Ασκήσεις 5

(1) Τα διανυσματικά πεδία είναι C^{∞} στο $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$

$$\vec{F}_1(x,y,z) = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}, 0 \right)$$

$$\vec{F}_2(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0 \right)$$

Ν.Δ.Ο. (i) Τα $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ είναι αστρόβιλα

(ii) Το $\vec{F}_2$ είναι δ.π. κλίσεων / Συντηρητικό

Το $\vec{F}_1$ δεν είναι δ.π. κλίσεων / Συντηρητικό.

(i)

$$\operatorname{curl} \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{y}{x^2+y^2} & \frac{-x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-x}{x^2+y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2} \right) \right] \vec{k} =$$

$$\left[\frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \right] \vec{k} = \left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right] \vec{k} =$$

$(0,0,0)$.

$$\operatorname{curl} \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \right] \vec{k} =$$

$$\left[\frac{0 - yx/\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} - \frac{0 - xy/\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} \right] \vec{k} = (0,0,0).$$

Άρα τα $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ είναι αστρόβιλα δ.π.

(ii) Έστω ότι $\exists f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ τ.ω. $\vec{F}_2 = \nabla f$

Τότε $\dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \xRightarrow[\text{ως προς } x]{\text{ολοκλήρωση}} f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + c(y,z)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial c(y,z)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Άρα $\frac{\partial c(y,z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow c(y,z) = c(z)$

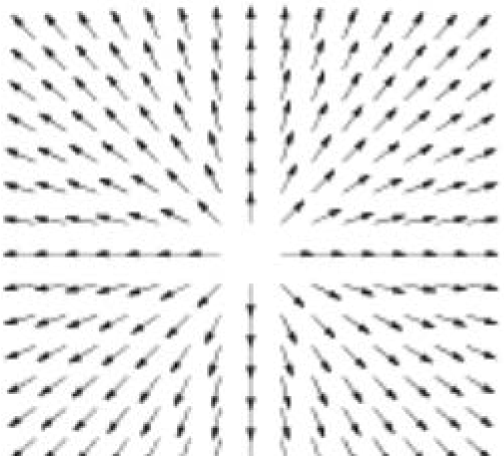
Άρα $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + c(z)$

Όμως $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0 = c'(z) \Rightarrow c'(z) = 0 \Rightarrow c'(z) = c$

Άρα $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + c$

$\vec{F}_1$ δεν είναι δπ. κλίσεων άσκηση 2 ii σελίδα 125 (σημειώσεις).

$$\left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\}$$



(2) Να υπολογισθούν οι $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\vec{F}_i = \nabla f_i$, $i=1,2,3$ όπου:

$\vec{F}_1(x,y,z) = (y-x^2, x+y^2, 0)$

$\vec{F}_2(x,y,z) = (yz, xz, xy)$

$\vec{F}_3(x,y,z) = (3x^2yz + y+5, x^3z+x-z, x^3y-y+z)$

Για την $\vec{F}_1$:

$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = y - x^2 \Rightarrow f_1(x,y,z) = xy - \frac{x^3}{3} + c(y,z)$

$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = x + \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = x + y^2 \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = y^2 \Rightarrow$

$c(y,z) = \frac{y^3}{3} + c(z)$

Άρα $f_1(x,y,z) = xy - \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + c(z)$

$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = 0 = c'(z) \Rightarrow c(z) = c$, $c \in \mathbb{R}$

Άρα $f_1(x,y,z) = xy - \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3} + c$

Για την $\vec{F}_2$:

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = yz \Rightarrow f_2(x,y,z) = xyz + c(y,z)$

$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = xz + \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = xz \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = 0 \Rightarrow$

$c(y,z) = c(z)$. Άρα $f_2(x,y,z) = xyz + c(z)$

$\frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = xy + c'(z) = xy \Rightarrow c'(z) = 0 \Rightarrow c(z) = c$

