Το θεώρημα του Stokes και θεώρημα Gauss

1. Επιφάνειες στον χώρο $\mathbb{R}^3$ και επιφανειακά ολοκληρώματα. Ας θεωρήσουμε μια C^1 επιφάνεια $\mathcal{S}: G \to \mathbb{R}^3$ στον $xyz-$χώρο ορισμένη σε ένα κατάλληλο ανοικτό σύνολο $G \subset \mathbb{R}^2$. Αναλυτικά αυτή η επιφάνεια περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\mathcal{S} : x = x(t,s),\ y = y(t,s),\ z = z(t,s),\ (t,s) \in G,$$

όπου $\mathcal{S}(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$. Το **στοιχείο εμβαδού** $d\sigma$ της επιφάνειας $\mathcal{S}$ ορίζεται ως εξής:

$$d\sigma = \sqrt{\left(\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\right)^2}\, dtds.$$

Έτσι το εμβαδόν της επιφάνειας $\mathcal{S}$ δίδεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$\mathcal{E}\mu\beta(\mathcal{S}) = \iint_G d\sigma = \iint_G \sqrt{\left(\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\right)^2}\, dtds$$

Γενικότερα ορίζεται το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{\mathcal{S}} f\, d\sigma$ ως εξής:

$$\iint_{\mathcal{S}} f\, d\sigma$$

$$= \iint_G f(x(t,s), y(t,s), z(t,s)) \sqrt{\left(\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\right)^2}\, dtds.$$

Το διάνυσμα $\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\vec{i} + \det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\vec{j} + \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\vec{k}$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $\mathcal{S}$ στο σημείο $\mathcal{S}(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$ και το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα

$$\vec{v} = \frac{\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\vec{i} + \det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\vec{j} + \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\vec{k}}{\sqrt{\left(\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(y,z)}{\partial(t,s)}\right)^2 + \left(\det\frac{\partial(z,x)}{\partial(t,s)}\right)^2}}$$

λέγεται μοναδιαίο κάθετο διανυσματικό πεδίο.

Αν $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο σε περιοχή της $\mathcal{S}$, το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{v}\, d\sigma$$

ονομάζεται **ροή** του διανυσματικού πεδίο $\vec{F}$ μέσω της επιφάνειας $\mathcal{S}$.

Παραδείγματα. **(1)** Το στοιχείο εμβαδού του ημισφαιρίου $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\le a^2$, είναι $d\sigma=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$.

(2) Ας θεωρήσουμε την σφαίρα S: $x^2+y^2+z^2=a^2$. Χρησιμοποιώντας για παραμέτρους τις σφαιρικές συντεταγμένες ϕ και θ, περιγράφουμε την σφαίρα S με τις παραμετρικές εξισώσεις $x=a\sin\phi\cos\theta$, $y=a\sin\phi\sin\theta$, $z=a\cos\phi$, $(\phi,\theta)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$. Τότε το στοιχείο εμβαδού είναι $d\sigma=a^2\sin\phi d\phi d\theta$.

(3) Δοθέντων αριθμών $a>b>0$, οι παραμετρικές εξισώσεις $x=(a+b\cos\phi)\cos\theta$, $y=(a+b\cos\phi)\sin\theta$, $z=b\sin\phi$, καθώς τα ϕ και θ κινούνται με $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le\phi\le 2\pi$, περιγράφουν την επιφάνεια Τ του *torus*, δηλαδή της επιφάνειας που παράγεται από τον κύκλο ακτίνας b, ο οποίος ευρίσκεται στο $xz-$επίπεδο και το κέντρου του οποίου είναι το σημείο $(a,0,0)$, όταν ο κύκλος αυτός περιστραφεί γύρω από τον άξονα των z. Υπολογίζοντας το στοιχείο εμβαδού βρίσκουμε $d\sigma=b(a+b\cos\phi)d\theta d\phi$.

Εφαρμογές των επιφανειακών ολοκληρωμάτων της μορφής $\iint\limits_{S} f\, d\sigma$.

