{x = 1/18} \rightarrow (1/18, 1/18, 1/18)$$ (κέντρο του κύκλου τομής)

Άρα οι εξισώσεις του κύκλου είναι:

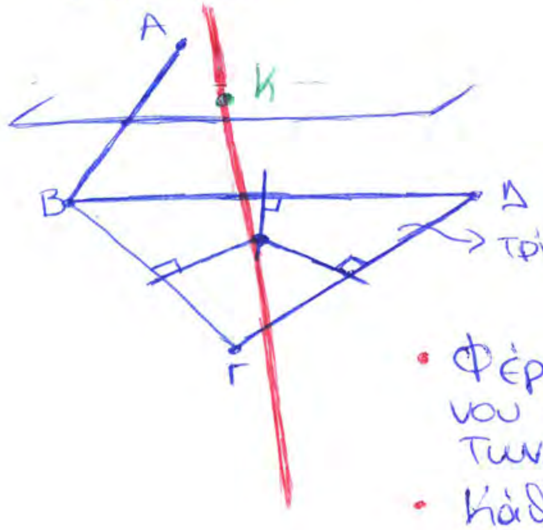
$$\left.\begin{matrix} (x-1/18)^2+(y-1/18)^2+(z-1/18)^2 = \frac{107}{108} \\ \boxed{x+y+z = 1/6} \end{matrix}\right\} (C_1)$$

→ Αν δεν πάρουμε και αυτή τη σχέση τότε η $1^η$ σχέση θα περιέγραφε σφαίρα κ' όχι κύκλο.

Άσκηση 4: Τετράεδρο ← γενίκευση τριγώνου



Περιγεγραμμένη σφαίρα ⟷ κέντρο που ισαπέχει από τις 4 κορυφές



ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ

- Φέρω την κάθετη στο επίπεδο του τριγώνου που διέρχεται από το σημείο τομής των μεσοκαθέτων.
- Κάθε σημείο της καθέτου ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου.
- Φέρω το μεσοκάθετο επίπεδο στο AB

  ⇓

  Τέμνει την κάθετη στο K.

Το K ισαπέχει από τις κορυφές του τετραέδρου!
(κέντρο της ζητούμενης σφαίρας)

$A(x_A, y_A, z_A)$, $B(\ )$, $\Gamma(\ )$, $\Delta(\ )$, $? K, R = ?$

Αν $\exists\ x^2+y^2+z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$, $[\alpha,\beta,\gamma,\delta \ldots]$

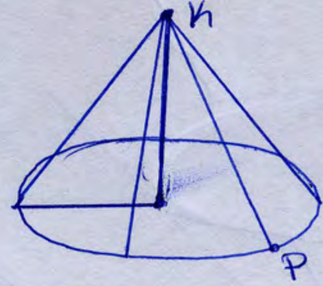
$$\left.\begin{array}{l} (A) \longrightarrow \\ (B) \longrightarrow \\ (\Gamma) \longrightarrow \\ (\Delta) \longrightarrow \end{array}\right\}$$

Λύνουμε το γραμμικό σύστημα, το οποίο λύνεται πάντα, για να βρούμε τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_A^2+y_A^2+z_A^2 & x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B^2+y_B^2+z_B^2 & x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_\Gamma^2+y_\Gamma^2+z_\Gamma^2 & x_\Gamma & y_\Gamma & z_\Gamma & 1 \\ x_\Delta^2+y_\Delta^2+z_\Delta^2 & x_\Delta & y_\Delta & z_\Delta & 1 \end{vmatrix} \quad 5\times 5$$

11/6

Κωνικές Επιφάνειες

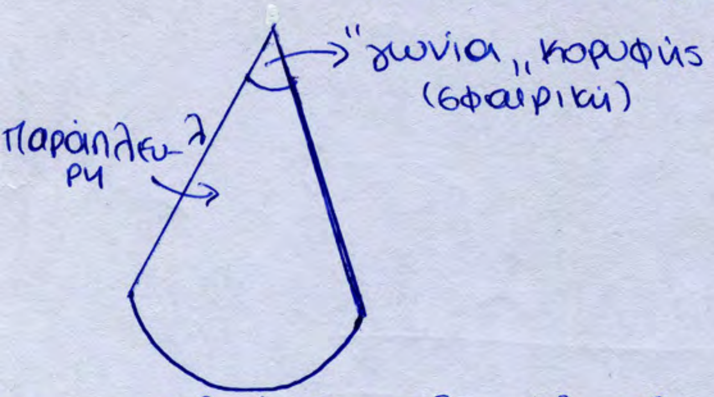


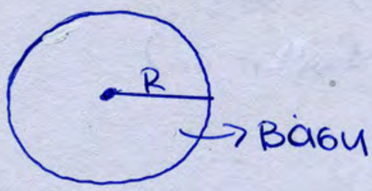
2> Η έννοια του κώνου:

- Ευκλείδης: περιστροφή ορθογωνίου τριγώνου γύρω από μια κάθετη πλευρά του.

Ορολογία:
- Κορυφή (Κ)
- γενέτειρες (ΚΡ)
- βάση (κύκλος)
- παράπλευρη επιφάνεια (όλες οι γενέτειρες)

Παρατηρήσεις:
- είναι πεπερασμένος
- έχει ανάπτυγμα





$$E_{\pi\alpha\rho} = \pi R^2 + \frac{1}{2}(2\pi R)\lambda = \pi R^2 + \pi R\lambda = \pi R(R+\lambda)$$

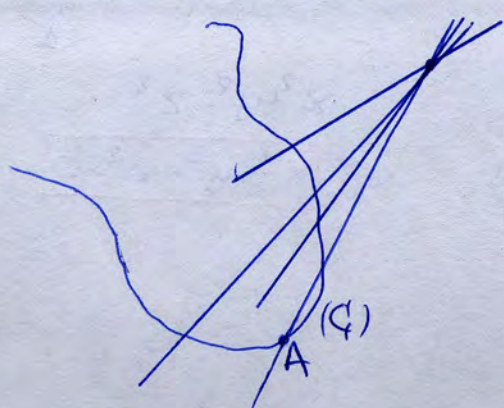
$$V = \frac{1}{3} E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} \cdot h = \frac{1}{3}(\pi R^2 h)$$

Στην αναλυτική γεωμετρία του χώρου:

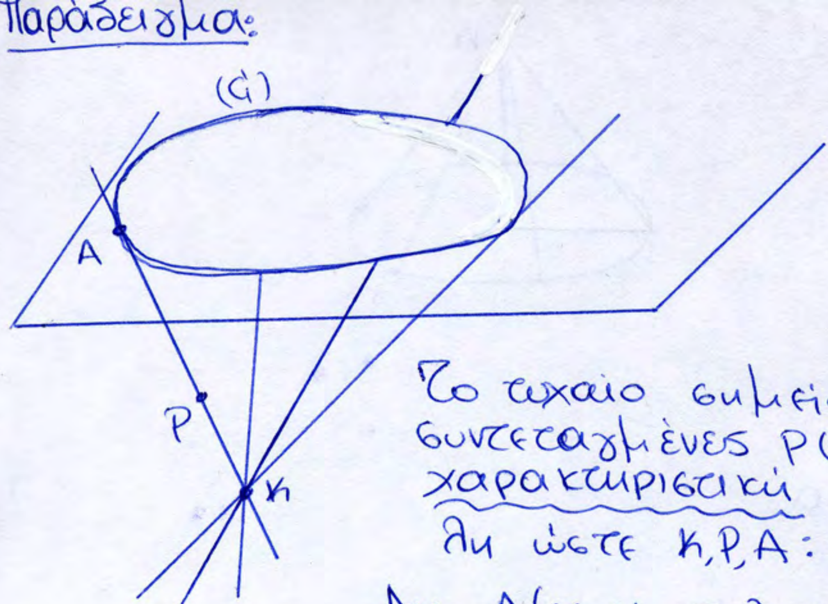
Κωνικές επιφάνειες $\longrightarrow$ μη πεπερασμένες

Πως παράγεται? $\longrightarrow$ κορυφή
$\longrightarrow$ οδηγό καμπύλη

Κάθε σημείο της καμπύλης Α και η κορυφή Κ ορίζουν μια ευθεία. Όλες αυτές οι ευθείες στο χώρο ορίζουν μια κωνική επιφάνεια της οποίας είναι γενέτειρες



Παράδειγμα:



$K(0,0,0)$

$(C)\begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ Προσοχή!

$(C)\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

Το τυχαίο σημείο P της επιφάνειας θα έχει συντεταγμένες $P(x,y,z)$ αλλά και μια χαρακτηριστική ιδιότητα. Υπάρχει A στην καμπύλη ώστε K, P, A: συνευθειακά.