Άρα $f_2(x,y,z) = xyz + c$, $c \in \mathbb{R}$

Για την $\vec{F}_3$:

$\frac{\partial f_3}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2yz + y + 5 \Rightarrow$

$f_3(x,y,z) = x^3yz + xy + 5x + c(y,z)$

$\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) = x^3z + x + \frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = x^3z + x - z \Rightarrow$

$\frac{\partial c}{\partial y}(y,z) = -z \Rightarrow c(y,z) = -yz + c(z)$

Άρα $f_3(x,y,z) = x^3yz + xy + 5x - yz + c(z)$

$\frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z) = x^3y - y + c'(z) = x^3y - y + z \Rightarrow$

$c'(z) = z \Rightarrow c(z) = z^2/2 + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Άρα $f_3(x,y,z) = x^3yz + xy + 5x - yz + z^2/2 + c$

(3) Έστω η διαφορική εξίσωση $u_{xx} = u_{tt}$, $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ν.Δ.Ο. Εάν η $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$: $f = C^2$ και $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g = C^1$ τότε η $u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds$ αποτελεί λύση της Δ.Ε. με αρχικές συνθήκες $u(x,0) = f(x)$ και $u_t(x,0) = g(x)$ ($u_{xx} = u_{tt}$ κυματική εξίσωση)

$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{2}(f'(x+t) + f'(x-t)) + \frac{1}{2}(g(x+t) - g(x-t))$

$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{2}(f''(x+t) + f''(x-t) + g'(x+t) - g'(x-t))$

$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}(f'(x+t) - f'(x-t) + g(x+t) + g(x-t))$

$u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{2}(f''(x+t) + f''(x-t) + g'(x+t) - g(x-t))$

Παρατηρούμε ότι $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=g(x)$ και $u_{xx}=u_{tt}$. Άρα η $u(x,t)$ αποτελεί λύση της δ.ε. $u_{tt}=u_{xx}$ με αρχικές συνθήκες $u(x,0)=f(x)$ και $u_t(x,0)=g(x)$.

(4) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f=C^1$

(i) εάν $z=f\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$ τότε $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$

(ii) εάν $z=f\left(\frac{x}{y}\right)$ τότε $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

(i)
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$
$$=f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\frac{x-y-(x+y)}{(x-y)^2}$$
$$=f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$$
$$=f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\frac{x-y+(x+y)}{(x-y)^2}$$
$$=f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\frac{2x}{(x-y)^2}$$
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{x+y}{x-y}\right)\cdot\left[\frac{-2xy}{(x-y)^2}+\frac{2xy}{(x-y)^2}\right]=0.$$

(ii)
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\qquad\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{-x}{y^2}$$
$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{x}{y}\right)\left[\frac{x}{y}-\frac{x}{y}\right]=0$$

(5) Έστω $f(x,y,z) = e^{2x-y+3z^2}$ και $\vec{g}(r,s,t) =$ $(r+s-t,\ 2r-3s,\ \cos(rst))$, $w = f \circ \vec{g}$

Να υπολογισθεί η $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ κατ' ευθεία και με τον κανόνα της αλυσίδας.

$$(f \circ g)(r,s,t) = e^{2r+2s-2t-2r+3s+3\cos^2(rst)} = e^{5s-2t+3\cos^2(rst)}$$

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial r}(r,s,t) = -6\cos(rst)\cdot \sin(rst)\cdot st \cdot (f \circ g)(r,s,t)$$

$$= -3st\sin(2rst)\cdot e^{5s-2t+3\cos^2(rst)}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial r} & \dfrac{\partial w}{\partial s} & \dfrac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial g_1/\partial r & \partial g_1/\partial s & \partial g_1/\partial t \\ \partial g_2/\partial r & \partial g_2/\partial s & \partial g_2/\partial t \\ \partial g_3/\partial r & \partial g_3/\partial s & \partial g_3/\partial t \end{pmatrix}$$