(1) Η **μέση τιμή** της συνάρτησης f πάνω στην επιφάνεια S είναι

$$\bar{f}=\frac{\iint\limits_{S} f\, d\sigma}{\iint\limits_{S} d\sigma}=\frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(S)}\iint\limits_{S} f\, d\sigma.$$

(2) Οι συντεταγμένες του **κέντρου βάρους** $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ της επιφάνειας S δίδονται από τους τύπους

$$\bar{x}=\frac{\iint_S x\,d\sigma}{\iint_S d\sigma},\ \bar{y}=\frac{\iint_S y\,d\sigma}{\iint_S d\sigma},\ z=\frac{\iint_S z\,d\sigma}{\iint_S d\sigma}.$$

(3) Η **ροπή αδρανείας** της επιφάνειας S γύρω από τον άξονα των z δίδεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{S}(x^2+y^2)d\sigma$. Γενικότερα η ροπή αδρανείας της επιφάνειας S γύρω από μια δεδομένη ευθεία Ε δίδεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint\limits_{S}(dist[(x,y,z),\mathrm{E}])^2\,d\sigma$ όπου $dist[(x,y,z),\mathrm{E}]$ είναι η απόσταση των σημείων (x,y,z) της S από την ευθεία Ε.

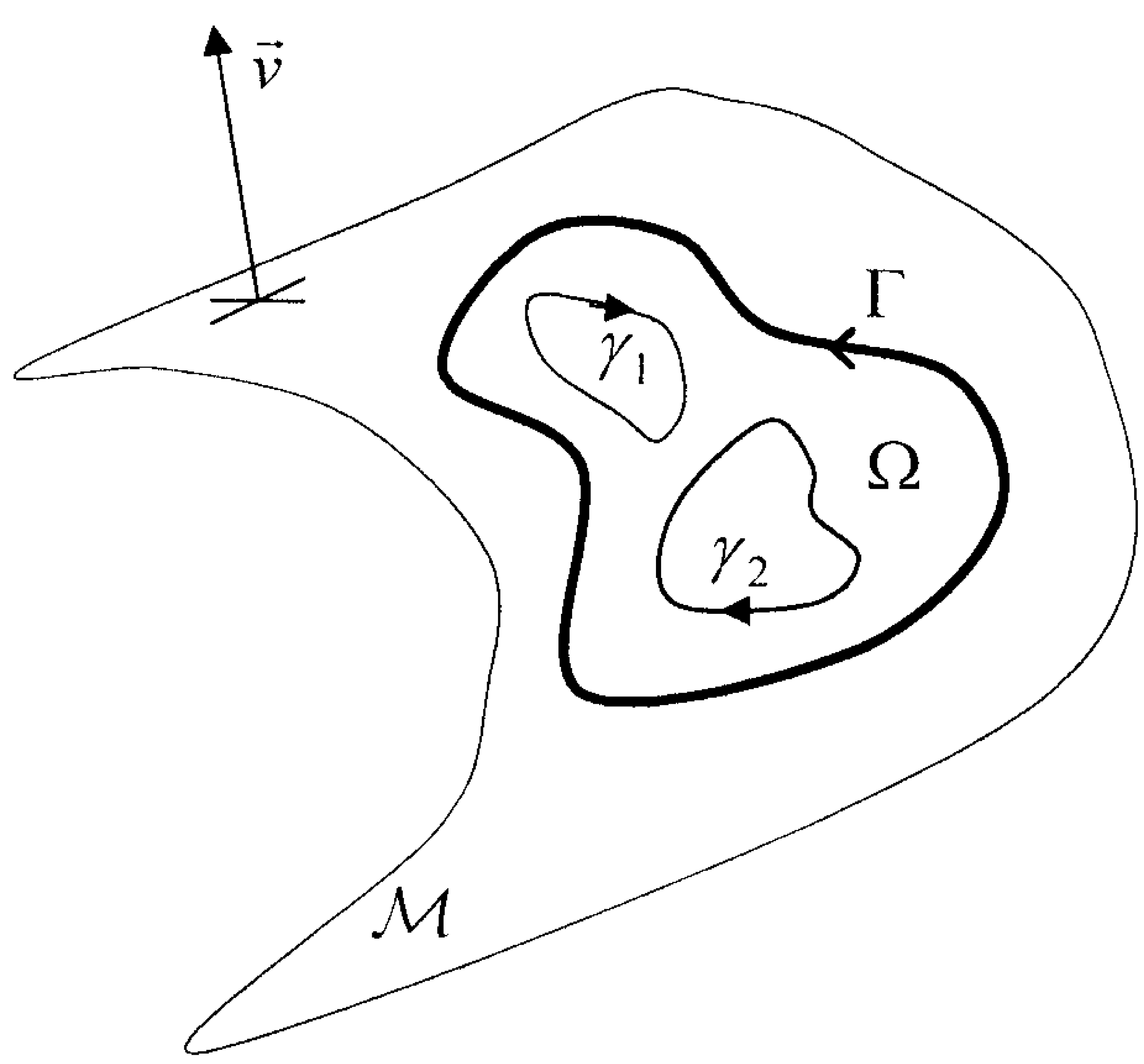
2. Θεώρημα του Stokes. *Έστω $\mathcal{M}$ μια ομαλή δισδιάστατη προσανατολισμένη επιφάνεια στον $xyz-$χώρο και ένα σύνολο $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ με κατά τμήματα ομαλό σύνορο. Τότε για ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$, C^1 σε περιοχή του $\overline{\Omega}$,*