Αν $A(x_1,y_1,z_1) \Rightarrow \vec{KP}=t\vec{KA},\ t\in\mathbb{R}$

$K(x_0,y_0,z_0)$

$\vec{KP}=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$

$\vec{KA}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0)$

$x-x_0=t(x_1-x_0)$

$y-y_0=t(y_1-y_0)$

$z-z_0=t(z_1-z_0)$

$(x_1,y_1,z_1)\in C \begin{cases} f_1(x_1,y_1,z_1)=0 \\ f_2(x_1,y_1,z_1)=0 \end{cases}$

(t,x_1,y_1,z_1) με απαλοιφή

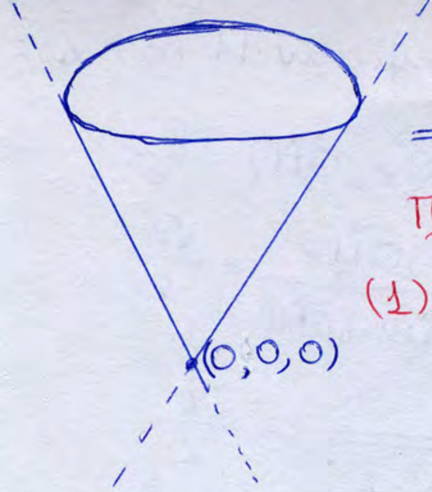
$\Rightarrow F(x,y,z)=0 \rightsquigarrow$ εξίσωση της κωνικής επιφάνειας

Επανερχόμενοι στο παράδειγμα $\begin{cases} K(0,0,0) \\ z_1=1 \\ x_1^2+y_1^2=1 \end{cases}$

Τελικά:
$$\left.\begin{array}{l} x-0=t(x_1-0) \\ y-0=t(y_1-0) \\ z-0=t(z_1-0) \\ z_1=1 \\ x_1^2+y_1^2=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} z=t \\ x=zx_1 \\ y=z\cdot y_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2=z^2x_1^2 \\ \oplus\ y^2=z^2y_1^2 \\ \hline x^2+y^2=z^2\underbrace{(x_1^2+y_1^2)}_{=1} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=z^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2-z^2=0}$$



$\Rightarrow \boxed{x^2+y^2-z^2=0}$ παριστάνει κώνο! Με κορυφή το $O(0,0,0)$ την αρχή των αξόνων.

Παρατηρήσεις: (σχετικά με τη μορφή της εξίσωσης)

(1) Είναι ομογενής 2ου βαθμού

$$\left.\begin{array}{l} x \to \lambda x,\ y \to \lambda y,\ z \to \lambda z \\ F(x,y,z) \to \lambda^2 (x,y,z) \end{array}\right\}$$

(2) Συμμετρική ως προς $O(0,0,0)$ (ως προς κέντρο)

(3) Είναι πολυωνυμική 2ου βαθμού 3-μεταβλητών

Κάποιες παρατηρήσεις: $x^2+y^2-z^2=0$

• Τομή με επίπεδα:

π.χ.1) $x+y+z=1$ (Π)

Βρίσκω τα κοινά σημεία:

$$\left.\begin{array}{l} z = 1-x-y \\ z^2 = 1+x^2+y^2-2x-2y+2xy \\ x^2+y^2-z^2 = -2xy+2x+2y-1 \\ x^2+y^2-z^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2xy+2x+2y-1=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{2xy-2x-2y+1=0}$$ καμπύλη στο (Π)

→ Τι παριστάνει?

$$(x, y, 1)\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} J_1 = 0 \\ J_2 = -1 < 0 \\ J_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 (\neq 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Υπερβολή}$$

π.χ.2) $x=1$

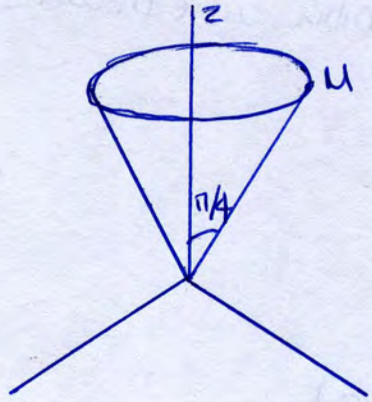
$$1+y^2-z^2=0 \Rightarrow -\frac{y^2}{1}+\frac{z^2}{1}=1 \ (\rightsquigarrow \text{Υπερβολή})$$

Αλλάζοντας επίπεδα παίρνω όλες τις κωνικές!

• Για να βρει παραβολή πρέπει να τέμνει κάθετα μία γενέτειρα (π.χ. την $x=y=z$)

Άσκηση (απλή μορφή):

Δίδεται $O(0,0,0)$ και ζητείται ο Γ.Τ. των σημείων M του χώρου ώστε $(\widehat{\vec{Oz},\vec{OM}}) = \pi/4$



$$\left.\begin{array}{l}\vec{Oz} \longrightarrow (0,0,1)\\ \vec{OM} \longrightarrow (x,y,z)\end{array}\right\}$$

$$\text{συν}(\vec{Oz},\vec{OM}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\langle \vec{Oz},\vec{OM}\rangle}{\|\vec{OM}\|\cdot\|\vec{OM}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{z}{1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2+y^2-z^2=0$$

Κώνος κορυφής $O(0,0,0)$
και οδηγός κορυφής?
παίρνουμε την τομή μ' ένα επίπεδο:

$$\left.\begin{array}{l} z=1\\ x^2+y^2=1\end{array}\right\} (C) \longrightarrow \text{κύκλος στο επίπεδο } z=1$$

Ερώτημα: Πότε μία πολυωνυμική εξίσωση 2ου βαθμού παριστάνει κώνο; $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta xy+\varepsilon yz+\zeta zx+\kappa x+\lambda y+\mu z+\nu=0$

Τότε και μόνο τότε, αν $\exists$ $\boxed{\text{κατάλληλη μεταφορά}}$ ώστε στο νέο σύστημα η εξίσωση να καθίσταται ομογενής.

π.χ.) $x^2-4y^2-2z^2+4yz+4z-4=0$ να εξετάσουμε αν παριστάνει κωνική επιφάνεια.

αναζητώ (x_0,y_0,z_0),
$$x \longrightarrow x'+x_0$$
$$y \longrightarrow y'+y_0 \qquad F(x',y',z') \text{ ομογενής}$$
$$z \longrightarrow z'+z_0$$

Ξαναγράφω την εξίσωση:

$$\left.\begin{array}{l}
x^2 = x'^2+2x'x_0+x_0^2\\
-4y^2 = -4y'^2-8y'y_0-4y_0^2\\
-2z^2 = -2z'^2-4z'z_0-2z_0^2\\
yz = 4y'z'+4y'z_0+4z'y_0+4y_0z_0\\
4z = 4z'+4z_0\\
-4=-4
\end{array}\right\} \overset{\oplus}{\Longrightarrow}
\begin{array}{l}
x'^2-4y'^2-2z'^2+4y'z'+\\
+2(x_0)x'+(-8y_0+4z_0)y'+\\
+(-4z_0+4 \quad +4)z'+\\
+(x_0^2-4y_0^2-2z_0^2+4y_0z_0+4z_0-\\
-4)=0
\end{array}$$

$2x_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0$

$-8y_0 + 4z_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 2y_0,\ z_0 = 2$

$-4z_0 + 4y_0 + 4 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$

$x_0^2 - 4y_0^2 - 2z_0^2 + 4y_0 z_0 + 4z_0 - 4 = 0$

Απαιτώ να είναι συμβιβαστό

$0^2 - 4\cdot 1^2 + 2(2)^2 + 4\cdot 1\cdot 2 + 4\cdot 2 - 4 = 0$

Συμπέρασμα: Στο νέο σύστημα: $\boxed{x'^2 - 4y'^2 - 2z'^2 + 4y'z' = 0}$

Είναι κωνική επιφάνεια ομογενή $2^{ου}$ βαθμού

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + x_0 = x' + 0 \\ y &= y' + y_0 = y' + 1 \\ z &= z' + z_0 = z' + 2 \end{aligned}\right\} K(0,1,2) \text{ ως προς } x,y,z$$

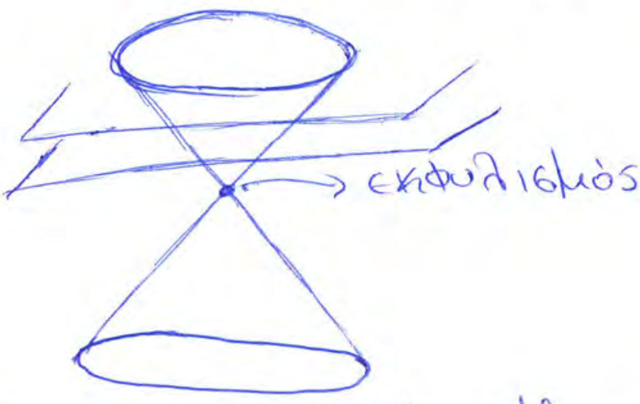
(x', y', z')

