Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ
Υποδείξεις - Συχνά Λάθη

Διδάσκοντες: Δάλλα - Αλικάκος

16 Ιουλίου 2014

Θέμα 1

Υπόδειξη

(α) Από την γνωστή ανισότητα $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$, όταν $(x, y) \to (0, 0)$, τότε ισχύει:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| \leq \left| \frac{x^2 y}{2x^2 y} \right| \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \to 0$$

Άρα η f συνεχής στο $(0, 0)$.

(β) Όταν $t \to 0$, τότε ισχύει:

$$A(t) = \frac{f((0,0) + t(a_1, a_2)) - f(0,0)}{t} = ... = \frac{a_1^2 a_2 |t|}{t^2 a_1^4 + a_2^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Αν $a_2 = 0$, τότε $A(t) = 0, \forall t \neq 0$, άρα $\lim\limits_{t \to 0} A(t) = 0$.

Αν $a_2 \neq 0$, τότε $\lim\limits_{t \to 0} A(t) = \dfrac{0}{0 + a_2} = 0$.

Σε κάθε περίπτωση $\lim\limits_{t \to 0} A(t) = 0$.

Άρα η f έχει κατά κατεύθυνση παράγωγο για κάθε $\vec{\alpha}$ και μάλιστα ίση με μηδέν.

(γ)

$$\phi(h) = \frac{f(h_1,h_2) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{h_1^2 h_2}{h_1^4+h_2^2}$$

Όταν $h_2 = h_1^2$, τότε

$$\phi(h) = \frac{h_1^4}{h_1^4+h_1^4} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$$

για $h = (h_1, h_1^2) \to (0,0)$. Άρα δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Σημειώνουμε ότι $\nabla f(0,0) = (0,0)$, απευθείας από το (β) όπου βρήκαμε ότι η κατά κατεύθυνση παράγωγος είναι ίση με μηδέν για κάθε "κατεύθυνση". Αφού η μερική παράγωγος ως προς x είναι η παράγωγος κατά την κατεύθυνση του $\vec{e_1}$ κτλ.

Συχνά Λάθη

(α) $x^4 + y^2 \geq x^2 + y^2$, με $x \to 0$. Αυτόματα το $x^2 \geq 1$, ενώ το $x \to 0$, που είναι αδύνατον.
Μια τέτοια απάντηση βαθμολογείται με μηδέν και χάνεται το (α) σε πολλά γραπτά.

(β) Η παράγωγος κατά κατεύθυνση δεν υπολογίστηκε σωστά, λόγω άγνοιας του ορισμού.

(γ) Αποδείχτηκε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$, λόγω άγνοιας του ορισμού.

Επίσης γράφτηκε στο (α) ότι η $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ φράσσεται από την $||(x,y)||$, άρα η συνάρτηση τείνει στο 0, για $(x,y) \to (0,0)$, ενώ στο (γ) ότι η ίδια συνάρτηση δεν έχει όριο στο $(0,0)$. Αυτά αντιφάσκουν. Βαθμολογήθηκε το (γ) και αγνοήθηκε η αντίφαση.
Σχόλιο: η συνάρτηση που αναφέρεται πιο πάνω, είχε ειπωθεί 2-3 φορές, την μια με αστερίσκο, υπάρχει και το σχήμα της σε αρχείο σχημάτων.

Επιπλέον γράφτηκαν τα εξής:

- Μια συνάρτηση μπορεί να είναι ΑΣΥΝΕΧΗΣ και ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΗ.
- Μια συνάρτηση μπορεί να μην έχει παράγωγο κατά κατεύθυνση, αλλά να είναι διαφορίσιμη.
- Μια συνάρτηση μπορεί να μην έχει παράγωγο ως προς όλες τις κατευθύνσεις, αλλά να έχει μερικές παραγώγους.

- Η μερική παράγωγος ως προς x είναι ίση με την μερική παράγωγο ως προς y αν και μόνον αν η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη.

- Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι δεν συνεπάγεται ότι υπάρχει η κατευθυνόμενη. Ο τύπος κατευθυνόμενη=ανάδελτα..., ισχύει εφόσον η συνάρτηση είναι διαφορίσιμη.

- Αν υπάρχει το όριο της $f(x,0)$, όταν $x \to 0$ και της $f(0,y)$, όταν $y \to 0$ και είναι ίσα, τότε υπάρχει το όριο για $(x,y) \to (0,0)$.

Θέμα 2

Υπόδειξη

(α) Είναι απόδειξη και υπάρχει αυτούσιο στις σημειώσεις.