$$\int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Omega} curl\vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma .$$

Ορολογία. Με $\vec{r}$ συμβολίζουμε το διάνυσμα θέσεως δηλαδή $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ και $\vec{F} \cdot d\vec{r} = Pdx + Qdy + Rdz$ (αν $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$). Επίσης ο **στροβιλισμός** $curl\vec{F}$ του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ ορίζεται από τον τύπο

$$curl\vec{F} = \det\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} .$$

Τέλος $\vec{\nu}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια $\mathcal{M}$, συμβατό με τον προσανατολισμό της – όσον αφορά την κατεύθυνση του – και $d\sigma$ είναι το στοιχείο εμβαδού της $\mathcal{M}$.



Όταν προσανατολίσουμε την επιφάνεια $\mathcal{M}$ όπως δείχνει το διάνυσμα $\vec{\nu}$ και το σύνορο του συνόλου $\Omega \subset\subset \mathcal{M}$ αποτελείται από την εξωτερική καμπύλη Γ και τις εσωτερικές καμπύλες γ_1 και γ_2, και τις προσανατολίσουμε όπως δείχνουν τα βέλη, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\partial\Omega}$ στο Θεώρημα του Stokes είναι

$$\int_{\partial\Omega} = \int_{\Gamma} + \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} .$$

Θεώρημα. *Για κάθε* C^2 *διανυσματικό πεδίο* $\vec{F}$,
$$div(curl\vec{F}) = 0.$$
Το αντίστροφο αυτού δεν ισχύει υπό την έννοια ότι η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου ενδέχεται να είναι μηδέν και το πεδίο να μην είναι ο στροβιλισμός κανενός πεδίου. Π.χ. το διανυσματικό πεδίο
$$\vec{N} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \text{ ορισμένο για } (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\},$$
έχει απόκλιση $div\vec{N} = 0$ *αλλά δεν υπάρχει* C^1 *διανυσματικό πεδίο* $\vec{F}$ *στο σύνολο* $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ *ώστε* $curl\vec{F} = \vec{N}$.

Ασκήσεις

1. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma [\sqrt{x^2+1}\vec{i} + x\vec{j} + 2y\vec{k}]\cdot d\vec{r}$ όπου γ είναι τομή της επιφάνειας $z = xy$ και του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$.

2. Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_\Omega curl\vec{F}\cdot\vec{v}d\sigma$ όπου
$$\vec{F}(x,y,z) = [e^{xz} + e^{x+2y}]\vec{i} + [\log(2+y+z) + 2e^{x+2y}]\vec{j} + 3xyz\vec{k}$$
και Ω είναι το μέρος της επιφάνειας $z = 1 - x^2 - y^2$ που ευρίσκεται πάνω από το $xy-$επίπεδο.

3. Αν Π είναι ένα επίπεδο παράλληλο προς τον άξονα των x και δεν είναι κάθετο στο $xy-$επίπεδο, και γ είναι η τομή του Π με τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = a^2$, δείξτε ότι
$$\int_\gamma [(yz - y)dx + (xz + x)dy] = 2\pi a^2.$$

4. Έστω $\vec{F}(x,y,z) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + (x^2 + y^2 + z^2)\vec{k}$ και S το κάτω μισό του ελλειψοειδούς $(x^2/4) + (y^2/9) + (z^2/27) = 1$. Υπολογίστε την ροή του $curl\vec{F}$ διαμέσω του S.

