Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Τμήμα Μαθηματικών

Ηλεκτρονική Τάξη: http://eclass.uoa.gr

Σημειώσεις Φοιτητών

Εαρινό Εξάμηνο 2014-2015

Μάθημα:

301. Απειροστικός λογισμός ΙΙΙ

Διδάσκων: Λ. Ευαγγελάτου - Δάλλα

Ευχαριστούμε για τις σημειώσεις τις: Κατερίνα, Πολυτίμη
Ευχαριστούμε για τις λύσεις των ασκήσεων την: Ειρήνη

Εισαγωγικά Ι.

δ.χ. $\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N}, n\geq 1)$ διάστασης n.

- $n=1$, $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$, έχει οριστεί από τις ιδιότητές του (1-14) και είναι πλήρες, ολικά διατεταγμένο σώμα
- $n\geq 2$, $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n) : x_i\in\mathbb{R} \ i=1,\dots,n\}$

$\vec{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,\dots,y_n)$

Ισότητα $\vec{x}=\vec{y} \iff x_i=y_i \ i=1,2,\dots,n$

Πράξεις

$(+)$ $\vec{x}+\vec{y}=:(x_1+y_1, x_2+y_2,\dots, x_n+y_n)\in\mathbb{R}^n$

βαθμ. πολ. $\lambda\vec{x}=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$

1. $\mathbb{R}^n$ με την $(+)$ και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό είναι διαν. χώρος με $\vec{0}=(0,0,\dots,0)$ μηδενικό στοιχείο, $-\vec{x}=(-x_1,-x_2,\dots,-x_n)$ ως αντίθετο του $\vec{x}$.

Διάσταση του $\mathbb{R}^n$

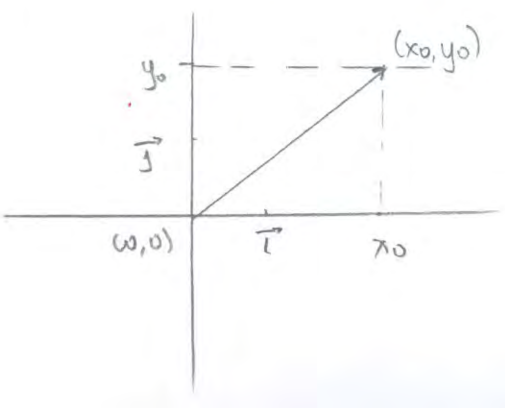
$$\left.\begin{aligned}\vec{e}_1&=(1,0,\dots,0)\\ \vec{e}_2&=(0,1,\dots,0)\\ &\ \vdots\\ \vec{e}_n&=(0,\dots,1)\end{aligned}\right\} \text{στον } \mathbb{R}^n$$

Γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το χώρο,
$\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\dots+x_n\vec{e}_n$
Άρα η διάσταση του $\mathbb{R}^n$ είναι n.

Γεωμετρική αναπαράσταση του $\mathbb{R}^n$ για $n=1,2,3$.