Άρα $\dfrac{\partial w}{\partial r}(r,s,t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\vec{g}(r,s,t))\dfrac{\partial g_1}{\partial r}(r,s,t) +$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(\vec{g}(r,s,t))\dfrac{\partial g_2}{\partial r}(r,s,t) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(\vec{g}(r,s,t))\dfrac{\partial g_3}{\partial r}(r,s,t) =$

$2\cdot e^{5s-2t+3\cos^2(rst)}\cdot 1 - e^{5s-2t+3\cos^2(rst)}\cdot 2 + 6\cos(rst)\cdot$

$e^{5s-2t+3\cos^2(rst)}\cdot(-\sin(rst))\cdot st =$

$-3st\cdot\sin(2rst)\cdot e^{5s-2t+3\cos^2(rst)}.$

(6) Έστω $\vec{g}(x,y)=(x^2+1,\, y^2)$, $\vec{f}(u,v)=(u+v,\, u,\, v^2)$

Να υπολογισθούν στο $(1,1)$ οι μερικές παράγωγοι των συντεταγμένων συναρτήσεων της $\vec{f}\circ\vec{g}$, και ευθέως και με τον κανόνα της Αλυσίδας.

$$\vec{h}(x,y)=(\vec{f}\circ\vec{g})(x,y)=(x^2+y^2+1,\, x^2+1,\, y^4)$$

Τότε $\dfrac{\partial h_1}{\partial x}(1,1)=2x\Big|_{(1,1)}=2$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x}(1,1)=2x\Big|_{(1,1)}=2$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial x}(1,1)=0\Big|_{(1,1)}=0$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial y}(1,1)=2y\Big|_{(1,1)}=2$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial y}(1,1)=0\Big|_{(1,1)}=0$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial y}(1,1)=4y^3\Big|_{(1,1)}=4$$

$$\begin{pmatrix} \partial h_1/\partial x & \partial h_1/\partial y \\ \partial h_2/\partial x & \partial h_2/\partial y \\ \partial h_3/\partial x & \partial h_3/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial u & \partial f_1/\partial v \\ \partial f_2/\partial u & \partial f_2/\partial v \\ \partial f_3/\partial u & \partial f_3/\partial v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial g_1/\partial x & \partial g_1/\partial y \\ \partial g_2/\partial x & \partial g_2/\partial y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \partial h_1/\partial x & \partial h_1/\partial y \\ \partial h_2/\partial x & \partial h_2/\partial y \\ \partial h_3/\partial x & \partial h_3/\partial y \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)} \cdot \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(7) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f = C^1$, $\vec{g}(r,\theta)=(r\,\text{συν}\theta,\ r\,\text{ημ}\theta)$
και $F=f\circ\vec{g}$. N.Δ.O. $\|\nabla f\|^2=\left(\dfrac{\partial F}{\partial r}\right)^2+\dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2$

$$J_F(r,\theta)=\left(\frac{\partial F}{\partial r},\ \frac{\partial F}{\partial \theta}\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\partial g_1/\partial r\,(r,\theta) & \partial g_1/\partial \theta\,(r,\theta)\\ \partial g_2/\partial r\,(r,\theta) & \partial g_2/\partial \theta\,(r,\theta)\end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}\text{συν}\theta & -r\,\text{ημ}\theta\\ \text{ημ}\theta & r\,\text{συν}\theta\end{pmatrix}=$$

$$\left(\text{συν}\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\text{ημ}\theta\frac{\partial f}{\partial y},\ -r\,\text{ημ}\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\,\text{συν}\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Τοτε: $\left(\dfrac{\partial F}{\partial r}\right)^2=\text{συν}^2\theta\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\text{ημ}2\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}+\text{ημ}^2\theta\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2$,