5. Εξηγήστε τον τύπο
$$curl\vec{F}\cdot\vec{v} = \lim_{\substack{p\in V\subset\Omega \\ diam(V)\to 0}} \frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(V)} \int_{\partial V} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

3. Θεώρημα απόκλισης του Gauss. *Έστω* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο στον* $xyz-$*χώρο, του οποίου το σύνορο* $\partial\Omega$ *να είναι κατά τμήματα ομαλό. Τότε για ένα διανυσματικό πεδίο* $\vec{F}$ *το οποίο είναι* C^1 *σε περιοχή του* $\overline{\Omega}$, *ισχύει ο τύπος:*

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{v}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} div\vec{F}\, dxdydz$$

όπου $\vec{v}$ *είναι το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια* $\partial\Omega$ *διανυσματικό πεδίο με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του* Ω, $d\sigma$ *είναι το στοιχείο εμβαδού του* $\partial\Omega$ *και* $div\vec{F}$ *είναι η απόκλιση του πεδίου* $\vec{F}$ *δηλαδή*

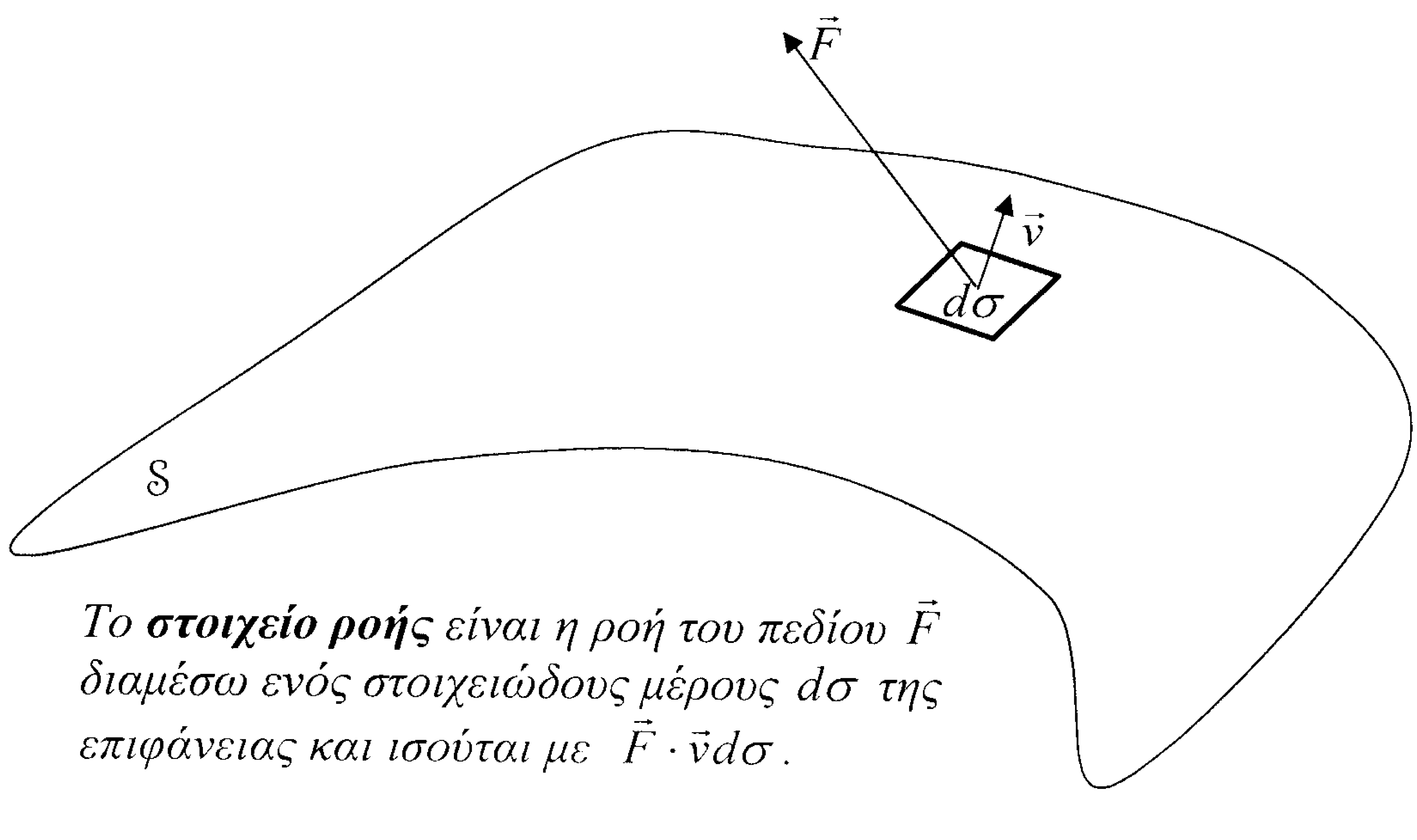
$$div\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{όταν } \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}.$$