(π.χ.) Τομή με το επίπεδο: $z = 0$

$x^2 - 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ (Υπερβολή)

Για να απαλλαγώ από τα $y'z'$ κάνω στροφή!
απομονώνω $-4y'^2 - 2z'^2 + 4y'z' = 0$ και κάνω στροφή

Σχόλιο:



$f(x,y,z)$

$\left(\frac{df}{dx}, \frac{df}{dy}, \frac{df}{dz}\right) = (0,0,0)$

$\frac{df}{dx} = 2x$

$\frac{df}{dy} = -8y + 4z$

$\frac{df}{dz} = -4z + 4y + 4$

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 0 \\ -8y + 4z &= 0 \\ -4z + 4y + 4 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 0 \\ z &= 2y = 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

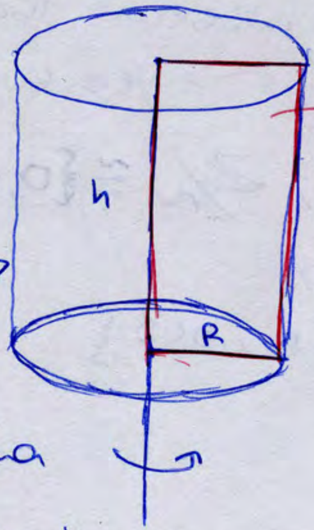
$\Downarrow$

$K(0,1,2)$

13/6 Ο Κύλινδρος - Κυλινδρικές επιφάνειες:

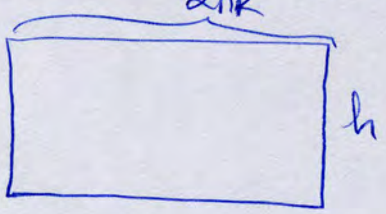
Συνθετικά: (- Συνολοθεωρητικά - Αναλυτικά)

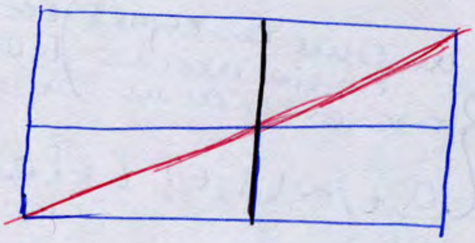
→ (Ευκλείδης)

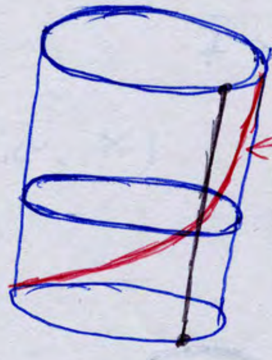


Βασικό: Υπάρχει ανάπτυγμα

Θεμελιώδης ιδιότητα: Τα μήκη και οι γωνίες διατηρούνται.







Πόρισμα: Ποιές είναι οι καμπύλες που τοπικά υλοποιούν την απόσταση;
(έλικα, ευθεία, κύκλος)

Υπάρχουν τύποι για το εμβαδόν κ' τον όγκο

$$E_{ολ} = E_{παρ} + 2E_{βασ} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi R(R+h)$$

$$V = E_B \cdot h = \pi R^2 \cdot h$$

Κύλινδρος - Σφαίρα - Κώνος

$$V_{σφ} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$V_{κυλ.} = \pi R^2 2R = 2\pi R^3$$

$$V_{κων} = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot 2R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

• Πως από δοσμένα σύνολα προκύπτουν νέα σύνολα?

π.χ. Μέσω σχέσεων ισοδυναμίας

$A \neq \emptyset$, $\sim$ σχέση ισοδυναμίας στο A

$A/\sim$ = το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας
χώρος πηλίκων $\rightsquigarrow$ νέο σύνολο

$\mathbb{Z}$, $x \sim y \iff x-y = \text{πολ}3$, $\mathbb{Z}/\sim \cong \{0,1,2\} \equiv \mathbb{Z}_3$

π.χ. Το καρτεσιανό γινόμενο:

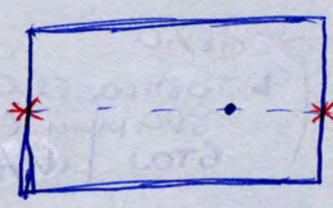
$$\underbrace{A \times B}_{\hookrightarrow \text{ νέο σύνολο}} = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \rightarrow \boxed{\text{επίπεδο}}$

$\uparrow$ ευθεία γραμμή

Κατασκευή του Κυλίνδρου:

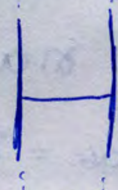
$I = [0,1]$, $I \times I$



$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \begin{cases} \text{αν είναι εσωτερικά σημεία ακριβώς τότε αν είναι ίσα} \ \Big) \text{ στο } [0,1) \times (0,1] \text{ η ισότητα} \\ (0,t) \sim (1,t),\ t \in [0,1] \end{cases}$

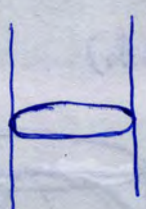
$I \times I/\sim \implies$

• (2ος τρόπος) Με μια μικρή παραλλαγή:



λωρίδα

$\mathbb{R} \times [0,1]$
με παρόμοια σχέση



$\implies$ "άπειρος" κύλινδρος

• (3ος τρόπος) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(t_1, s_1) \sim (t_2, s_2) \iff t_1 - t_2 = \text{ακέραιος}$
$s_1 = s_2$

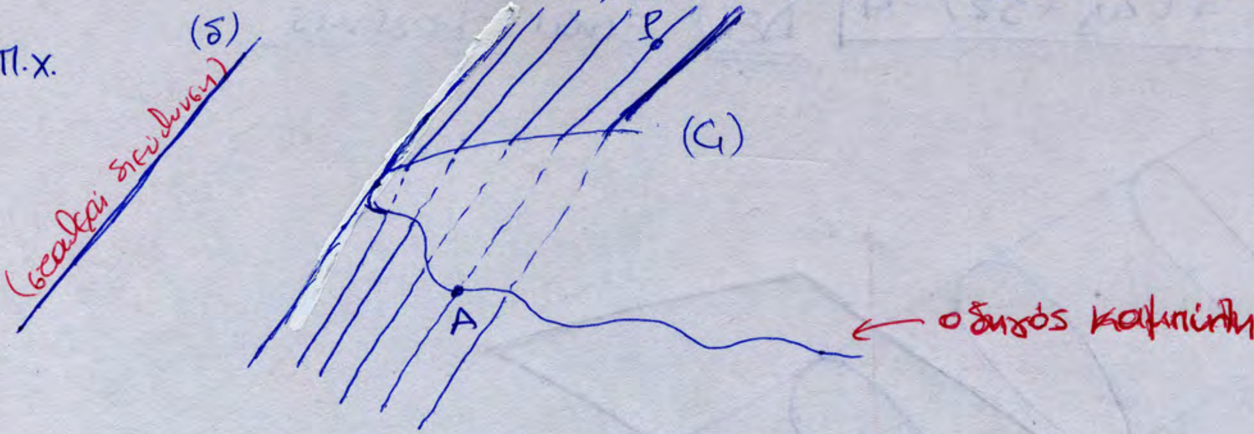
2▸ Αναλυτική Προσέγγιση (Πως παράγεται μία κυλινδρική επιφάνεια!)

1) Οδηγός καμπύλη
2) Σταθερή διεύθυνση

} Η γενέτειρα διατρέχει την οδηγό καμπύλη μένοντας παράλληλη προς τη σταθερή διεύθυνση.

