ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Απειροσικός Λογισμός ΙΙΙ - 15-9-2014

Θέμα 1. (α) Διατυπώστε τον ορισμό του διαφορικού μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ στο σημείο $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

(β) Εξηγείστε γιατί η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2 + 2xy^3 + \ln(x^2+1)$ είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^3$ και υπολογείστε το διαφορικό της στο $(1,2,0)$.

Θέμα 2. (α) Έστω $f(x,y) = g(x) + h(y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ όπου η g είναι διαφορίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και η h είναι διαφορίσιμη στο $y_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(β) Έστω $f(x,y) = \eta\mu(x) + y^2 \eta\mu\left(\frac{1}{y}\right)$ για $y \neq 0$ και $f(x,0) = \eta\mu(x)$.

(i) Να υπολογιστεί το διαφορικό της f στο $(0,0)$ (αν υπάρχει).

(ii) Να ευρεθεί η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου, της επιφάνειας:

$S = \{(x,y,z): z = f(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ στο σημείο $(0,0,0)$.

Θέμα 3. (α) Έστω $V(x,y,z) = -\frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$ όπου G, m, M θετικές σταθερές.

(i) Να αποδειχθεί ότι $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$, για $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$.

(ii) Σχεδιάστε τις επιφάνειες στάθμης $\Sigma_c = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3: V(x,y,z) = c\}$ για $c = -1, -2, -3$ και σχεδιάστε το $\nabla V(x_0, y_0, z_0)$ για $(x_0, y_0, z_0) \in \Sigma_{(-2)}$.

(β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \iint_D e^{(x^2+y^2)} dxdy$,

όπου $D = \{(x,y): 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq \sqrt{3}x\}$.

Θέμα 4. (α) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού B που βρίσκεται εντός της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ και εντός του κώνου $z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$.

(β) Να υπολογιστεί ο όγκος του ελλειψοειδούς $H = \left\{(x,y,z): \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 \leq 1\right\}$ $(\alpha, \beta, \gamma > 0)$.

Θέμα 5. (α) Θεωρούμε το γράφημα Γ της $g(x,y) = \sqrt{\frac{2}{xy}}$, $x > 0, y > 0$. Βρείτε το σημείο του Γ που απέχει ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων $(0,0,0)$ [Υπόδειξη: ελαχιστοποιείστε το τετράγωνο της απόστασης].

(β) Θεωρούμε την καμπύλη $\eta\mu(x+y) + \sigma\upsilon\nu(x-y) - x = 1$. Δείξτε ότι τοπικά στο $(0,0)$, η καμπύλη είναι το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης $y = f(x)$ και υπολογίστε την $f'(0)$.

Να γραφούν 5 θέματα

☺ Καλή επιτυχία ☺

Ονοματεπώνυμο……………………………………………………… Α.Μ……………………