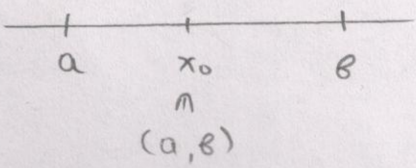
Μάθημα 4'

29/05/2015

§3 Ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ακροτάτων.

Υπενθύμιση

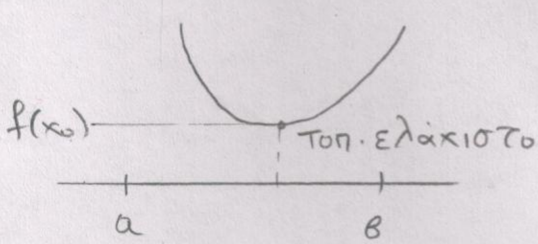


- $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)>0 \Longrightarrow$ τοπικό ελάχιστο

  $f'(x_0)=0$ και $f''(x_0)<0 \Longrightarrow$ τοπικό μέγιστο.

$$f(x)=f(x_0)+\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f'(x_0)}(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0)^2+\underbrace{R_2(x)}_{\text{αμελητέο}}$$

$$f(x)\sim f(x_0)+\frac{1}{2}\underbrace{f''(x_0)}_{>0}(x-x_0)^2$$

- 

Ορισμός Έστω A συμμετρικός πίνακας $m\times m$ και $Q(h)=\underset{\overset{\in}{\mathbb{R}^m}}{h}\cdot A\underset{\overset{\in}{\mathbb{R}^m}}{h}$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή

(i) ο πίνακας A λέγεται θετικά ορισμένος, όταν $Q(h)>0\ \forall h\neq 0$ (Συμβ. $A>0$)

(ii) ο πίνακας A λέγεται αρνητικά ορισμένος, όταν $Q(h)<0\ \forall h\neq 0$ (Συμβ. $A<0$)

(iii) ο πίνακας A λέγεται αόριστος $(m\geq 2)$ όταν $\exists\ h_1,h_2\in\mathbb{R}^m$ τ.ω.

Υπενθύμιση (Άλγεβρα)

Αν A είναι ένας συμμετρικός πίνακας $m\times m$ (με στοιχεία $\in \mathbb{R}$) τότε υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $(h_1, \dots, h_m)$ ιδιοδιανυσμάτων $\mathbb{R}^m$.

$A h_i = \lambda_i h_i \quad \|h_i\| = 1 \quad h_i \cdot h_j = 0 \quad \forall i \neq j$

ιδιοτιμές

Επιπλέον $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_m$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & a_{mm} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{ίχνος}} \operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{mm}.$$

Λήμμα 1

Έστω A συμμετρικός πίνακας $m\times m$ και $Q(h) = h \cdot Ah$

Τότε, αν $A>0$, υπάρχει $a>0$ τ.ω. $Q(h) \geq a \cdot \|h\|^2$, $\forall h \in \mathbb{R}^m$

Λήμμα 2

Έστω $A = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$ συμμετρικός πίνακας με $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Τότε: i) $A>0 \iff \det A > 0$ και $a>0$

ii) $A<0 \iff \det A > 0$ και $a<0$

iii) A αόριστος $\iff \det A < 0$

Θ4) Έστω $U \subset \mathbb{R}^m$ ανοιχτό, $f \in C^2(U, \mathbb{R})$, $x_0 \in U$ και $Hf(x_0)$ ο Εσσιανός πίνακας της f στο x_0.

Τότε (i) αν $\nabla f(x_0) = 0$ και $Hf(x_0) > 0 \Rightarrow$ η f έχει τοπ. ελάχιστο στο x_0

(ii) αν $\nabla f(x_0) = 0$ και $Hf(x_0) < 0 \Rightarrow$ η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0

(iii) αν $\nabla f(x_0) = 0$ και $Hf(x_0)$ αόριστος $\Rightarrow$ η f έχει σάγμα στο x_0.