$\Longrightarrow$ Έτσι προκύπτει μία επιφάνεια

Π.χ.



$$(C) \Rightarrow \begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}$$

$$(\delta) \Rightarrow \vec{u} = \text{σταθερό} \neq \vec{0}$$

$$\forall P \in (S),\ \exists!\ A \in (C) \text{ ώστε } \vec{PA} = t\vec{u},\ t \in \mathbb{R}$$

$(S) \to$ κυλινδρική επιφάνεια

Παράδειγμα (1):

$$(C)\begin{cases} 3x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases} \rightsquigarrow \text{έλλειψη στο } xOy$$

$\Downarrow$

"ελλειπτικός κύλινδρος"

$$\vec{u} = (1,-3,2)$$

(S)? (ποια είναι η κυλινδρική επιφάνεια;)

$P \in (S)$, $P(x,y,z)$, $\exists! A(x_1,y_1,z_1)$: $\vec{PA} = t\vec{u}$, $A \in (C)$

$$\Leftrightarrow (x_1-x,\ y_1-y,\ z_1-z) = (t, -3t, 2t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x = t \\ y_1 - y = -3t \\ z_1 - z = 2t \end{cases} \oplus \begin{cases} A \in (C) \\ z_1 = 0 \\ 3x_1^2 + y_1^2 = 1 \end{cases}$$

Απαλοιφή! (των t, x_1, y_1, z_1)

$$z_1 = 0 \Rightarrow -z = 2t \Rightarrow t = -\frac{z}{2}$$

$$x_1 = x + t = x - \frac{z}{2}$$

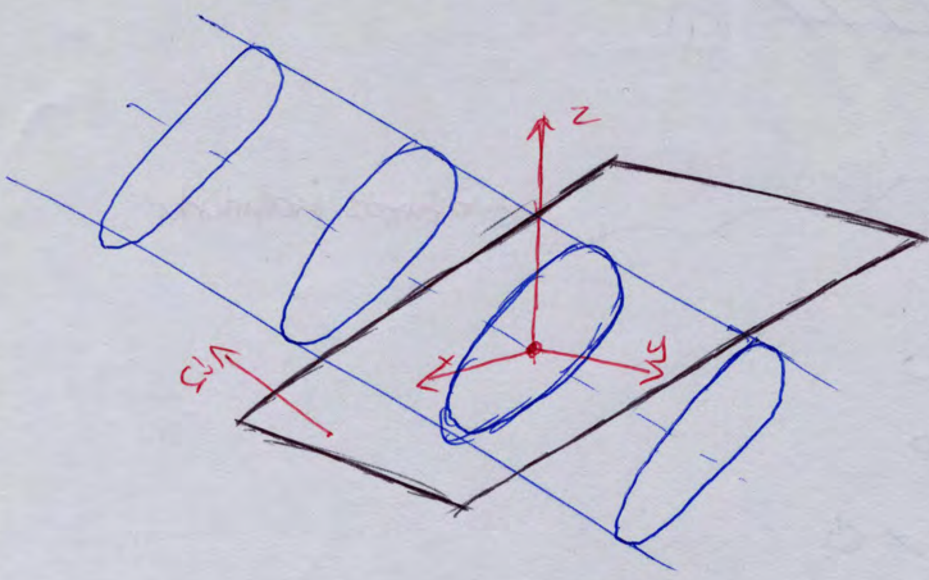
$$y_1 = y - 3t = y + 3\cdot\frac{z}{2}$$

$3x_1^2 + y_1^2 = 1$

$3\left(x - \frac{z}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}z\right)^2 = 1$

$3\frac{(2x-z)^2}{4} + \frac{(2y+3z)^2}{4} = 1$

$\boxed{3(2x-z)^2 + (2y+3z)^2 = 4}$ Είναι δευτεροβάθμια αλλά <u>ΔΕΝ</u> είναι ομογενής

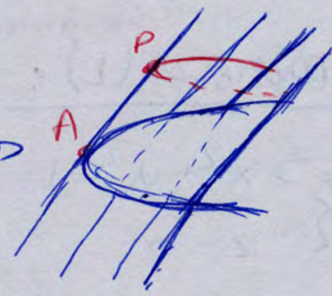


Παράδειγμα (2):

$(C)\begin{cases} y^2 = 2px \\ z = 0 \end{cases}$ παραβολή στο xOy

⇓

"παραβολικός κύλινδρος" ⇝



$\vec{u}(1,2,3)$

Όμοια με προηγούμενως:

$P(x, y, z)$

$A(x_1, y_1, z_1)$

$\vec{AP} = t\cdot\vec{u}$

$\left.\begin{array}{l} x - x_1 = t \\ y - y_1 = 2t \\ z - z_1 = 3t \\ z_1 = 0 \\ y_1^2 = 2px_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$z = 3t \Leftrightarrow t = \frac{z}{3}$

$x_1 = x - t = x - \frac{z}{3}$

$y_1 = y - 2t = y - \frac{2}{3}z$

$y_1^2 = 2px \Leftrightarrow \left(y - \frac{2z}{3}\right)^2 = 2p\left(x - \frac{z}{3}\right)$

$(3y - 2z)^2 = 6p(3x - z)$

$9y^2 + 4z^2 - 12yz = 18px - 6pz$

$\Leftrightarrow \boxed{9y^2 + 4z^2 - 12yz - 18px + 6pz = 0}$

• (Π): $x=z$: Τομή με το $9y^2+4x^2-12yx-18px+6px=0$

$$4x^2+9y^2-12xy-12px=0$$

$$(x,y)\begin{pmatrix}4&-6\\-6&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$J_1=13$$

$$J_2=4\cdot4\cdot9-12^2=144-144=0 \Rightarrow \text{Υπερβολή}$$

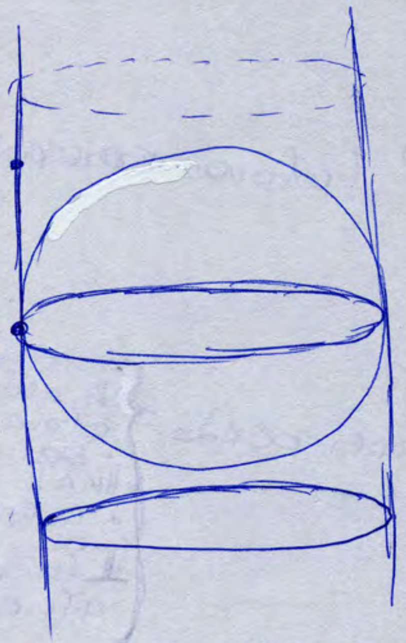
Άσκηση: Ν.Β. Κύλινδρος που να εφάπτεται σφαίρας!

⟺ Κατά μέγιστο κύκλο γιατί αλλιώς θα εφάπτεται κώνος!!

π.χ. $x^2+y^2+z^2=1$ (Σ)

Μέγιστος κύκλος: $\underbrace{(x+y+z=0)}_{(\Pi)}\cap(\Sigma)$

(τομή: επιπέδου και σφαίρας που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας)