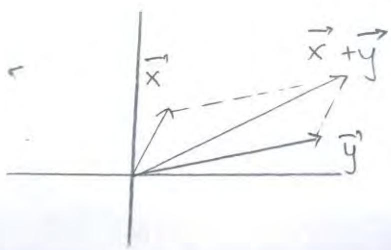
- $n=1$

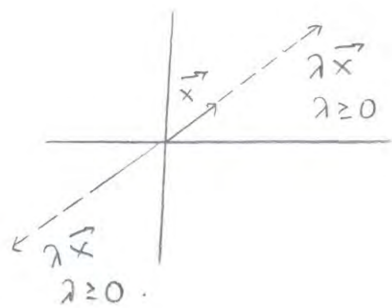
- $n=2$



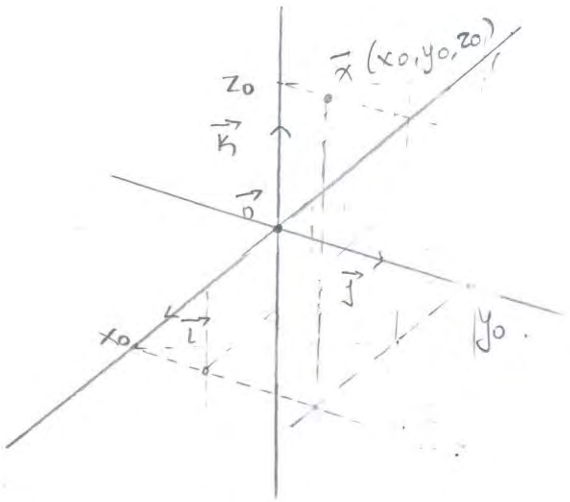
$\vec{e}_1=(1,0)=\vec{i}$

$\vec{e}_2=(0,1)=\vec{j}$





• $n=3$



$\vec{e_1}=\vec{i}=(1,0,0)$

$\vec{e_2}=\vec{j}=(0,1,0)$

$\vec{e_3}=\vec{k}=(0,0,1)$

2. Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$

Ευκλείδεια νόρμα, Απόσταση / Μέτρο

$\vec{x}=(x_1,\dots,x_n),\ \vec{y}=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$

Εσ. γινόμενο των $\vec{x},\vec{y}$:

$\vec{x}\cdot\vec{y}\overset{\text{συμ.}}{=}(\vec{x},\vec{y})\overset{\text{συμ.}}{=}\langle\vec{x},\vec{y}\rangle=:x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n\in\mathbb{R}$

Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου

i) $\vec{x}\cdot\vec{x}\geq 0$

$\vec{x}\cdot\vec{x}=0\iff\vec{x}=(x_1,\dots,x_n)=(0,\dots,0)=\vec{0}$

ii) $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$ (Μεταθετική)

iii) $\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z})=\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z},\ \vec{x},\vec{y},\vec{z}\in\mathbb{R}^n$

iv) $(\lambda\cdot\vec{x})\cdot\vec{y}=\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}),\ \lambda\in\mathbb{R}$

Αν μια συνάρτηση έχει τις παραπάνω ιδιότητες, καλείται εσωτερικό γινόμενο.

Ανισότητα των Cauchy-Schwarz

$\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n$ Τότε $|\vec{x}\cdot\vec{y}|\leq\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}\cdot\sqrt{\vec{y}\cdot\vec{y}}$

$$|x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n|\leq\sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2}$$

$\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^n-\{\vec{0}\}$

Ισότητα ισχύει $\iff\exists\,\lambda_0\neq 0:\ \vec{y}=\lambda_0\vec{x}$

<u>Απόδειξη</u> $\lambda \in \mathbb{R}$, $0 \underset{(i)}{\leq} g(\lambda) = (\lambda \vec{x} + \vec{y}) \cdot (\lambda \vec{x} + \vec{y}) = \lambda^2 (\vec{x} \cdot \vec{x}) + 2\lambda (\vec{x} \cdot \vec{y}) + (\vec{y} \cdot \vec{y})$

Εάν $\vec{x} = \vec{0}$ ισχύει $0 = 0$

$\vec{x} \neq \vec{0}$, $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ (ii)

$g(\lambda) \geq 0$, $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ Πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι ≤ 0.
$\lambda \in \mathbb{R}$

Άρα, $(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 - (\vec{x} \cdot \vec{x}) \cdot (\vec{y} \cdot \vec{y}) \leq 0 \Longrightarrow |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \sqrt{\vec{y} \cdot \vec{y}}$

Ισχύει $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ και $(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 = (\vec{x} \cdot \vec{x})(\vec{y} \cdot \vec{y})$

$\exists \lambda_0 \in \mathbb{R}$ $0 = g(\lambda_0) = (\lambda_0 \vec{x} + \vec{y}) \cdot (\lambda_0 \vec{x} + \vec{y}) \Longrightarrow \lambda_0 \vec{x} + \vec{y} = 0$, $\vec{y} = \lambda_0 \vec{x}$

<u>Παρατήρηση</u>

- $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ $\quad t = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \cdot \sqrt{\vec{y} \cdot \vec{y}}}$, $|t| \leq 1$.