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2=\text{ημ}^2\theta\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2-\text{ημ}2\theta\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+\text{συν}^2\theta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)^2=(\text{συν}^2\theta+\text{ημ}^2\theta)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+(\text{ημ}^2\theta+\text{συν}^2\theta\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left\|\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\|^2=\|\nabla f\|^2.$$

(8) Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f=C^1$, $\vec{g}(s,t)=(e^s\cos t, e^s\sin t)$ και $F=f\circ\vec{g}$ Ν.Δ.Ο. $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2\right]$

$$J_F(s,t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot\begin{pmatrix}\partial g_1(s,t)/\partial s & \partial g_1(s,t)/\partial t\\ \partial g_2(s,t)/\partial s & \partial g_2(s,t)/\partial t\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^s\cos t & -e^s\sin t\\ e^s\sin t & e^s\cos t\end{pmatrix}=$$

$$\left(e^s\cos t\frac{\partial f}{\partial x}+e^s\sin t\frac{\partial f}{\partial y},\ -e^s\sin t\frac{\partial f}{\partial x}+e^s\cos t\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2=e^{2s}\cos^2t\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+e^{2s}\sin 2t\,\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+e^{2s}\sin^2t\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2=e^{2s}\sin^2t\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2-e^{2s}\sin 2t\,\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}+e^{2s}\cos^2t\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

Τότε $e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^2\right]=$

$$(\cos^2t+\sin^2t)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+(\sin^2t+\cos^2t)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

(9) Ν.Δ.Ο. υπάρχει C^∞ συνάρτηση $z=f(x,y)$, $(x,y)\in S=S((1,1),\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}^2$ με $f(1,1)=1$ και $z^3+yz-xy^2-x^3=0$, $(x,y)\in S$

Να υπολογισθούν οι $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)$

Θέτουμε $F(x,y,z)=z^3+yz-xy^2-x^3$

Τότε $F(1,1,1)=0$ και $\frac{\partial F}{\partial z}(1,1,1)=3z^2+y\Big|_{(1,1,1)}=4\neq 0$

Άρα $\exists f: S((1,1),\delta)(\subseteq\mathbb{R}^2)\to(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ $F(x,y,f(x,y))=0$

$(x,y)\in S$, $f=C^\infty$

Άρα $f^3(x,y)+yf(x,y)-xy^2-x^3=0$, $(x,y)\in S$

και $3f^2(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)-y^2-3x^2=0^{(1)}$, $(x,y)\in S$

και $6f(x,y)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)^2+3f^2(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$

$-6x=0^{(2)}$, $(x,y)\in S$

Από (1) για $(x,y)=(1,1)$ έχουμε:

$3\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)-1-3=0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1$

Από (2) για $(x,y)=(1,1)$ έχουμε:

$6\cdot 1\cdot 1^2+3\cdot 1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)+1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)-6=0 \Leftrightarrow$

$4\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)=0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)=0.$

(10) Ν.Δ.Ο. υπάρχει C^∞ συνάρτηση $z=\varphi(x,y)$, $(x,y)\in S=S((3,-2),\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}^2$ με $\varphi(3,-2)=1$ και $\varphi^6(x,y)+x\varphi^2(x,y)+5y\varphi(x,y)+y^2+2=0$ $(x,y)\in S$. Εαν $\vec{a}\in\mathbb{R}^2$, $\|\vec{a}\|=1$ και $D_{\vec{a}}\varphi(3,-2)=0$ να ευρεθούν τα $\vec{a}$.

Θέτουμε $F(x,y,z)=z^6+xz^2+5yz+y^2+2$

$F(3,-2,1)=1^6+3\cdot 1^2+5(-2)\cdot 1+(-2)^2+2=0$

$\dfrac{\partial F}{\partial z}(3,-2,1)=6z^5+2xz+5y\Big|_{(3,-2,1)}=6+6-10=2\neq 0$

Άρα $\exists\varphi: S((3,-2),\delta)\to(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ C^∞ : $F(x,y,\varphi(x,y))=0$, $(x,y)\in S=S((3,-2),\varepsilon)$.