Απόδειξη

Σύμφωνα με τον τύπο (8) του Κεφαλαίου με τα Θεωρήματα Taylor, έχουμε $f(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2} D^2 f(x_0)(x-x_0) + R_2(x)$

με $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{R_2(x)}{\|x-x_0\|^2} = 0$

Στην Περίπτωση (i) $\underset{Q}{D^2 f(x_0)(x-x_0)} = (x-x_0)\underset{A}{H_f(x_0)}(x-x_0) \geq a\|x-x_0\|^2$

(Βλέπε Λήμμα 1)

Θα φράξουμε επίσης το υπόλοιπο $R_2(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{R_2(x)}{\|x-x_0\|^2} = 0$

$\Longrightarrow -\frac{a}{4}\|x-x_0\|^2 \leq R_2(x) \leq \frac{a}{4}\|x-x_0\|^2$ για $\|x-x_0\| < \delta$ αρκετά μικρό.

$\Longrightarrow f(x) \geq f(x_0) + \frac{a}{2}\|x-x_0\|^2 - \frac{a}{4}\|x-x_0\|^2$

$\Longrightarrow f(x) \geq f(x_0) + \frac{a}{4}\|x-x_0\|^2$ για $\|x-x_0\| < \delta \Longrightarrow$ Τοπικό ελαχ. στο x_0.

Στην Περίπτωση (iii) υπάρχουν $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^m$ τ.ω. $\|h_1\| = \|h_2\| = 1$

$\begin{cases} D^2 f(x_0) h_1 > a \\ D^2 f(x_0) h_2 < -a \end{cases}$ για κάποιο $a > 0$

Εργαζόμαστε όπως προηγουμένως.

Δείχνουμε ότι $f(x_0 + t h_1) \geq f(x_0) + \frac{a}{4}t^2$

$f(x_0 + t h_2) \leq f(x_0) - \frac{a}{4}t^2$ για $|t| < \delta$

$\Longrightarrow$ η f έχει σάγμα στο x_0.

Ασκηση

Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία της $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + 1 - y^2$

$\nabla f(x,y) = \left(4x(x^2-1), -2y\right)$

$\nabla f(x,y) = 0 \iff (x,y) = (0,0)$ ή $(\pm 1, 0)$ (3 κρίσιμα σημεία)

Υπολογίζουμε $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\det Hf(0,0) = 8 > 0$

και $-4 < 0$

(Λήμμα ii)

$\xRightarrow{\qquad} Hf(0,0) < 0 \xRightarrow{\Theta 4} (0,0)$ τοπικό μέγιστο

$Hf(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\det Hf(1,0) = -16 < 0 \xRightarrow{\text{(Λήμμα ii)}} Hf(0,1)$ αόριστος

$\xRightarrow{\Theta 4} (1,0)$ σαγματικό σημείο

Ομοίως, $Hf(-1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (-1,0)$ σαγματικό σημείο.

Ασκηση

Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία της $f(x,y) = (x-5)\log(x\cdot y)$

$x>0,\ y>0$

Απάντηση

$\nabla f(x,y) = \left(\log(x\cdot y) + \frac{x-5}{x}, \frac{x-5}{y}\right)$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \log xy + \frac{x-5}{x} = 0 \\ \frac{x-5}{y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Αρα $(5, \frac{1}{5})$ μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Α' τρόπος $H_f(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{1}{x}+\frac{5}{x^2} & 0 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x-5}{y^2} \end{pmatrix}$

$$H_f(5,\tfrac{1}{5}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det H_f(5,\tfrac{1}{5}) = -25<0 \xRightarrow{\text{Λήμμα ii)}} H_f(5,1/5)$$

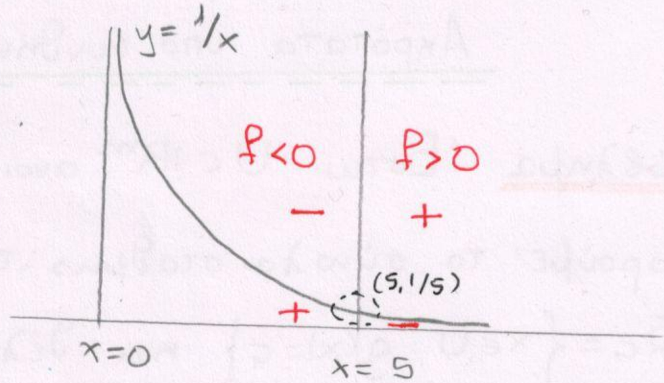
αόριστος

$$\xrightarrow{\Theta 4} (5,\tfrac{1}{5}) \text{ σαγματικό σημείο.}$$

Β' τρόπος $f(5,\frac{1}{5})=0$ Θα μελετήσουμε το πρόσημο της f σε μια περιοχή του $(5,\frac{1}{5})$

Έχουμε $\log xy>0 \iff y>\frac{1}{x}$.