$|t| = 1$ — $t = +1$ $\quad \vec{y} = \lambda_0 \vec{x}$, $\lambda_0 > 0$

$\quad\quad$ — $t = -1$. $\quad \vec{y} = \lambda_0 \vec{x}$, $\lambda_0 < 0$.

<u>Ευκ. νόρμα, απόσταση</u>

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\|\vec{x}\| := \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ Ευκλείδεια νόρμα.

- $(\|\cdot\|_2)$

<u>Ιδιότητες της $\|\cdot\|$.</u>

i) $\|\vec{x}\| \geq 0$

$\|\vec{x}\| = 0 \Longleftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

ii) $\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(θετικά ομογενής)

iii) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ (τριγωνική ιδιότητα)

$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Απόδειξη

iii) $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{x} + y\cdot\vec{y} =$

$= \|\vec{x}\|^2 + 2(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \|\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\|+\|y\|)^2$

$\|\vec{x}+\vec{y}\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Απόσταση / Μετρική.

$d(\vec{x},\vec{y}) =: \|\vec{x}-\vec{y}\|$

Ιδιότητες

i) $d(\vec{x},\vec{y}) \geq 0$

$d(\vec{x},\vec{y}) = 0 \iff \vec{x}=\vec{y}$

ii) $d(\vec{x},\vec{y}) = d(\vec{y},\vec{x})$

iii) $d(\vec{x},\vec{y}) \leq d(\vec{x},\vec{z}) + d(\vec{z},\vec{y})$

$\mathbb{R}^n$ δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο

$\downarrow$

$\mathbb{R}^n$ χώρο με νόρμα

$\downarrow$

$\mathbb{R}^n$ μετρικό χώρο.

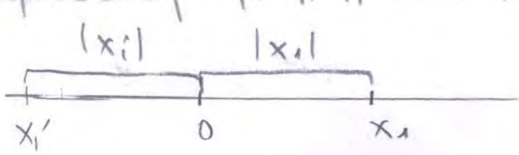
Σημαντική Ιδιότητα.

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$|x_i| \leq \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2} = \|\vec{x}\|$, $i=1,\dots,n$

Γεωμετρική Αναπαράσταση της $\|\cdot\|$ στου $\mathbb{R}^n$, $n=1,2,3$.

• $n=1$ $\quad x_1=(x_1)$

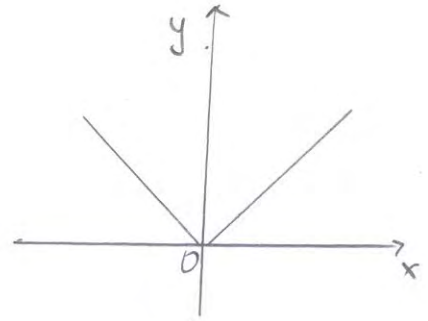


$\|x_1\| = \sqrt{x_1^2} = |x_1|$

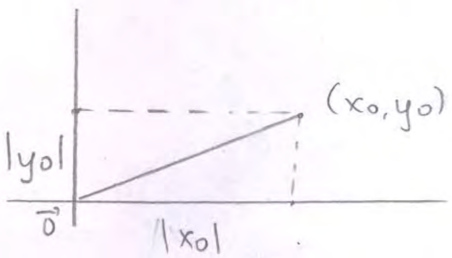
δηλαδή $\|x_1\|$ μετρά την απόσταση του x_1 από το 0

$x_1 \in \mathbb{R}$

$f(x) = |x| \ , x \in \mathbb{R}$



• $n=2 \quad \vec{x} = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$



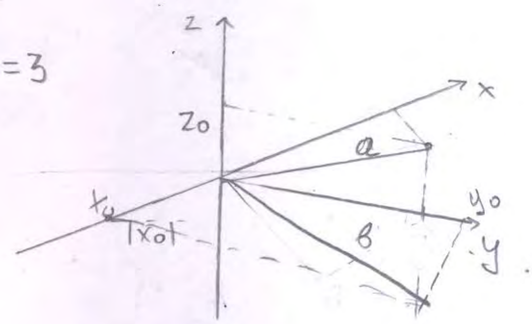
$a = \|(x_0,y_0)\| = \sqrt{|x_0|^2 + |y_0|^2}$

Πυθαγόρειο Θεώρημα.

a = απόσταση του (x_0,y_0) από το $(0,0)$

$\|(x_0,y_0)\| \geq |x_0| \cdot |y_0|$.