Δηλαδή έχουμε: $\varphi^6(x,y)+x\varphi^2(x,y)+5y\varphi(x,y)+y^2+2=0$ $(x,y)\in S$

και $6\varphi^5(x,y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)+\varphi^2(x,y)+2x\varphi(x,y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)+5y\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)=0$, $(x,y)\in S$

Για $(x,y)=(3,-2)$ $\Rightarrow$ $6\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(3,-2)+1+6\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(3,-2)-10\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(3,-2)=0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(3,-2)=-1/2$

και $6\varphi^5(x,y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)+2x\varphi(x,y)\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)+5\varphi(x,y)+5y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)+2y=0$, $(x,y)\in S$

Για $(x,y)=(3,-2)$ $6\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(3,-2)+6\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(3,-2)+5-10\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(3,-2)-4=0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(3,-2)=-1/2$

Τότε $\nabla g(3,-2) = (-1/2, -1/2)$
και για $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\vec{a}\| = 1$
$D_{\vec{a}} g(3,-2) = \nabla g(3,-2) \cdot \vec{a} \Leftrightarrow$

$0 = (-1/2, -1/2) \cdot (a_1, a_2) \Leftrightarrow$

$a_1 + a_2 = 0 \Leftrightarrow$

$a_1 = -a_2 \quad (1)$

Όμως $\|\vec{a}\| = 1 \Rightarrow \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = 1 \Rightarrow$
$a_1^2 + a_2^2 = 1 \quad (2)$
Από (1) και (2) έχουμε $a_2^2 = 1/2 \Rightarrow$
$a_2 = \pm \sqrt{2}/2$
Άρα $\vec{a} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ ή $\vec{a} = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

(ii) Υπάρχουν σημεία $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ώστε η $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)$ να αντιστρέφεται σε αυτά τοπικά;

$$J_F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x(x^2+y^2) - 2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-2y(x^2+y^2) - 2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x(x^2+y^2) - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} & \frac{-4x^2y}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\det J_F(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^4} \left[4x^2y^2(x^2-y^2) - 4x^2y^2(x^2-y^2) \right] = 0$$

Άρα $\nexists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ώστε η $\vec{F}$ να αντιστρέφεται τοπικά σε αυτό.

TETTRIS

(12) α) Έστω κ ο κύκλος (περιφέρεια) κέντρου $(0,0)$, ακτίνας 1. Να ευρεθεί η εφαπτόμενη ευθεία και το μοναδιαίο κάθετο στον κ στο σημείο $P=(1/2, \sqrt{3}/2)$ θεωρώντας:

(i) το κ ως παραμετρημένη καμπύλη

(ii) τοπικά στο P τον κ, ως γράφημα συνάρτησης

(iii) τον κ ως ισοσταθμική καμπύλη

(i) Ο κ γράφεται ως παραμετρημένη καμπύλη ως $\vec{r}(t)=(\cos t, \sin t)$, $t\in[0,2\pi)$

τότε για $t=\pi/6$ $\vec{r}(\pi/6)=(1/2, \sqrt{3}/2)=P$.

Τότε η εφαπτόμενη ευθεία στο P είναι

$|\vec{\rho}(\lambda)=\vec{r}(\pi/6)+\lambda\,\vec{r}\,'(\pi/6),\ \lambda\in\mathbb{R}|$

$\vec{\rho}(\lambda)=(\underbrace{1/2-\lambda\sqrt{3}/2}_{=x}, \underbrace{\sqrt{3}/2+\lambda/2}_{=y}),\ \lambda\in\mathbb{R}$

$\lambda=(1-2x)/\sqrt{3}=2y-\sqrt{3} \Rightarrow 1-2x=2\sqrt{3}y-3 \Leftrightarrow \boxed{x+\sqrt{3}y=2}$

Επίσης $P\perp$κ και $\|P\|=1$ άρα το P είναι το μοναδιαίο κάθετο.