$\Longrightarrow (5,1/5)$ σάγμα.



Άσκηση Θεωρούμε το γράφημα Γ της $g(x,y)=\sqrt{\frac{2}{xy}}$ $x,y>0$

Βρείτε το σημείο του Γ που απέχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων $(0,0,0)$

Απάντηση

$$\Gamma=\left\{\left(x,y,\sqrt{\tfrac{2}{xy}}\right) : x>0,\ y>0\right\}\subset\mathbb{R}^3$$

Έστω $M\in\Gamma$, δηλαδή $M\left(x,y,\sqrt{\frac{2}{xy}}\right)$. Το $d(M,0)=\sqrt{x^2+y^2+\frac{2}{xy}}$

είναι ελάχιστο, όταν $f(x,y)=x^2+y^2+\frac{2}{xy}$ είναι ελάχιστο.

Προσδιορίζουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία της f στο

$\mathcal{U}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0,\ y>0\}$

$\nabla f(x,y)=0 \iff (x,y)=(1,1)$ μοναδικό κρίσιμο σημείο

$f(1,1)=4$

Παρατηρούμε, επίσης ότι $\lim\limits_{\substack{\|(x,y)\|\to+\infty \\ (x,y)\in U}} f(x,y)=+\infty$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ (x,y)\in U}} f(x,y)=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{\substack{y\to 0 \\ (x,y)\in U}} f(x,y)=+\infty$$

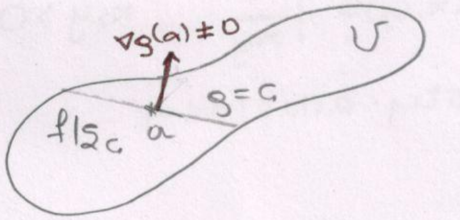
Άρα η f πιάνει το ολικό ελάχιστο της στο $(1,1)$ μοναδικό κρίσιμο σημείο.

Ακρότατα υπό συνθήκη.

Πρόβλημα Έστω $U\subset\mathbb{R}^m$ ανοιχτό, και $f,g\in C^2(U,\mathbb{R})$

Θεωρούμε το σύνολο στάθμης της g με τιμή $c\in\mathbb{R}$

$S_c=\{x\in U: g(x)=c\}$ και θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα του περιορισμού της f στο S_c (Συμβολισμός f_{S_c})



Θ5 Έστω $f,g\in C(U,\mathbb{R})$ και $a\in U$ τ.ω. $g(a)=c$ και $\nabla g(a)\neq 0$

Τότε, αν $f|_{S_c}$ (ο περιορισμός της f στο S_c) έχει τοπικό ακρότατο στο a, ισχύει $\boxed{\nabla f(a)=\underset{\neq 0}{\lambda}\,\underset{\in\mathbb{R}^m}{\nabla g(a)}}$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της $f(x,y) = e^x \cdot \sin y$ περιορισμένης στον μοναδιαίο κύκλο Γ $(g(x,y) = x^2+y^2 = 1)$

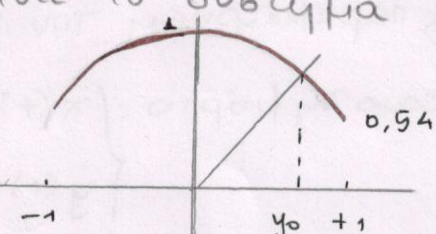
Απάντηση Γνωρίζουμε (Βλέπε Θ1) ότι η f λαμβάνει το ολικό μέγιστο/ελάχιστο της στο Γ (κλειστό, φραγμένο). Σύμφωνα με το Θ5, οι πιθανές θέσεις των ολικών ακροτάτων επιλύουν το σύστημα

$$\begin{cases} \nabla f(x,y) = \lambda \underbrace{\nabla g(x,y)}_{\neq 0} & \text{για κάποιο } \lambda \in \mathbb{R} \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} e^x \sin y = 2\lambda x \\ e^x \cos y = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} e^{2x} \sin^2 y = 4\lambda^2 x^2 \\ e^{2x} \cdot \cos^2 y = 4\lambda^2 y^2 \end{cases} \Longrightarrow e^{2x} = 4\lambda^2$$