? $\vec{u}\perp(\Pi)$, π.χ. $\vec{u}(1,1,1)$

$\vec{PA}=t\vec{u}$

$x-x_1=t$

$y-y_1=t$

$z-z_1=t$

$x_1+y_1+z_1=0$

$x_1^2+y_1^2+z_1^2=1$ ①

$$(x+y+z)-\underbrace{(x_1+y_1+z_1)}_{=0}=3t$$

$$x+y+z=3t \Rightarrow t=\frac{x+y+z}{3}$$

$$x_1=x-t=x-\frac{x+y+z}{3}=\frac{2x-y-z}{3}$$

$$y_1=\frac{-x+2y-z}{3}$$

$$z_1=\frac{-x-y+2z}{3}$$

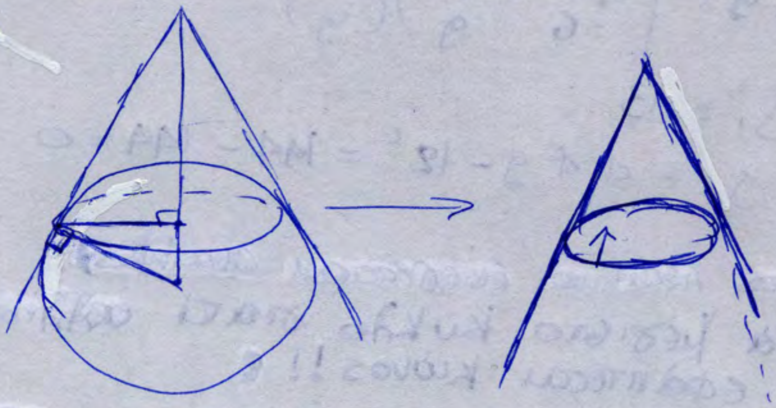
Αντικαθιστούμε στην ① ⟹

$$(2x-y-z)^2+(-x+2y-z)^2+(-x-y+2z)^2=9$$

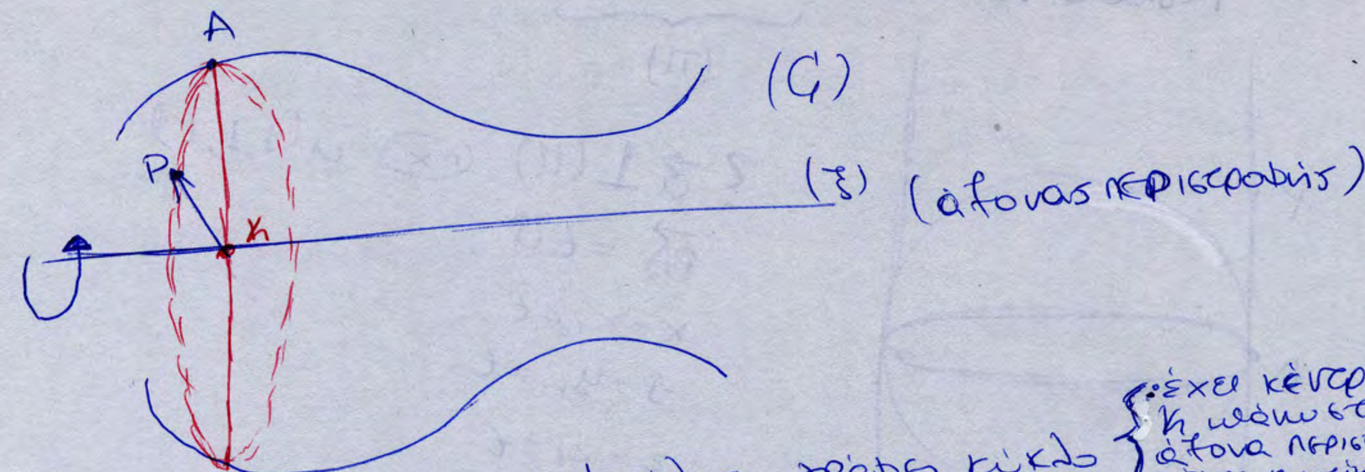
Είναι της μορφής: $ax^2+by^2+\gamma z^2+\delta xy+\varepsilon yz+\zeta zx+\cancel{\kappa x}+\cancel{\lambda y}+\cancel{\mu z}+\nu=0$

δεν έχει 1ο-βάθμιας

Αν δεν παίρναμε μέγιστο κύκλο αλλά ένα τυχαίο τότε θα είχαμε κώνο κι όχι κύλινδρο!!!



Επιφάνειες εκ Περιστροφής :



Το τυχαίο σημείο A της καμπύλης γράφει κύκλο

- έχει κέντρο K πάνω στον άξονα περιστρ.
- έχει ακτίνα $\|\vec{KA}\|$
- Το επίπεδο του κύκλου είναι $\perp$ (κάθετο) άξονα.

Αν P το τυχαίο σημείο της επιφάνειας που θα προκύψει:

$\|\vec{KP}\| = \|\vec{KA}\|$

$K \in (ξ)$ ⇝ άξονας περιστροφής

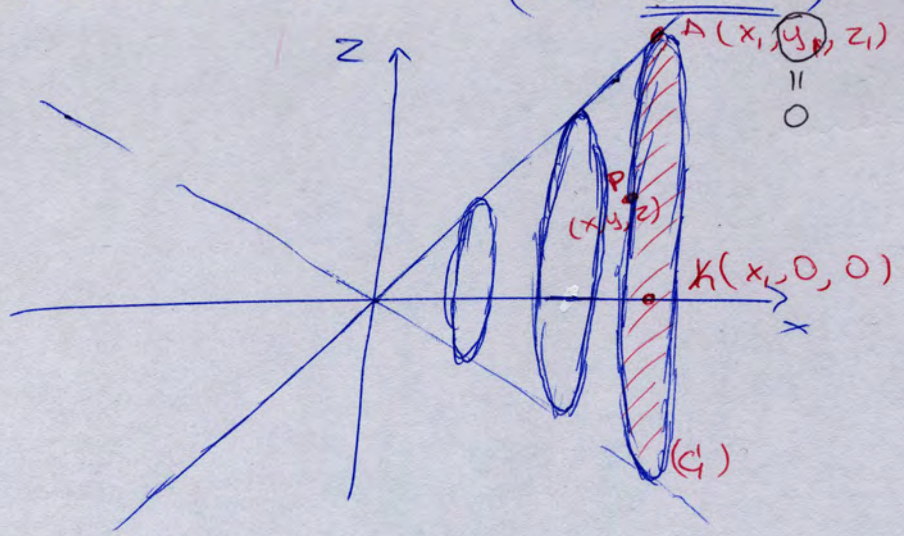
$A \in (G) \begin{cases} f_1(x,y,z)=0 \\ f_2(x,y,z)=0 \end{cases}$

$(\vec{KA} \times \vec{KP}) \parallel \vec{ξ}$

$\Downarrow$

$F(x,y,z)=0$

Στο επίπεδο xOz παίρνω την $x=z$ κ' την περιστρέφω γύρω από τον $x'x$ ($\Longrightarrow$ Κώνος)



$$|\vec{KP}|^2 = |\vec{KA}|^2$$

$$(x-x_1)^2 + y^2 + z^2 = z_1^2$$

$$z_1 = x_1$$

$$x = x_1$$

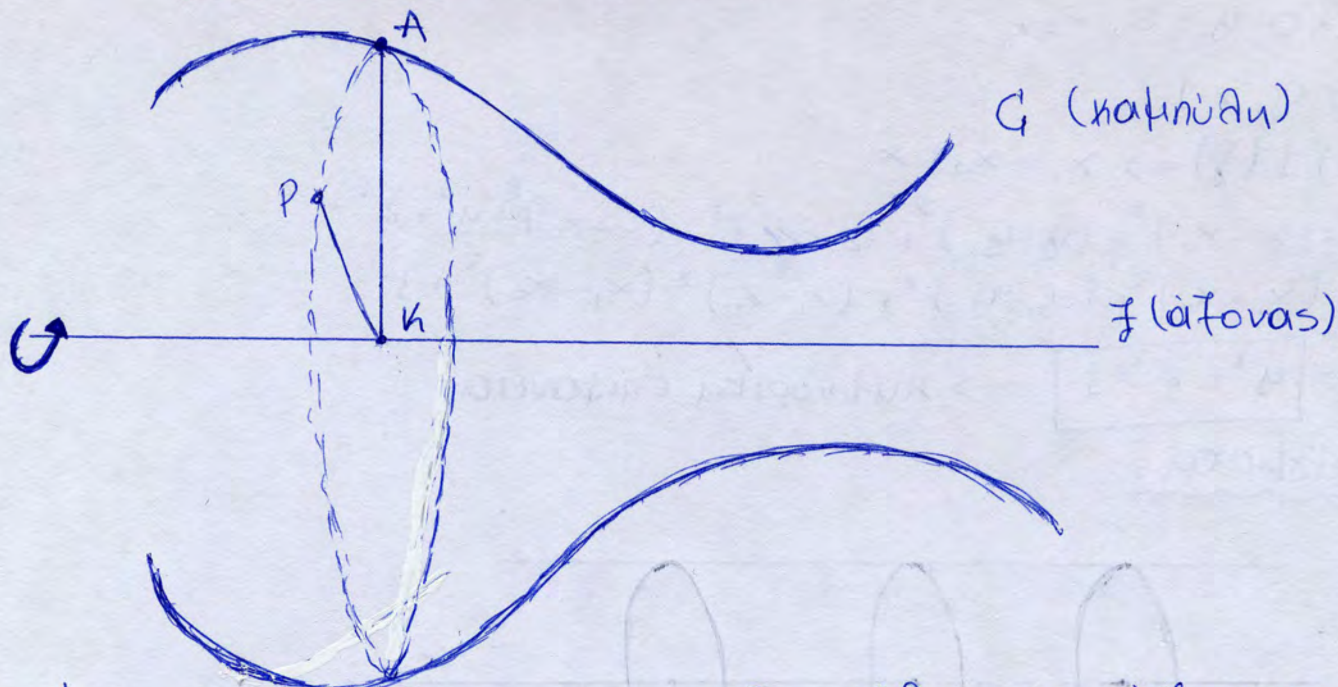
$$y^2 + z^2 = x^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 - y^2 - z^2 = 0}$$