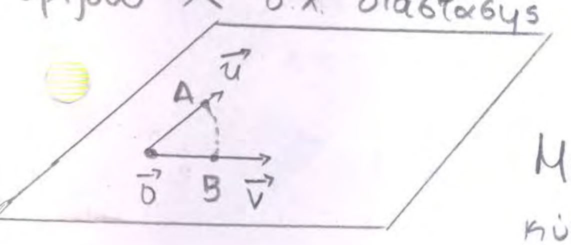
• $n=3$



Γωνία θ $\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$, $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

$\vec{u}, \vec{v}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Ορίζουν X δ.χ. διάστασης 2 $(X = span\{\vec{u},\vec{v}\})$

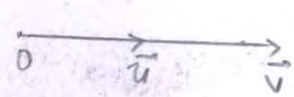


$\measuredangle(\vec{u},\vec{v}) = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}, \ \lambda,\mu \geq 0\}$

Με κέντρο το $\vec{0}$ και ακτίνα 1, γράφουμε κύκλο στον X. Αυτός ο κύκλος τέμνει την $\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$ στο τόξο $\widehat{AB}$. Κέντρο της $\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$ το μήκος $\widehat{AB}$ $0<\theta<\pi$.

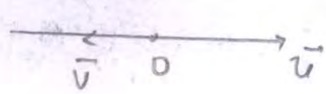
• $\vec{u}, \vec{v}$ γραμμ. εξαρτημένα

$\vec{u} = \lambda\vec{v}, \ \lambda > 0$



$\theta = 0$

$\vec{u} = \lambda\vec{v}, \ \lambda < 0$



$\theta = \pi$.

Πρόταση Σχέση $\vec{u}\cdot\vec{v}$ με συν($\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$), $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$

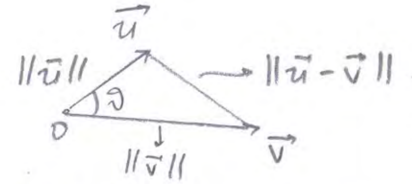
Έστω $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\vec{0}\}$ $(n\geq 2)$

Τότε $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\,\text{συν}\vartheta$, $\vartheta=\measuredangle(\vec{u},\vec{v})$ $\left(\text{συν}\vartheta=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}\right)$

Ιδιαιτέρως: $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=1$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\text{συν}\vartheta$.

Απόδειξη

• $\vec{u},\vec{v}$ γραμμικά ανεξάρτητα.



$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=(\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2(\vec{u}\cdot\vec{v})$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\text{συν}\vartheta$ (Νόμος των Συνημιτόνων Πυθαγόρειο Θεώρημα) $\Longrightarrow$

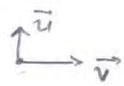
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\,\text{συν}\vartheta$

• $\vec{u},\vec{v}$ γραμμικά εξαρτημένα (εύκολο).

Ορθογώνια διανύσματα, Ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

1) $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ $\vec{u}\perp\vec{v}\Longleftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$ $\vec{u}\perp\vec{v}\Longleftrightarrow\text{συν}\vartheta=0\Longleftrightarrow\measuredangle(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{2}$



2) $\{\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n}\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n\Longleftrightarrow\vec{v_i}\cdot\vec{v_j}=0$ $i\neq j$, $\|v_i\|=1$ $i=1,\dots,n$

$(\vec{v_i}\cdot\vec{v_j}=\delta_{ij})$

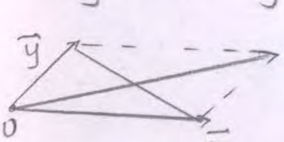
Ασκήσεις

1) $\{\vec{e_1},\dots,\vec{e_n}\}$ ορθ. βάση

2) $\vec{u}\perp\vec{v}\Longleftrightarrow\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα).