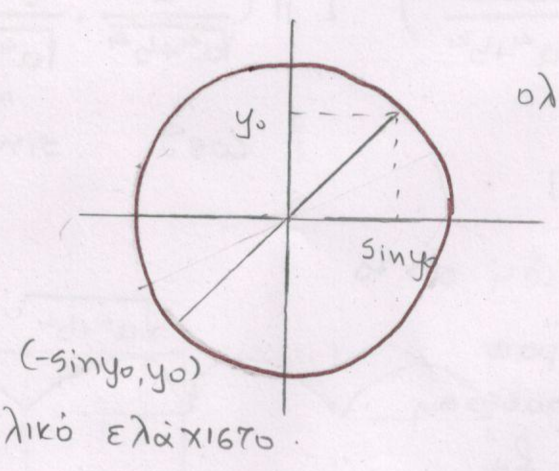
$$\Longrightarrow \boxed{e^x = 2|\lambda|}$$

Αν $\lambda > 0$ τότε το σύστημα γράφεται $\begin{cases} \sin y = x \\ \cos y = y. \end{cases}$



$$\begin{cases} x = \sin y_0 \\ y = y_0 \end{cases}$$

Αν $\lambda < 0$, τότε το σύστημα γράφεται $\begin{cases} \sin y = -x \\ \cos y = -y \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\sin y_0 \\ y = -y_0. \end{cases}$



ολικό μέγιστο

ολικό ελάχιστο.

Συμπέρασμα: Οι πιθανές θέσεις των ολικών ακροτάτων είναι τα σημεία $(\sin y_0, y_0)$ και $(-\sin y_0, -y_0)$

ολ. μέγιστο   ολ. ελάχιστο

Επειδή $f(\sin y_0, y_0) > 0 > f(-\sin y_0, -y_0)$.

Άσκηση: Θεωρείστε τη καμπύλη Γ της $g(x,y) = \dfrac{x^4}{a^4} + \dfrac{y^4}{b^4} = 1$ $(a > b > 0)$ και βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Απάντηση: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + y^2$

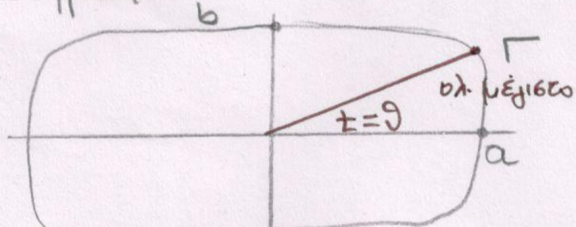
1ο Βήμα: Η καμπύλη $g(x,y) = 1$ είναι συμμετρική ως προς τους άξονες των x, y. Για να προσδιορίσουμε τη θέση του ολικού μεγίστου / ελαχίστου. Θεωρούμε μια παραμέτρηση του τμήματος της Γ που βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο: $\begin{cases} x(t) = a(\cos t)^{1/2} \\ y(t) = b(\sin t)^{1/2} \end{cases}$ με $t \in [0, \pi/2]$

2ο Βήμα: Έχουμε $\underbrace{f(x(t), y(t))}_{(x(t))^2 + (y(t))^2} = a^2 \cos t + b^2 \sin t =$

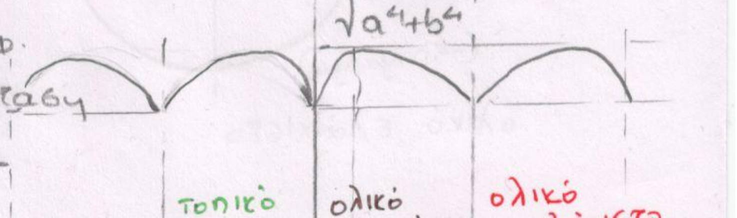
$$= \sqrt{a^4 + b^4}\left(\cos t \underbrace{\frac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}}_{\cos\vartheta} + \sin t \underbrace{\frac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}}_{\sin\vartheta}\right) \quad \left[\text{επειδή } \left\| \left(\underbrace{\frac{a^2}{\sqrt{a^4+b^4}}}_{\cos\vartheta}, \underbrace{\frac{b^2}{\sqrt{a^4+b^4}}}_{\sin\vartheta}\right)\right\| = 1\right]$$