(β) Ξέρουμε εκ των προτέρων ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Η g είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$, αλλά οι μερικές παράγωγοί της δεν είναι συνεχείς σε αυτό το σημείο. Πράγματι:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,0) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t sin\left(\frac{1}{t}\right) = 0,$$

ως μηδενική επί φραγμένη. Επίσης,

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(0,t) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$

Έχουμε,

$$|\phi(h)| = \left| \frac{g(h_1,h_2) - g(0,0) - \nabla g(0,0)\cdot(h_1,h_2)}{||h||} \right| =$$

$$= \left| \frac{h_1^2 sin(\frac{1}{h_1})}{||h||} \right| \leq \left| \frac{||h||^2 sin(\frac{1}{h_1})}{||h||} \right| = ||h|| \left| sin\left(\frac{1}{h_1}\right) \right| \to 0,$$

ως μηδενική επί φραγμένη. (Σημείωση: $||h|| \to 0$, όταν $h \to 0$).
Άρα η g διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Για $(x,y) \neq (0,0)$ είναι

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2xsin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}.$$

Η $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$ αφού δεν έχει καν όριο εκεί. Αυτό οφείλεται στο ότι ο πρώτος της όρος $2xsin\dfrac{1}{x}$ πάει στο μηδέν, όταν $(x,y) \to (0,0)$, ενώ ο $cos\dfrac{1}{x}$ δεν έχει όριο όταν $(x,y) \to (0,0)$. Αυτό μπορούμε να το δείξουμε θεωρώντας τις ακολουθίες $a_n = \dfrac{1}{2n\pi}$ και $b_n = \dfrac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$.

Άρα η μερική παράγωγος της g ως προς x δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, ενώ η g είναι διαφορίσιμη στο εν λόγω σημείο.

Συχνά Λάθη

(α) Δόθηκε απόδειξη για συνάρτηση 3 μεταβλητών, όπου το Π.Ο. ήταν ανοικτό σύνολο και όχι για 2-μεταβλητών με Π.Ο. ολόκληρο το $\mathbb{R}^2$.

(β) Λάθος παραγώγιση της $x^2 sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $x \neq 0$. Επίσης γράφτηκαν τα εξής:

- $\lim_{x\to 0}\left[xsin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right] = 1$
- Το $\lim_{x\to 0} cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ υπάρχει και είναι ίσο με 0 ή 1 ή ∞.

Θέμα 3

Υπόδειξη

(i)

(α) Είναι $V(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ άρα,

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{2x}{2(x^2+y^2)} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

και

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x)(x^2+y^2) - x\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-x(2x)}{A} = \frac{y^2-x^2}{A},$$

όπου $A = (x^2+y^2)^2$.

Με όμοιους υπολογισμούς ή επικαλούμενοι την συμμετρία της V ως προς x, y βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2-y^2}{A}.$$

Έτσι έχουμε το ζητούμενο.

(β)

$$V(x,y) = c \Leftrightarrow \ln(x^2+y^2) = 2c \Leftrightarrow e^{\ln(x^2+y^2)} = e^{2c} \Leftrightarrow x^2+y^2 = (e^c)^2$$

Άρα το Σ_c είναι κύκλος με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα e^c.

(ii) Έστω $g(x,y,z) = sin(x^2y)$. Παρατηρούμε ότι $g(x,-y,z) = -g(x,y,z)$. Επίσης το B είναι συμμετρικό ως προς το επίπεδο $xz(y=0)$, άρα το ολοκλήρωμα της g στο B είναι ίσο με μηδέν.

Ισχύει ότι $f = g+1$, άρα αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα του 1 στο B, δηλαδή τον όγκο του B. Αυτό βγαίνει κατά τα γνωστά με σφαιρικό μετασχηματισμό:

$$4x = rcos\theta sin\phi$$

$$\sqrt{7}y = rsin\theta sin\phi$$

$$\sqrt{14}z = rcos\phi$$

και μετά πράξεις.

Συχνά Λάθη

(i) Οι καμπύλες στάθμης στον $\mathbb{R}^2$ δεν ζωγραφίστηκαν ως κύκλοι ή ανήκαν σε κάποια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$.

(ii) Δεν παρατηρήθηκε η συμμετρία συνάρτησης-σχήματος και έγινε προσπάθεια υπολογισμού του ολοκληρώματος της g.

Θέμα 4

Υπόδειξη

(i) Με πολικό μετασχηματισμό: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.
Αφού $y > 0 \Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$. Αντικαθιστώντας τον μετασχηματισμό στις C_1 , C_2 οι εξισώσεις των κύκλων γίνονται αντίστοιχα: $C_1 : r = 2\sin\theta, C_2 : r = 1$.

Η τομή των κύκλων είναι η $C_1 = C_2$, δηλαδή $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$, που μας δίνει $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ και $\theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

Για το θ έχουμε: ο κύκλος C_2 πρέπει να βρίσκεται μέσα στον C_1, δηλαδή $C_2 \subseteq C_1$. Αυτό δίνει $1 \leq 2\sin\theta$ που είναι ισοδύναμο με $\dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{5\pi}{6}$.

Για το r έχουμε : ''Εξω από τον C_2'', άρα $1 \leq r$ και ''μέσα στον C_1'', άρα $r \leq 2\sin\theta$.