Ροή διανυσματικού πεδίου. Το ολοκλήρωμα $\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \vec{v}\, d\sigma$ ονομάζεται **ροή** του διανυσματικού πεδίο $\vec{F}$ μέσω της επιφάνειας $\partial\Omega$. Γενικότερα αν S είναι μια επιφάνεια – όχι απαραίτητα κλειστή όπως είναι η $\partial\Omega$ – και $\vec{F}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο σε περιοχή της S τότε η ροή του $\vec{F}$ μέσω της S είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{S} \vec{F} \cdot \vec{v}\, d\sigma$. Επειδή

$$\lim_{\substack{V \ni (a,b,c) \\ diam(V) \to 0}} \frac{1}{\mathcal{O}\gamma\kappa(V)} \iiint_{V} div\vec{F} dxdydz = div\vec{F}(a,b,c),$$

έπεται από το *Θεώρημα Απόκλισης του Gauss* ότι

$$div\vec{F}(a,b,c) = \lim_{\substack{V \ni (a,b,c) \\ diam(V) \to 0}} \frac{1}{\mathcal{O}\gamma\kappa(V)} \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{v} d\sigma.$$



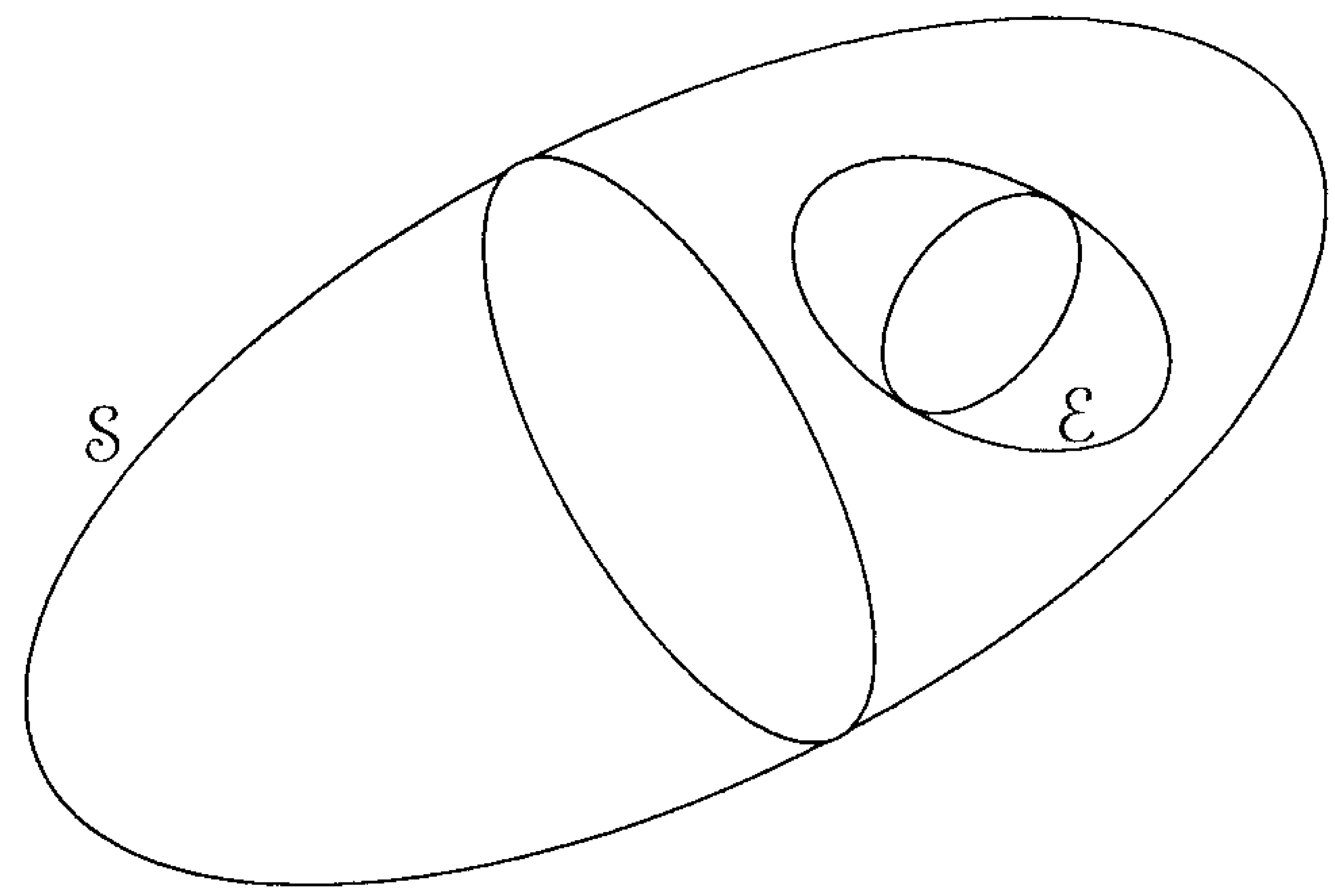
*Το **στοιχείο ροής** είναι η ροή του πεδίου* $\vec{F}$ *διαμέσω ενός στοιχειώδους μέρους* $d\sigma$ *της επιφάνειας και ισούται με* $\vec{F} \cdot \vec{v} d\sigma$.