$\hookrightarrow$ Επιφάνεια κώνου

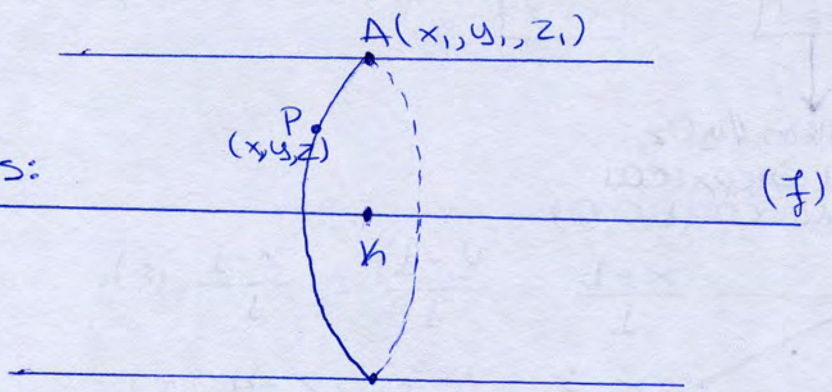
16/6

Επιφάνειες εκ Περιστροφής

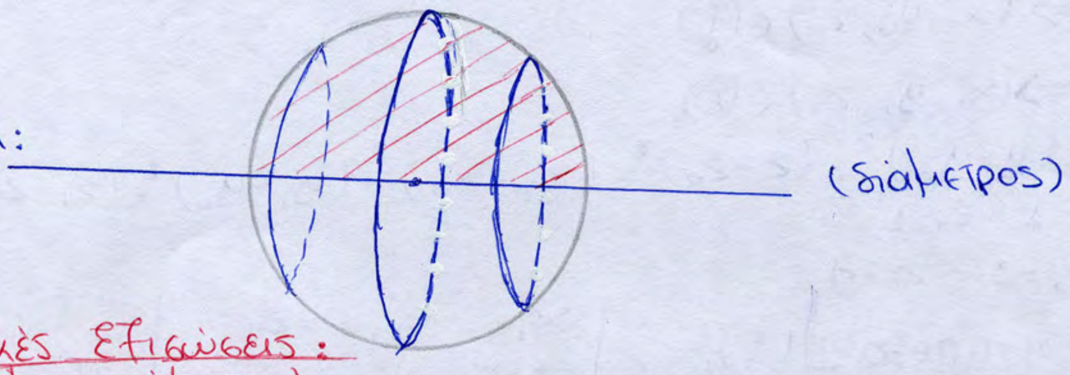


Κάθε σημείο A της (G) διαγράφει κύκλο, κάθετο στον άξονα και με το κέντρο πάνω σ' αυτόν.

κύλινδρος:



σφαίρα:



Αναλυτικές Εξισώσεις:
(σε ειδικά συστήματα)

κύλινδρος: $\zeta \longrightarrow$ άξονας $x'x$ $\{y = z = 0\}$

$(\varepsilon) \longrightarrow$ μια ευθεία στο επίπεδο xOy, // με τον $x'x$
$\{z = 0, y = 1\}$

Για το $P(x, y, z)$, $\exists\, A(x_1, y_1, z_1) \in (\varepsilon)$ και $K(x_0, y_0, z_0) \in (\zeta)$

ώστε $\begin{cases} \|\vec{KP}\| = \|\vec{KA}\| \text{ (ως ακτίνες του ίδιου κύκλου)} \\ \text{το επίπεδο } (PKA) \perp (\zeta) \end{cases}$

$A(z_1=0, y_1=1, x_1)$

$K(z_0=0, y_0=0, x_0)$

$P(x, y, z)$

$(PKA) \perp (\zeta) \Rightarrow x_1 = x_0 = x$

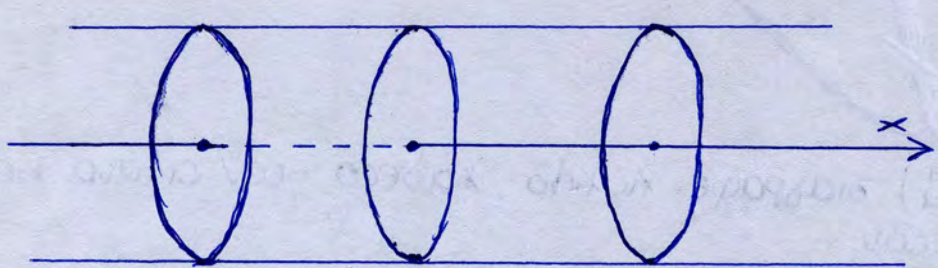
$\|\vec{KP}\|^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = (x-x_0)^2 + y^2 + z^2$

$\|\vec{KA}\|^2 = (x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2 = (x_1-x_0)^2 + 1$

<u>ΑΡΑ</u>: $\boxed{y^2 + z^2 = 1}$ ⟶ κυλινδρική επιφάνεια

<u>Παραδείγματα:</u>

①



$\boxed{x=0}$ ⟶ επίπεδο yOz

$\boxed{x=1}$ ⟶ επίπεδο // yOz και διέρχεται από το (1,0,0)

$\boxed{x=2}$

② Άλλο παράδειγμα

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1} \quad (\varepsilon)$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{1} \quad (\zeta)$$

$K(x_0, y_0, z_0) \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) \in (\zeta)$

$A(x_1, y_1, z_1) \Rightarrow (x_1, y_1, z_1) \in (\varepsilon)$

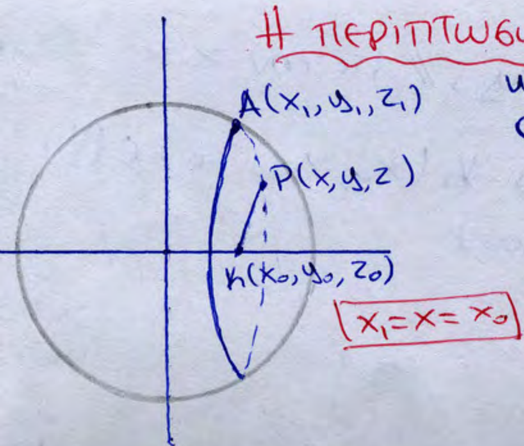
(i) $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = (x_1-x_0)^2 + (y_1-y_0)^2 + (z_1-z_0)^2$

(ii) $x_1 - 1 = y_1 - 1 = z_1 - 1$

(iii) $x_0 - 2 = y_0 - 3 = z_0 - 4$

(iv)/(v) K, P, A: συνεπίπεδα $\perp (\zeta) \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

<u># περίπτωση της σφαίρας:</u>



ημι(κύκλιο) στο xOy και θα περιστραφεί γύρω από διάμετρο

$$\begin{cases} (C_1): \left\{ \begin{array}{l} x^2+y^2=R^2 \\ z=0 \end{array} \right\} \\ (\zeta): \{ y=z=0 \} \end{cases}$$

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2$$

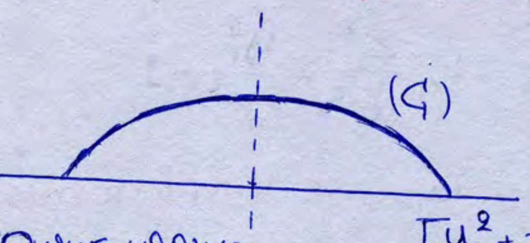
$$\Rightarrow \boxed{y^2+z^2=y_1^2}$$

$$y_1^2+x_1^2=R^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1^2=R^2-x_1^2=R^2-x^2}$$

Άρα: $\boxed{y^2+z^2=R^2-x^2} \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2=R^2}$ σφαίρα κέντρου $O(0,0,0)$ και ακτίνα R.

Ελλειψοειδές εκ περιστροφής



$$(C)\left\{\begin{matrix}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{matrix}\right\}$$

$$(\xi)\ \{y=z=0\}$$

Όπως πριν:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1}_{\text{ελλειψοειδές εκ περιστροφής}}$$

$$\left[\begin{matrix}y^2+z^2=y_1^2\\ \frac{y_1^2}{b^2}+\frac{x_1^2}{a^2}=1\\ x=x_1\end{matrix}\right]$$

$$\frac{y^2+z^2}{b^2}=\frac{y_1^2}{b^2}=1-\frac{x_1^2}{a^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

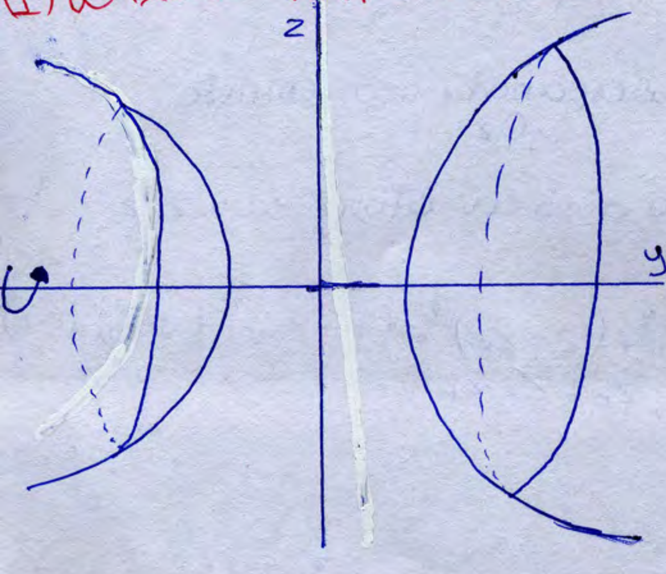
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1}$$