Οπότε το ολοκλήρωμα είναι το $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \int_{1}^{2\sin\theta} r dr d\theta.$

Το αποτέλεσμα είναι $\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Χρησιμοποιήθηκε το ολοκλήρωμα του $sin^2(\theta)$.

(ii) Με κυλινδρικές συντεταγμένες.

Δινόταν τα όρια του z: $r < z < 3 - \dfrac{r^2}{4}$.

Το θ ήταν στο $[0, 2\pi]$ - δεν υπήρχαν περιορισμοί.

Τα όρια του r βρισκόταν από την $r < (z <)3 - \dfrac{r^2}{4}$, άρα στο $[0, 2]$ -τριώνυμο.

Το αποτέλεσμα είναι $\dfrac{14\pi}{3}$.

Χρησιμοποιήθηκε το ολοκλήρωμα των r, r^2, r^3.

Συχνά Λάθη

(i) Αν γραφτεί $\frac{\pi}{4}$ για το κάτω άκρο της θ αυτό δίνει το εξής συμπέρασμα:

τα ισόπλευρα τρίγωνα στην Ευκλείδεια Γεωμετρία έχουν άθροισμα γωνιών

$$3 \cdot 45 = 135^\circ$$

(ii) Αν γραφτεί to r στο $[0, 1]$, αυτό δίνει τον όγκο στερεού εντός του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$ και εντός των δυο επιφανειών που δίνονται (κώνου , κυκλικού παραβολοειδούς).

Αν γραφτεί στο $[0, 2\sqrt{3}]$ δίνει το συμπέρασμα ότι $1 < 0$.

Σχόλιο: ο βαθμός δόθηκε μόνον στην περίπτωση που τα χωρία περιγράφηκαν σωστά. Αν υπολογίστηκε εμβαδόν ή όγκος άλλου χωρίου από αυτό που ζητήθηκε η ερώτηση πήρε μηδέν.

Θέμα 5

Υπόδειξη

(i) Έστω $M \in \Gamma$. Τότε $M = \left(x, y, \frac{1}{xy}\right)$. Έχουμε:

$$d(M, 0) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + \left(\frac{1}{xy} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{1}{xy}\right)^2}$$

Το $d(M, 0)$ είναι ελάχιστο, όταν το $f(x, y) = x^2 + y^2 + \left(\frac{1}{xy}\right)^2$ είναι ελάχιστο. Με απλούς υπολογισμούς:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{1}{y^2}(-2)\frac{1}{x^3} = 2x - \frac{2}{x^3 y^2}$$

Λόγω συμμετρίας,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - \frac{2}{y^3 x^2}$$

Επίσης

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{6}{x^4 y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{6}{y^4 x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4}{x^3 y^3}$$

Δεδομένου ότι $x, y > 0$, έχουμε:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = 0\right) \Leftrightarrow (x, y) = (1, 1)$$

Άρα

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Επειδή $\Delta_1 = 8 > 0$ και $\Delta_2 = 64 - 16 = 48 > 0$, έχουμε ότι στο σημείο $(1, 1)$ ελαχιστοποιείται η f, άρα και το $d(M, 0)$.

Εναλλακτική Λύση

Να σημειώσω ότι θα μπορούσε κάποιος να αποφύγει τις διαδικασίες του Απειροστικού ΙΙΙ στο θέμα 5 (i). Αρκεί να παρατηρήσει ότι η γνωστή $a^2 + b^2 \geq 2ab$ [με την ισότητα ανν $a = b$ $(*)$] δίνει

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \left(\frac{1}{xy}\right)^2 \geq 2x\frac{1}{xy} + y^2 = y^2 + \frac{2}{y}$$

Θεωρούμε την $g(t) = t^2 + \frac{2}{t}, t > 0$. Με ύλη απειροστικού Ι, βρίσκουμε ότι η g έχει ελάχιστο στο 1, το $g(1) = 3$.

Άρα $f(x, y) \geq g(y) \geq 3$ και επίσης παρατηρούμε ότι $f(1, 1) = 3$.
Άρα $min f = 3$. Ισχύει:

$$f(x,y) = minf = 3 \Leftrightarrow f(x,y) = g(y) \wedge g(y) = 3 \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} x = \frac{1}{xy} \wedge y = 1 \Leftrightarrow x = y = 1$$

-αφού $x, y > 0$.

Άρα η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σημείο $(1, 1)$.

(ii) Αφού $F(x_0, y_0) = 0 \wedge F_x(x_0, y_0) \neq 0$, το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης μας δίνει ότι υπάρχει τοπικά συνάρτηση $x = g(y)$ και $\frac{\partial g}{\partial y} = g'(y) = -\frac{F_y}{F_x}$♣.

Αφού $F(x_0, y_0) = 0 \wedge F_y(x_0, y_0) \neq 0$, το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης μας δίνει ότι υπάρχει τοπικά συνάρτηση $y = f(x)$ και $\frac{\partial f}{\partial x} = f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$♠.

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των ♣, ♠ έχουμε το ζητούμενο.