(ii) $x^2+y^2=1$ ο κύκλος κ. τότε αν $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0,1]$ το $G_f=\{(x,f(x))\in\mathbb{R}^2 : x\in[0,1]\}$ το γράφημα της f ταυτίζεται τοπικά με τον κύκλο κ.

Τότε η $y-f(1/2)=f'(1/2)(x-1/2)$ είναι η εφαπτόμενη της f στο σημείο $P\in G_f$

$\Rightarrow y-\sqrt{3}/2=\dfrac{-2\cdot 1/2}{2\sqrt{3/4}}(x-1/2) \Leftrightarrow$

$\sqrt{3}\,y\ 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-x-1/2 \Leftrightarrow$

$\boxed{x+\sqrt{3}\,y=2}$

Πάλι $P\perp$κ και $\|P\|=1$

(iii) Θέτουμε $F(x,y)=x^2+y^2$, $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ τότε ο κύκλος η είναι η ισοσταθμική $\Sigma_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : F(x,y)=1\}$.

Τότε η εφαπτομένη της Σ_1 στο $P=(1/2, \sqrt{3}/2)$ είναι η $\left(\dfrac{\partial F(P)}{\partial x}, \dfrac{\partial F(P)}{\partial y}\right)\cdot(x-1/2, y-\sqrt{3}/2)=0$

$\Leftrightarrow (1, \sqrt{3})(x-1/2, y-\sqrt{3}/2)=0 \Leftrightarrow$

$x-1/2+\sqrt{3}y-3/2=0 \Leftrightarrow$

$\boxed{x+\sqrt{3}y=2}$ (ε)

και $\left(\dfrac{\partial F(P)}{\partial x}, \dfrac{\partial F(P)}{\partial y}\right)\perp(\varepsilon) \Rightarrow (1/2, \sqrt{3}/2)\perp\Sigma_1$

(β) Έστω η επιφάνεια S της σφαίρας κέντρου (0,0,0) και ακτίνας 1. Να ευρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο και το μοναδιαίο κάθετο στην S, στο $Q=(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ θεωρώντας

(i) την S τοπικά στο Q, ως γράφημα συνάρτησης

(ii) θεωρώντας την S ως ισοσταθμική επιφάνεια.

(i) $x^2+y^2+z^2=1$ η σφαίρα S τότε αν $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $(x,y)\in[0,1/\sqrt{2}]\times[0,1/\sqrt{2}]=A$ το $G_f=\{(x,y,f(x,y))\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in A\}$ το γράφημα της f ταυτίζεται τοπικά με την επιφάνεια της σφαίρας S.

Τότε η $z-f(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})=\nabla f(1/\sqrt{3},1/\sqrt{3})\cdot(x-1/\sqrt{3}, y-1/\sqrt{3})$ (1) είναι το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ και άρα και της S στο Q

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

Τοτε η (1) γινεται $z - 1/\sqrt{3} = (-1, -1) \cdot (x - 1/\sqrt{3}, y - 1/\sqrt{3})$
$\Rightarrow \sqrt{3}x + \sqrt{3}y + \sqrt{3}z = 3.$
και $Q \perp S$, $\|Q\| = 1$

(ii) Θετουμε $F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Τοτε η επιφανεια S ταυτιζεται με την ισοσταθμικη $\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = 1\}$ της F.

