F_1

1. Θεώρημα Fubini $(\mathbb{R}^2)$

Έστω $f: B := [\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε:

$$\underline{\iint_B} f \le \underline{\int_\alpha^\beta}\left(\underline{\int_\gamma^\delta} f(x,y)\,dy\right)dx \le \underline{\int_\alpha^\beta}\left(\overline{\int_\gamma^\delta} f(x,y)\,dy\right)dx \le \overline{\int_\alpha^\beta}\left(\overline{\int_\gamma^\delta} f(x,y)\,dy\right)dx \le \overline{\iint_B} f \qquad (1)$$

και

$$\underline{\iint_B} f \le \underline{\int_\gamma^\delta}\left(\underline{\int_\alpha^\beta} f(x,y)\,dx\right)dy \le \underline{\int_\gamma^\delta}\left(\overline{\int_\alpha^\beta} f(x,y)\,dx\right)dy \le \overline{\int_\gamma^\delta}\left(\overline{\int_\alpha^\beta} f(x,y)\,dx\right)dy \le \overline{\iint_B} f. \qquad (2)$$

Ιδιαιτέρως: i) Εάν η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε ισχύει:

$$\iint_B f = \int_\alpha^\beta\left(\underline{\int_\gamma^\delta} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_\alpha^\beta\left(\overline{\int_\gamma^\delta} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_\gamma^\delta\left(\underline{\int_\alpha^\beta} f(x,y)\,dx\right)dy = \int_\gamma^\delta\left(\overline{\int_\alpha^\beta} f(x,y)\,dx\right)dy$$

ii) Εάν η f είναι συνεχής στο B, τότε:

$$\boxed{\iint_B f = \int_\alpha^\beta\left(\int_\gamma^\delta f(x,y)\,dy\right)dx = \int_\gamma^\delta\left(\int_\alpha^\beta f(x,y)\,dx\right)dy}$$

Απόδειξη

Έστω $P_x = \{\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_N = \beta\}$ μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$ και
$P_y = \{\gamma = y_0 < y_1 < \dots < y_M = \delta\}$ μια διαμέριση του $[\gamma,\delta]$.

Τότε η $P = P_x \times P_y = \{P_{ij},\ P_{ij} = [x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j] \quad i=1,\dots,N,\ \ j=1,\dots,M\}$ είναι μια διαμέριση του B.

Ορίζουμε $m_{ij} := \inf\{f(x,y) : (x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\}$ $\quad i=1,\dots,N,\ \ j=1,\dots,M$
και $M_{ij} := \sup\{f(x,y) : (x,y)\in[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\}$ $\quad i=1,\dots,N,\ \ j=1,\dots,M$.

F2

Έστω $x_i' \in [x_{i-1}, x_i]$ $\quad i=1,2,\dots,N$.

Τότε, $m_{ij} \le \inf_{[y_{j-1}, y_j]} f(x_i', y) \quad i=1,\dots,N, \quad j=1,\dots,M$

Συνεπώς: $\displaystyle\sum_{j=1}^{M} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \sum_{j=1}^{M} \inf_{[y_{j-1}, y_j]} f(x_i', y)\cdot(y_j - y_{j-1}) \le \underline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x_i', y)\,dy \quad i=1,\dots,N$

Οπότε $\displaystyle\sum_{j=1}^{M} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \le \inf_{[x_{i-1}, x_i]} \underline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x_i', y)\,dy \quad i=1,2,\dots,N$

Πολλαπλασιάζοντας με τα μήκη των διαστημάτων της διαμέρισης Px και αθροίζοντας για $i=1,\dots,N$ έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \le \underline{\int_{\alpha}^{\beta}}\left(\underline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

Λαμβάνοντας supremum: $\displaystyle\underline{\iint_B} f \le \underline{\int_{\alpha}^{\beta}}\left(\underline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x,y)\,dy\right)dx$

Όμοιως: $M_{ij} \ge \sup_{[y_{j-1}, y_j]} f(x_i, y) \quad i=1,\dots,N, \quad j=1,\dots,M$