4. Νόμος της ροής του Gauss. Ας θεωρήσουμε δυο «απλές» κλειστές επιφάνειες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{E}$ με την $\mathcal{E}$ μέσα στην $\mathcal{S}$. Αν Ω είναι το σύνολο ανάμεσα στις δυο αυτές επιφάνειες και $\vec{F}$ είναι ένα C^1 διανυσματικό πεδίο σε περιοχή του $\overline{\Omega}$ τότε

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma - \iint_{\mathcal{E}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} div\vec{F}dxdydz\,.$$

(Σκεφθείτε προσεκτικά την κατεύθυνση των διανυσμάτων $\vec{v}$ στα ανωτέρω επιφανειακά ολοκληρώματα.) Ιδιαιτέρως αν $div\vec{F}=0$ στα σημεία του Ω τότε

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma = \iint_{\mathcal{E}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma \quad \textit{(Αρχή της ομοτοπίας)}.$$



Αν $div\vec{F}=0$ *ανάμεσα στις επιφάνειες* $\mathcal{S}$ *και* $\mathcal{E}$ *τότε*

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma = \iint_{\mathcal{E}} \vec{F}\cdot\vec{v}\,d\sigma\,.$$

Ένα παράδειγμα διανυσματικού $\vec{F}$ με $div\vec{F}=0$ είναι το

$$\vec{\mathrm{N}} = \frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,.$$

Το εν λόγω διανυσματικό πεδίο ορίζεται στο $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ και $div\vec{\mathrm{N}}=0$. Έτσι αν οι επιφάνειες $\mathcal{S}$ και $\mathcal{E}$ περικλείουν το σημείο $(0,0,0)$ τότε

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{v}\,d\sigma = \iint_{\mathcal{E}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{v}\,d\sigma\,.$$

Αλλά αν η επιφάνεια $\mathcal{E}$ είναι μια μικρή σφαίρα με κέντρο το $(0,0,0)$ τότε υπολογίζουμε

$$\iint_{\mathcal{E}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{v}\,d\sigma = 4\pi\,.$$

Το συμπέρασμα είναι ότι

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{v}\,d\sigma = 4\pi \quad \textit{(Νόμος της ροής του Gauss)}$$

για <u>κάθε απλή κλειστή επιφάνεια</u> $\mathbb{S}$ που περιέχει το σημείο $(0,0,0)$ στο εσωτερικό της.