Τοτε το εφαπτομενο επιπεδο της Σ_1 στο Q ειναι
$\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(Q), \dfrac{\partial F}{\partial y}(Q), \dfrac{\partial F}{\partial z}(Q)\right) \cdot (x - 1/\sqrt{3}, y - 1/\sqrt{3},$
$z - 1/\sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow$
$(2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}) \cdot (x - 1/\sqrt{3}, y - 1/\sqrt{3}, z - 1/\sqrt{3}) = 0$
$\Leftrightarrow x + y + z - 3/\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$
$\sqrt{3}x + \sqrt{3}y + \sqrt{3}z = 3.$

Επιπλέον $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}(Q), \dfrac{\partial F}{\partial y}(Q), \dfrac{\partial F}{\partial z}(Q)\right) \perp S$
$\vec{a} = (2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}) \perp S$
τοτε $\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \perp S$

(13) Ν.Δ.Ο. τα γραφήματα των $z=f(x,y)=x^2+y^2$, $z=g(x,y)=-x^2-y^2+xy^3$ εφάπτονται στο $(0,0,0)$

Παρατηρούμε ότι $f(0,0)=g(0,0)=0$.
Το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $(0,0,0)$ είναι το $z=f(0,0)+\nabla f(0,0)\cdot(x,y) \Rightarrow z=0$.

Το εφαπτόμενο επίπεδο της g στο $(0,0,0)$ είναι το $z=g(0,0)+\nabla g(0,0)\cdot(x,y) \Rightarrow z=0$

Άρα αφού τα εφαπτόμενα επίπεδα των γραφημάτων των f,g στο $(0,0,0)$ ταυτίζονται, άρα και τα γραφήματα των f και g εφάπτονται.

(14) Έστω η επιφάνεια $S: \sin(x+y)+\varepsilon\varphi(x+z)=1$ και $P=(\pi/4, \pi/4, -\pi/4)$. Να υπολογισθεί το μοναδιαίο κάθετο της S στο P.

Θέτουμε $F(x,y,z)=\sin(x+y)+\tan(x+z)$
Τότε $F(P)=\sin\pi/2+\tan 0=1$.
Άρα το $\vec{a}=\left(\frac{\partial F(P)}{\partial x}, \frac{\partial F(P)}{\partial x}, \frac{\partial F(P)}{\partial z}\right) \perp S$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)=\cos(x+y)+\frac{1}{\cos^2(x+z)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)=\cos(x+y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)=\frac{1}{\cos^2(x+z)}$$

Τοτε $\frac{\partial F}{\partial x}(P)=1$, $\frac{\partial F}{\partial y}(P)=0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(P)=1$.

αρα το $\frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=(1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$ ειναι το μοναδιαιο καθετο της S στο P.

(15) Εστω $F(x,y,z)=x^2y+ye^x-z$

(i) Να ευρεθει το εφαπτομενο επιπεδο στην $\Sigma_0=\{(x,y,z):F(x,y,z)=0\}$ στο $P=(0,1,1)$

Το εφαπτομενο επιπεδο της Σ_1 στο P ειναι το $(\Pi):\left(\frac{\partial F}{\partial x}(P),\frac{\partial F}{\partial y}(P),\frac{\partial F}{\partial z}(P)\right)\cdot(x,y-1,z-1)=0$

$\frac{\partial F}{\partial x}(P)=2xy+ye^x\Big|_P=1$

$\frac{\partial F}{\partial y}(P)=x^2+e^x\Big|_P=1$

$\frac{\partial F}{\partial z}(P)=-1\Big|_P=-1$.

Αρα $(\Pi):(1,1,-1)\cdot(x,y-1,z-1)=0 \Leftrightarrow$
$(\Pi): x+y+z=0$.

(ii) Να ευρεθει το $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$, $\|\vec{a}\|=1$ ωστε να εχουμε τη μεγιστη μεταβολη της F στο $Q=(0,-1,2)$

Παρατηρουμε οτι $\nabla F(Q)=(-1,1,-1)\neq(0,0,0)$

Τότε η μέγιστη μεταβολή της F στο Q
$\max\{D_{\vec{a}}F(Q) : \|\vec{a}\|=1\}$ γίνεται για
$$\vec{a} = \frac{\nabla F(Q)}{\|\nabla F(Q)\|} = \left(-1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3}\right).$$

TETTRIS