Συνεπώς: $\displaystyle\sum_{j=1}^{M} M_{ij}(y_j - y_{j-1}) \ge \sum_{j=1}^{M} \sup_{[y_{j-1}, y_j]} f(x_i', y)\cdot(y_j - y_{j-1}) \ge \overline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x_i', y)\,dy \quad i=1,\dots,N$

Οπότε: $\displaystyle\sum_{j=1}^{M} M_{ij}(y_j - y_{j-1}) \ge \sup_{[x_{i-1}, x_i]} \underline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x_i', y)\,dy \quad i=1,\dots,N$

Πολλαπλασιάζοντας με τα μήκη των διαστημάτων της διαμέρισης Py και αθροίζοντας για $i=1,\dots,N$, έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \ge \overline{\int_{\alpha}^{\beta}}\left(\overline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x,y)\,dy\right)dx$$

Λαμβάνοντας infimum: $\displaystyle\overline{\iint_B} f \ge \overline{\int_{\alpha}^{\beta}}\left(\overline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x,y)\,dy\right)dx.$

F3

Για τις ενδιάμεσες ανισότητες της σχέσης (1) έχουμε: (από ιδιότητες ολοκληρώματος Riemann στον $\mathbb{R}$)

$$\underline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x_i', y)\,dy \le \overline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x_i', y)\,dy \quad i=1,2,\dots,N \Rightarrow$$

$$\inf_{[x_{i-1},x_i]} \underline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x_i', y)\,dy \le \inf_{[x_{i-1},x_i]} \overline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x_i', y)\,dy \quad i=1,2,\dots,N \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{N} \inf_{[x_{i-1},x_i]} \underline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x_i', y)\,dy \cdot (x_i - x_{i-1}) \le \sum_{i=1}^{N} \inf_{[x_{i-1},x_i]} \overline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x_i', y)\,dy \,(x_i - x_{i-1}) \Rightarrow$$

$$\underline{\int_{\alpha}^{\beta}} \left(\underline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x,y)\,dy \right) dx \le \underline{\int_{\alpha}^{\beta}} \left(\overline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Ομοίως: $\cancel{\overline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x_i', y)\,dy}$ $\underline{\int_{\alpha}^{\beta}} \left(\overline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x,y)\,dy \right) dx \le \overline{\int_{\alpha}^{\beta}} \left(\overline{\int_{\gamma}^{\delta}} f(x,y)\,dy \right) dx.$

Από αυτά και τα προηγούμενα έπεται η σχέση (1).
Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο έπεται και η σχέση (2).

Για τη σχέση (i), αρχή να παρατηρήσουμε ότι αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο B, έπεται ότι:

$$\underline{\iint_B} f = \overline{\iint_B} f = \iint_B f$$

και άρα στις σχέσεις (1), (2) οι ανισότητες γίνονται ισότητες.

Τέλος, για τη σχέση (ii), αφού η f είναι συνεχής στο B, τότε και οι περιορισμοί της για σταθερά $x \in [\alpha,\beta]$ και σταθερά $y \in [\gamma,\delta]$ είναι συνεχείς στα $[\gamma,\delta]$ και $[\alpha,\beta]$ αντίστοιχα, επομένως, όλα τα ολοκληρώματα υπάρχουν και είναι ίσα μεταξύ τους.

ξ4

Όμοια πορεία ακολουθούμε και για την απόδειξη του θεωρήματος Fubini και στον $\mathbb{R}^3$.

<u>Παράδειγμα</u>: Στη σχέση (i), παρατηρώντας την, μας γεννάται το ερώτημα, αν όπως και στη σχέση (ii), υπάρχουν όλα τα ολοκληρώματα, μονά και διπλά. Αυτό γενικά δεν ισχύει, όπως π.χ για την παρακάτω συνάρτηση:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 \,, & x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } y \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \,, & x = \frac{p}{q} \text{ όπου } p,q \text{ πρώτοι μεταξύ τους και } y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

η οποία είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]\times[0,1]$ με $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} f = 0$, ενώ

Το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f(x,y)\,dy$ δεν υπάρχει για $x \in \mathbb{Q}$.

<u>Απλά σύνολα στον $\mathbb{R}^2$</u>

Παρατηρήσαμε ότι αν $K \subseteq \mathbb{R}^2$ φραγμένο, τότε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_K 1$ υπάρχει αν και μόνο αν το ∂K είναι σύνολο μέτρου μηδέν.