(Τυχαίο) ελλειψοειδές ($\longrightarrow$ έχει πολύ γεωμετρία)

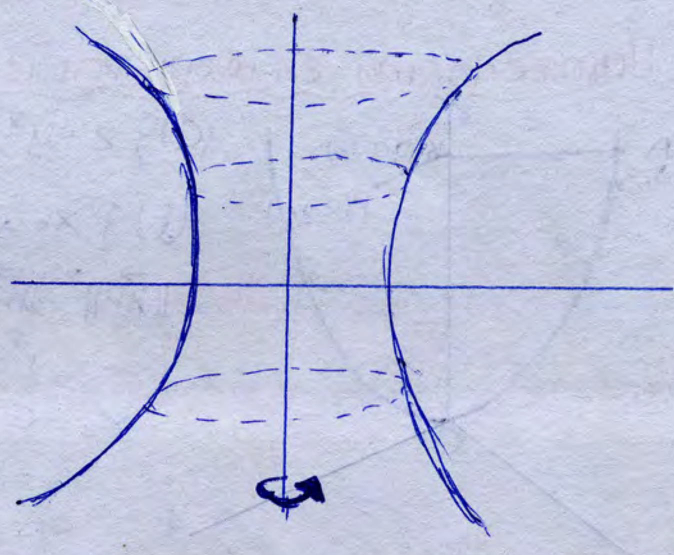
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1}$$

Υπερβολοειδή εκ περιστροφής: Μία υπερβολή περιστρέφεται γύρω από τους άξονες τότε προκύπτουν δύο διαφορετικά σχήματα.

(I) Δίχωνο Υπερβολοειδές:



(II) Μονόχωνο Υπερβολοειδές:



(I): $(C)\left\{\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1,\ x=0\right\}$

$(\xi)\{x=z=0\}$

$K(x_0,y_0,z_0),\ x_0=z_0=0$

$A(x_1,y_1,z_1),\ x_1=0$

$\|\vec{KP}\|^2=\|\vec{KA}\|^2,\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2$

$y_1=y=y_0$

Άρα: $x^2+z^2=z_1^2 \Longrightarrow \dfrac{x^2+z^2}{b^2}=\dfrac{z_1^2}{b^2} \Longrightarrow \dfrac{y_1^2}{a^2}-\dfrac{z_1^2}{b^2}=1,\ \dfrac{z_1^2}{b^2}=\dfrac{y_1^2}{a^2}-1$

$\dfrac{x^2+z^2}{b^2}=\dfrac{y^2}{a^2}-1 \Longrightarrow \boxed{\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1} \longrightarrow$ Δίχωνο Υπερβολοειδές

(II): $(C)\left\{\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1,\ x=0\right\}$

$(\xi)\{x=y=0\}$ (ο άξονας $z'z$)

$\|\vec{KA}\|^2=\|\vec{KP}\|^2$ $[K(x_0,y_0,z_0)\to K(0,0,z_0),\ P(x,y,z),\ A(x_1,y_1,z_1),\ x_1=0,$
$z=z_0=z_1\ ]$

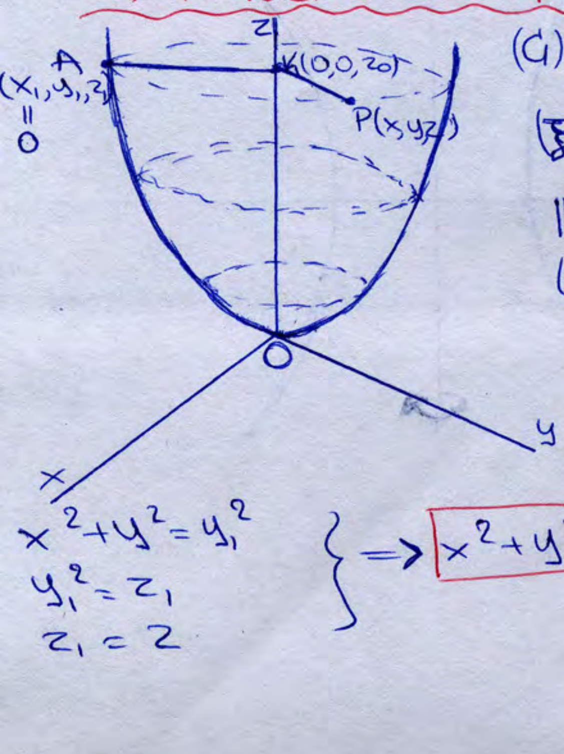
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2$

$\Longrightarrow x^2+y^2=y_1^2 \Longrightarrow \dfrac{x^2+y^2}{a^2}=\dfrac{y_1^2}{a^2}$

$\dfrac{y_1^2}{a^2}-\dfrac{z_1^2}{b^2}=1$

$\left.\right\} \Longrightarrow \boxed{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{b^2}=1} \longrightarrow$ Μονόχωνο Υπερβολοειδές

Παραβολοειδή εκ περιστροφής:



$(C)\{z=y^2,\ x=0\}$ παραβολή στο επίπεδο yOz

$(\xi)\{x=y=0\}$ γύρω από τον άξονα των $z'z$

$\|\vec{KP}\|^2=\|\vec{KA}\|^2$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2$

$x_0=0,\ y_0=0,\ z_0=z=z_1$

$x_1=0$

$z_1=y_1^2$

$x^2+y^2=y_1^2$

$y_1^2=z_1$

$z_1=z$

$\left.\right\} \Longrightarrow \boxed{x^2+y^2=z}$ (δεν είναι όλοι οι όροι ίδιου βαθμού)

Παρατηρήσεις: (Πώς αυτά συνδέονται με συναρτήσεις δύο μεταβλητών)

$(x,y) \xmapsto{f} f(x,y) = x^2+y^2$

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$G_f \subseteq (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}) = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y)\}$

$G_f = \{(x,y,z) \mid z = x^2+y^2\}$ παραβολοειδές

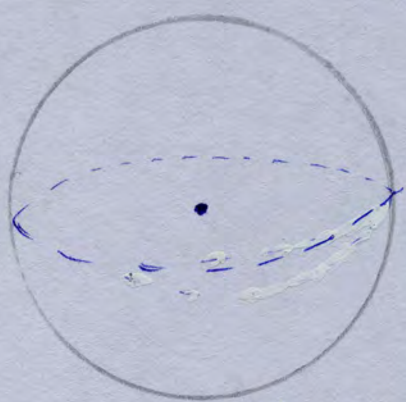
$\boxed{\text{Επιφάνειες} \longleftrightarrow \text{συνδέονται με γραφήματα συναρτήσεων 2 μεταβλητών.}}$

Δεν είναι σωστό ότι είναι ΟΛΙΚΑ γραφήματα. (Μόνο ΤΟΠΙΚΑ γίνεται η περιγραφή χρειάζεται σύνολο 6- εξισώσεις)

π.χ. σφαίρα: $x^2+y^2+z^2 = R^2$

$\iff x^2 = R^2-y^2-z^2$

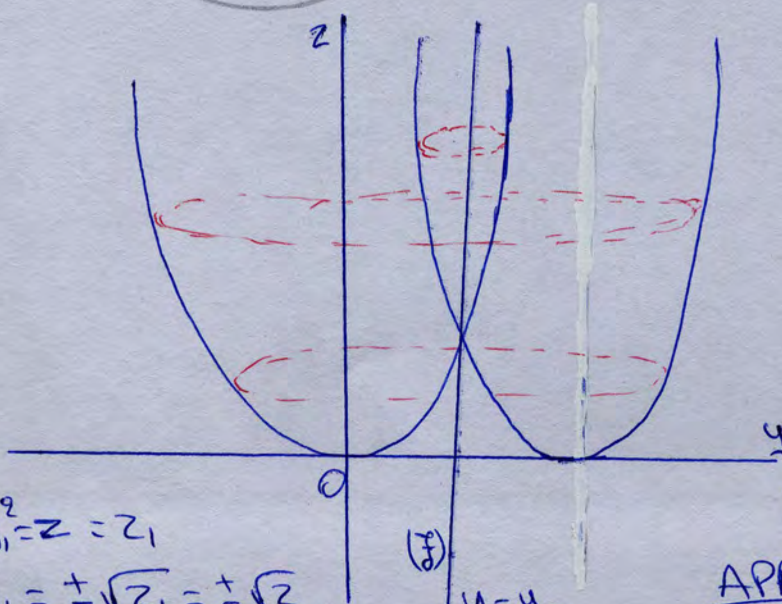
$\iff x = \sqrt{R^2-y^2-z^2}\ ,\ x = -\sqrt{R^2-y^2-z^2}$