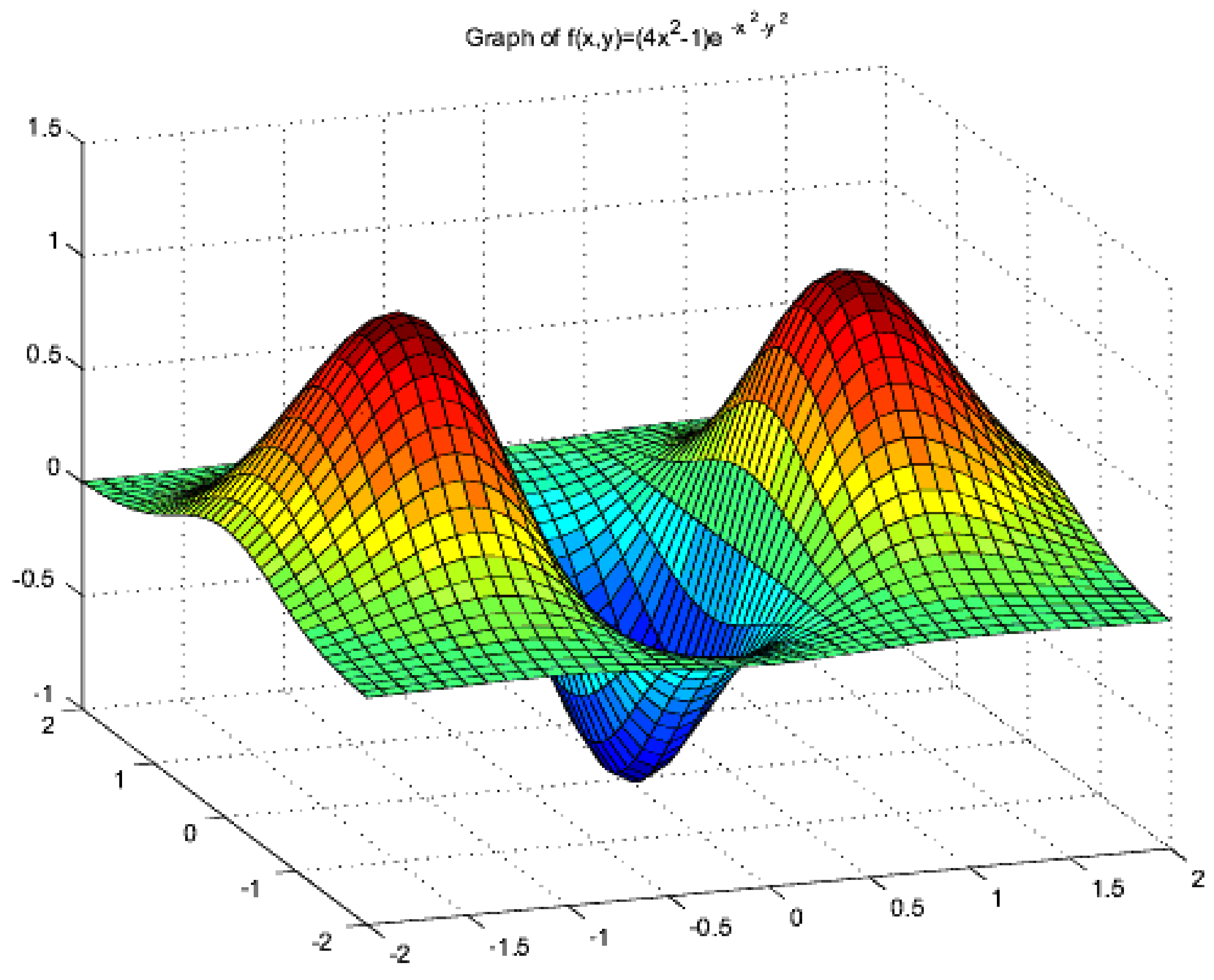
$$= \sqrt{a^4 + b^4} \cdot \cos(t - \vartheta), \quad t \in [0, \pi/2]$$

Παρατηρούμε ότι $\vartheta \in (0, \pi/4)$ επειδή $a > b$.



Γραφ. Παράσταση της f_Γ





Graph of $f(x,y)=(4x^2-1)e^{-x^2-y^2}$
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
2
1
0
-1
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2