Συνεπώς, στην προσπάθεια μας για τον υπολογισμό όγκων, θα ολοκληρώνουμε πάνω από "καλά" χωρία, των οποίων το σύνορο είναι κατά τμήματα γραφήματα συνεχών συναρτήσεων, τα λεγόμενα <u>απλά</u> σύνολα.

Έστω $\varphi_1, \varphi_2 : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ και $\psi_1, \psi_2 : [\gamma,\delta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς, τότε:

ένα σύνολο είναι x-απλό αν $D = \{(x,y) : \alpha \le x \le \beta \,,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

και ένα σύνολο είναι y-απλό αν $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \gamma \le y \le \delta,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$.

Τότε, αν D x-απλό $\iint\limits_D f = \int_\alpha^\beta \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \quad (1)$ και

αν D y-απλό $\iint\limits_D f = \int_\gamma^\delta \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy \quad (2)$, όπου $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής

Απόδειξη: (1) Θεωρούμε ένα ~~παράλληλο~~ ορθογώνιο B, με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες, τέτοιο ώστε $D \subseteq B$. (Τέτοιο προφανώς υπάρχει). Αν $\varphi_1([\alpha,\beta]) = [m_1, M_1]$ και $\varphi_2([\alpha,\beta]) = [m_2, M_2]$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε $B = [\alpha,\beta] \times [m_1, M_2]$.

Θεωρούμε την επέκταση της f, $\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & , (x,y) \in D \\ 0 & , (x,y) \in B \setminus D. \end{cases}$

Έστω σταθερό $x_0 \in [\alpha,\beta]$. Τότε $\tilde{f}(x_0,y) = \begin{cases} f(x_0,y), & y \in [\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0)] \\ 0, & y \in [m_1, \varphi_1(x_0)) \cup (\varphi_2(x_0), M_2] \end{cases}$

Άρα $\displaystyle\int_{m_1}^{M_2} \tilde{f}(x_0,y)\,dy = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,dy$ που υπάρχει διότι f συνεχής.

Από τον ορισμό της επέκτασης παρατηρούμε ότι:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \overset{(*)}{=} \iint_B \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \int_{m_1}^{M_2} \tilde{f}(x,y)\,dy\,dx = \int_\alpha^\beta \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx,$$

από προηγουμένως, αφού η προηγούμενη σχέση ισχύει $\forall x \in [\alpha,\beta]$, αφού το x_0 ήταν τυχόν σημείο.

(2) Ομοίως.

Τέλος παραθέτουμε την απόδειξη του ισχυρισμού, ότι το γράφημα κάθε συνεχούς συνάρτησης είναι μέτρου 0:

Θεώρημα: Έστω $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε το γράφημα της f, ~~$G_f = \{(x, f(x))$~~ $G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [\alpha,\beta]\}$, είναι μέτρου μηδέν.

Απόδειξη: Αφού η f είναι συνεχής στο συμπαγές $[\alpha,\beta]$, η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Έστω $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $\delta > 0$, ώστε αν $x, y \in [\alpha,\beta]$ με $|x-y| < \delta$, τότε $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/\beta-\alpha$. Θεωρούμε μια διαμέριση του $[\alpha,\beta]$: $\Delta = \{\alpha = x_0 < x_1 < \dots < x_n = \beta\}$, ώστε $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Λόγω συνέχειας της f, υπάρχουν τα ~~$M_i = \max_{[x_{i-1},x_i]} f$~~ $M_i = \max_{[x_{i-1}, x_i]} f$, $m_i = \min_{[x_{i-1}, x_i]} f$.

(*) Η f είναι ολοκληρώσιμη, διότι το ∂D είναι μέτρου μηδέν.

Τότε: $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$ και αφού $G_f \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \left([x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i] \right)$,

έπεται ότι $\lambda(G_f) \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot (M_i - m_i) < \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha} = \varepsilon$

Άρα το G_f είναι σύνολο μέτρου μηδέν.

(2013-2014, από τον πρωτοετή Φ.Α.)

2. Κανονική Κατανομή Gauss