3) Νόμος του Παραλληλογράμμου

$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2+\|\vec{x}-\vec{y}\|^2=2\|\vec{x}\|^2+2\|\vec{y}\|^2$



Σημείωση X δ.χ, $\|\cdot\|$ νόρμα.

$\|x\|=\sqrt{x\cdot x}$ για κάποιο εσ. γινόμενο $(\cdot)$

$\Longleftrightarrow$ ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου

3) Εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$, Γεωμετρικές Εφαρμογές.

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$

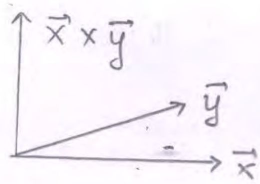
$$\vec{x} \times \vec{y} \underset{\text{συμβ}}{=} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} =: \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (x_2y_3 - x_3y_2, -x_1y_3 + y_1y_3, x_1y_2 - y_1x_2) \in \mathbb{R}^3$$

Ιδιότητες

1) $(\lambda \vec{y}) \times \vec{y} = \vec{0}$
2) $\vec{y} \times \vec{z} = -\vec{z} \times \vec{y}$
3) $(\lambda \vec{x}) \times \vec{y} = \lambda (x \times \vec{y})$
4) $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$
5) $\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$
6) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z}) \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{z}$

Ασκήσεις



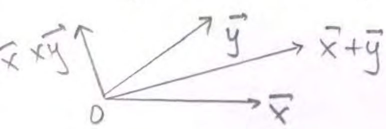
1) $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ $\quad \vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}, \vec{y}$

2) $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$ (Ταυτότητα Lagrange $n=3$)

3) $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ $\quad \|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \eta\mu\vartheta$, $\vartheta = \measuredangle(\vec{x}, \vec{y})$

$\vec{x}, \vec{y}$ γρ. εξαρτημένα $\iff \vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$

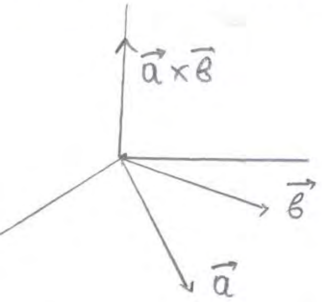
4) $\vec{x}, \vec{y}$ γρ. εξαρτημένα.



Παραλληλόγραμμο με κορυφές το $0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{x}+\vec{y}$

$\Pi = \{\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}, 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$ και $E(\Pi) = \|\vec{x} \times \vec{y}\|$

5) $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, 0)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, 0)$

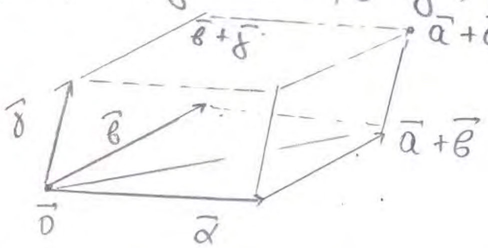


Παραλληλόγραμμο με κορυφές το $0, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}$

$$E(\Pi) = \left| \det \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \right|$$

6) $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ $\Pi = \{ t_1\vec{\alpha} + t_2\vec{\beta} + t_3\vec{\gamma} \quad 0 \le t_i \le 1 \}$

$\vec{0}, \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}, \vec{\beta}+\vec{\gamma}, \vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$



$$V(\Pi) = \left| \det \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \right| , \quad \begin{aligned} \vec{\alpha} &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \vec{\beta} &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ \vec{\gamma} &= (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \end{aligned}$$

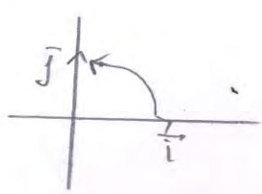
Δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων.

$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ γραμμ. ανεξ. στον $\mathbb{R}^n$

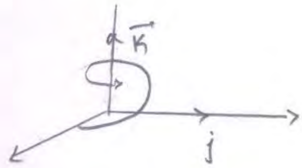
Το σύστημα καλείται δεξιόστροφο $\Longleftrightarrow$ $\det\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\} > 0$

Ασκήσεις

1) $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ δεξιόστροφο



2) $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ δεξιόστροφο.



3) $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v}\}$ δεξιόστροφο.