5. Τύποι του Green. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο στον $xyz-$χώρο, του οποίου το σύνορο $\partial\Omega$ να είναι κατά τμήματα ομαλό. Τότε για συναρτήσεις $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$,

$$\iint_{\partial\Omega} f\vec{\nabla}g \cdot \vec{v}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} (\vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g + f\Delta g)\, dxdydz$$

και

$$\iint_{\partial\Omega} (f\vec{\nabla}g - g\vec{\nabla}f)\cdot \vec{v}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)\, dxdydz,$$

όπου $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ και $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Οι τύποι αυτοί έπονται αμέσως από το *Θεώρημα του Gauss*. (Κάντε τους υπολογισμούς.) Επίσης την κατευθυνόμενη παράγωγο $\vec{\nabla}f \cdot \vec{v}$ την ονομάζουμε **κάθετη παράγωγο** (το «κάθετο» αναφέρεται βέβαια σε σχέση με την επιφάνεια $\partial\Omega$) και την συμβολίζουμε με $\frac{\partial f}{\partial v}$, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial v} = \vec{\nabla}f \cdot \vec{v}$. Με αυτόν τον συμβολισμό οι τύποι του *Green* γράφονται ως εξής:

$$\iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial v}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} (\vec{\nabla}f \cdot \vec{\nabla}g + f\Delta g)\, dxdydz$$

και

$$\iint_{\partial\Omega} \left(f\frac{\partial g}{\partial v} - g\frac{\partial f}{\partial v} \right) d\sigma = \iiint_{\Omega} (f\Delta g - g\Delta f)\, dxdydz.$$

Ιδιαιτέρως αν οι συναρτήσεις f, g είναι αρμονικές στο Ω (αν δηλαδή $\Delta f = \Delta g = 0$) τότε

$$\iint_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial v}\, d\sigma = \iint_{\partial\Omega} g\frac{\partial f}{\partial v}\, d\sigma.$$

[Εννοείται βέβαια ότι εξακολουθούμε να υποθέτουμε $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$.]

Παραδείγματα. **1.** Έστω $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathbb{S}^2} x^2 d\sigma = \iint_{\partial \mathrm{B}} \vec{F} \cdot \vec{v}\, d\sigma$$

όπου $\mathrm{B} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$ και $\vec{F} = x\vec{i}$. Επομένως – από το *Θεώρημα του Gauss* – το δοθέν ολοκλήρωμα ισούται με

$$\iiint_{\mathrm{B}} div\vec{F}\, dxdydz = \iiint_{\mathrm{B}} dxdydz = \frac{4\pi}{3}.$$

2. Από τον νόμο της ροής του *Gauss*,

$$\iint_{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2=1} \frac{d\sigma}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}(\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2)^{1/2}} = 4\pi \ \ (\alpha,\beta,\gamma>0).$$

Ασκήσεις.

1. Κάντε αναλυτικά τον υπολογισμό $div\vec{\mathrm{N}}=0$.

2. Κάντε αναλυτικά τον υπολογισμό $\iint_{x^2+y^2+z^2=r^2} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma = 4\pi$ (για $r>0$).

3. Αν το σημείο (0,0,0) ευρίσκεται στο εξωτερικό της επιφάνειας $\mathcal{S}$, ποιά είναι η τιμή του ολοκληρώματος $\iint_{\mathcal{S}} \vec{\mathrm{N}}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma$;

4. Μελετήστε το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\vec{\nu}\,d\sigma$ όπου

$$\vec{F} = \frac{(x-a)\vec{i}+(y-b)\vec{j}+(z-c)\vec{k}}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{3/2}}$$

και το σημείο $(a,b,c)\notin[\mathcal{S}]$. (Η $\mathcal{S}$ υποτίθεται ότι είναι μια απλή κλειστή επιφάνεια.)

5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2=1} \sqrt{\alpha^4x^2+\beta^4y^2+\gamma^4z^2}\,d\sigma.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}=\alpha^2x\vec{i}+\beta^2y\vec{j}+\gamma^2z\vec{k}$.