$(x,y) \longrightarrow \sqrt{1-x^2-y^2}$

$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$



$\{y^2 = z,\ x = 0\}$

$\left\{\begin{matrix} x = 0 \\ y = 1 \end{matrix}\right\}$

$K(0,1,z_0)$

$P(x,y,z)$

$A(x_1,y_1,z_1) = A(0,y_1,z_1)$

$z = z_0 = z_1$

$\|\vec{KP}\|^2 = x^2+(y-1)^2$

$\|\vec{KA}\|^2 = (x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2 = (y_1-1)^2$

ΑΡΑ: $x^2+(y-1)^2 = (y_1-1)^2$

$\iff \boxed{x^2+(y-1)^2 = z+1\pm 2\sqrt{z}}$

$y_1^2 = z = z_1$

$y_1 = \pm\sqrt{z_1} = \pm\sqrt{z},\ z>0$

$(y_1-1)^2 = (\pm\sqrt{z}-1)^2 = z\pm 2\sqrt{z}+1$

$\boxed{18/6}$ **Η δευτεροβάθμια εξίσωση στο χώρο:**

$$\underbrace{a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xz}_{\text{2-βάθμιοι όροι}}+\underbrace{2a_{41}x+2a_{42}y+2a_{43}z}_{\text{1-βάθμιοι όροι}}+\underbrace{2a_{44}}_{\text{σταθερός όρος}}=0 \quad (Ε)$$

$$(x,y,z)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z\end{bmatrix}}_{X}+2(a_{41},a_{42},a_{43})\begin{bmatrix} x \\ y \\ z\end{bmatrix}+a_{44}=0$$

$$A^T=A\ \left\{\begin{matrix} a_{ij}=a_{ji} \\ i,j=1,2,3\end{matrix}\right\}$$

$\boxed{X^TAX+2BX+\Gamma=0}$, $\boxed{X\to(X,1)=Y}$ (τρίτος τρόπος γραφής)

$A^T=A$, B: γραμμή, Γ= σταθερό

$$Y^T\left(\begin{array}{c|c} A & B^T \\ \hline B & \Gamma\end{array}\right)Y=0 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{array}\right)\to M \quad \boxed{M^T=M}$$

$A=A^T$: συμμετρικός

Μελέτη της (Ε) σε ορθοκανονικά συστήματα $\Longleftrightarrow$ Μελέτη (αναγωγή) του M, επιτρεπτοί μετασχηματισμοί

$$X\xrightarrow[\text{στροφ.}]{\text{μεταφ.}}X^*\ \left|\ \begin{matrix} X\to PX+H \\ P\cdot P^T=I\end{matrix}\right.$$

π.χ. σφαίρα: $x^2+y^2+z^2=1$

$$(x,y,z)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-1=0 \quad (A\text{: διαγώνιος, } 3\times 3)$$

κώνος: $x^2+y^2-z^2=0$

$$(x,y,z)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

κύλινδρος: $x^2+y^2=1$

$$(x,y,z)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-1=0$$

Θεώρημα: Κατά την αλλαγή ορθοκανονικών συστημάτων υπάρχουν 4 αναλλοίωτες ποσότητες (Απόδειξη παραλείπεται)

$J_1 = tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

$J_2 = J_{11} + J_{22} + J_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$J_3 = det(A)$

$J_4 = det(M)$

Γεγονός: Οι τιμές των J_1, J_2, J_3, J_4 καθορίζουν πλήρως τη γεωμετρία της (E) (Δηλ. το τι παριστάνει)

2▸ 1ο Συμπέρασμα: Πότε η επιφάνεια έχει κέντρο ($\Leftrightarrow$ Υπάρχει μεταφορά που εξαφανίζει τους πρωτοβάθμιους όρους) και παίρνει τη μορφή:

$ax^2 + by^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$ (π.χ. σφαίρα, κώνος)

Υπάρχει κέντρο $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$ (Δηλ. $J_3 \neq 0$)

Πώς το βρίσκω ??

$\Leftrightarrow$ Λύνω το σύστημα $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = -B$, κέντρο $\rightarrow \left(-(A^{-1})B\right)$

Ερώτηση: Πώς φεύγουν τα xy, yz, xz ?? (αν υπάρχει κέντρο)

Μεταφέρω στη νέα αρχή!

$(x', y', z') A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \Gamma^* = 0$

Βασικό: Αναζητώ P ώστε $P^T A P$ διαγώνιος! [πάντα μπορεί να γίνει αυτή η αναζήτηση αφού ο πίνακας είναι συμμετρικός και P: διαγώνιος] $\rightarrow$

$\rightarrow$ (Θεμελιώδες Θεώρημα Γραμμικής Άλγεβρας)

Άρα στο νέο σύστημα (E) αν $J_3 \neq 0$ γίνεται $ax^2 + by^2 + \gamma z^2 + \delta = 0$

Αν $J_3 = 0$ τότε κάποιο $a, b, \gamma = 0$ (κ) $\exists$ πρωτοβάθμιος όρος

π.χ. $ax^2 + by^2 + kz + \varepsilon = 0 \rightarrow$ παραβολοειδή

Παράδειγμα 1

$$\boxed{5x^2+5y^2-12z^2+2xy-12=0} \quad (E)$$

Βήμα 1ο: Υπολογίζουμε τις αναλλοίωτες της (E)

$$(E) \Leftrightarrow (x,y,z)\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 12 = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$J_1 = tr(A) = 5+5-12 = -2$, $(J_1 = \alpha+\beta+\gamma)$

$J_2 = J_2(12) + J_2(13) + J_2(23) = (25-1) - 60 - 60 = -96$ $(J_2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$J_3 = \det(A) = -288$, $(J_3 = \alpha\beta\gamma)$

$J_4 = \det\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix} = 12 \cdot 288$, $(J_4 = \alpha\beta\gamma\delta)$, όπου $\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta = 0$

α, β, γ: λύσεις εξίσωσης 3ου βαθμού (Τύποι Vietta)

Αφού $J_3 \neq 0$ η επιφάνεια έχει κέντρο

Βήμα 2ο: Λύνουμε τώρα την εξίσωση: $t^3 - J_1t^2 + J_2t - J_3 = 0$, οπότε $\delta = \frac{J_4}{J_3}$

$$t^3 + 2t^2 - 96t - 12 \cdot \underbrace{288}_{3 \cdot 96} = 0$$

ρίζες: $\begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = 6 \\ \gamma = -12 \end{cases}$ και $\{\delta = -12\}$

Βήμα 3ο: Υπάρχει ένα σύστημα αναφοράς ώστε η (E) να παίρνει τη μορφή $4X^2 + 6Y^2 - 12Z^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{2} - Z^2 = 1$$

Συμπέρασμα: Η (E) παριστάνει μονόχωρο (Υπερβολοειδή)

Παράδειγμα 2

(E) $14x^2 + 7y^2 + 7z^2 + 2\sqrt{2}xy - 2\sqrt{2}xz - 14yz - 24\sqrt{2}y - 24\sqrt{2}z = 0$

Βήμα 1ο (E) $\Leftrightarrow (x,y,z)\begin{pmatrix} 14 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 7 & -7 \\ -\sqrt{2} & -7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2(0, -12\sqrt{2}, -12\sqrt{2})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 14 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 7 & -7 \\ -\sqrt{2} & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = (0, -12\sqrt{2}, -12\sqrt{2}) \Rightarrow \begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

$J_1 = 28$, $J_2 = 192$, $J_3 = 0$, $J_4 = -12^3 \cdot 4 \cdot 16$

Βήμα 2 | Αφού $J_3=0$, η (Ε) δεν έχει κέντρο!

Θεωρούμε τώρα την εξίσωση: $t^2 - J_1 t + J_2 = 0$

$\Leftrightarrow t^2 - 28t + 192 = 0$ που έχει ρίζες: $a = 12$, $\beta = 16$

οπότε $a_3^2 = +\frac{J_4}{J_2} = +\frac{12^3 \cdot 4 \cdot 16}{192} \Rightarrow a_3 = \begin{cases} 24 \\ -24 \end{cases}$

Βήμα 3 | Υπάρχει μία αλλαγή συντεταγμένων έτσι ώστε να φτάσουμε στη μορφή: $12(x')^2 + 16(y')^2 - 48(z') + \delta = 0$

Θεωρούμε τώρα: $X = x'$, $Y = y'$ και $Z = z' - \frac{\delta}{48}$

οπότε το καινούριο σύστημα: (Ε) $\Leftrightarrow \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{3} = Z$

Συμπέρασμα: Η (Ε) είναι ένα ελλειπτικό παραβολοειδές