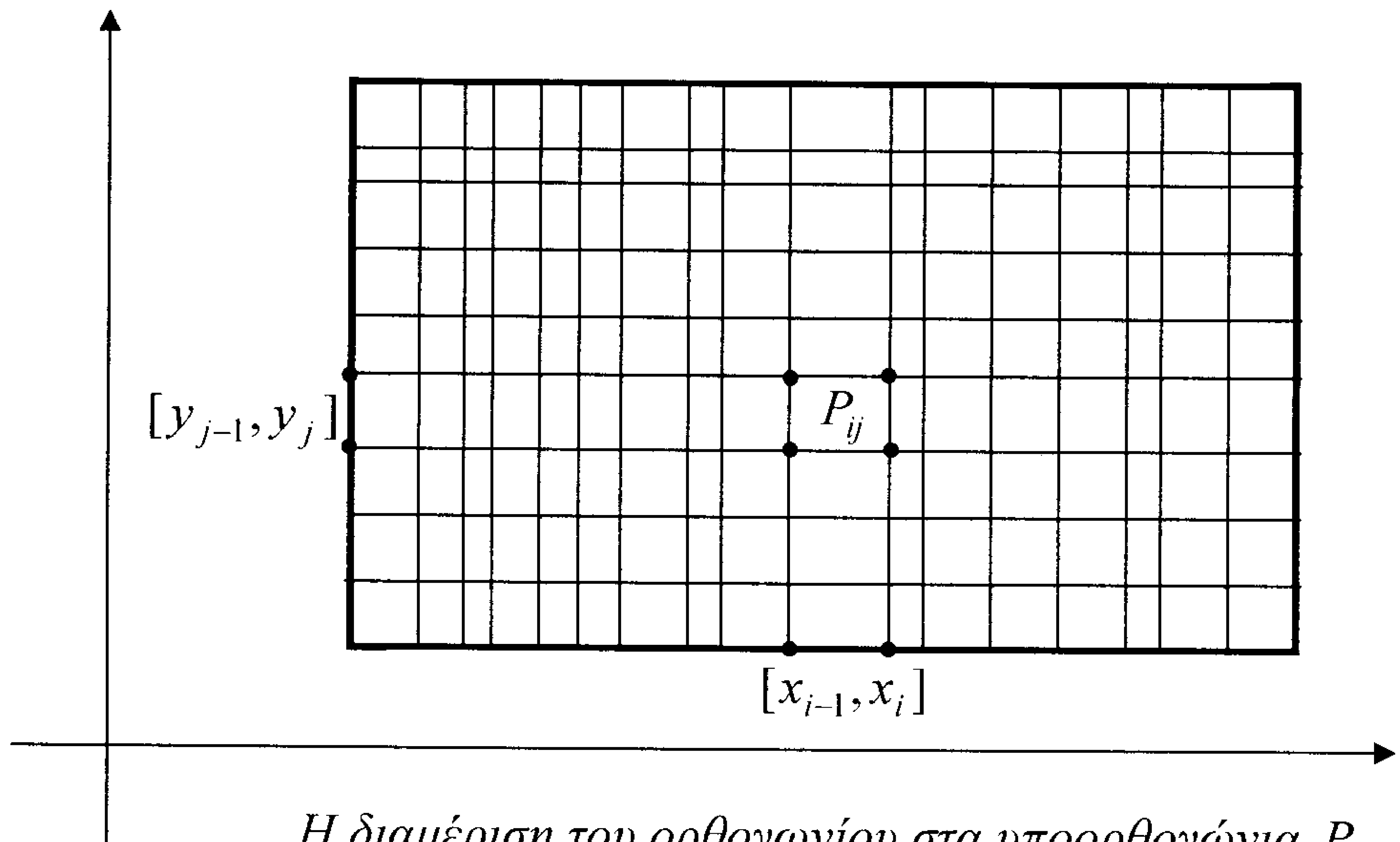
12. Διπλά ολοκληρώματα

12.1. Ορισμός διπλού ολοκληρώματος. Μια διαμέριση $P=\{P_{ij}\}$ του ορθογωνίου

$$\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]=\{(x,y):\ \alpha\le x\le\beta,\ \gamma\le y\le\delta\}$$

στο xy - επίπεδο αποτελείται από μια διαμέριση $\alpha=x_0<x_1<\cdots<x_N=\beta$ του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ και από μια διαμέριση $\gamma=y_0<y_1<\cdots<y_M=\delta$ του διαστήματος $[\gamma,\delta]$, οι οποίες διαμερίσεις ορίζουν τα υποορθογώνια P_{ij} της P, δηλαδή $P_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, $i=1,2,\ldots,N$ και $j=1,2,\ldots,M$.



Η διαμέριση του ορθογωνίου στα υποορθογώνια P_{ij}.

Σε ένα τέτοιο ορθογώνιο $\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$, θεωρούμε μια <u>φραγμένη</u> συνάρτηση $f:\Pi\to\mathbb{R}$. Για κάθε διαμέριση $P=\{P_{ij}\}$ του ορθογωνίου Π ορίζουμε τα αντίστοιχα **άνω** και **κάτω** αθροίσματα της συνάρτησης f, ως εξής:

$$U(f,P)=\sum_{i,j}\sup\{f(x,y):(x,y)\in P_{ij}\}\,\mathcal{E}\mu\beta(P_{ij})\quad\text{και}\quad L(f,P)=\sum_{i,j}\inf\{f(x,y):(x,y)\in P_{ij}\}\,\mathcal{E}\mu\beta(P_{ij}).$$

Προφανώς $L(f,P)\le U(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του ορθογωνίου Π. Αλλά, επιπλέον,

$$L(f,P)\le U(f,T)\ \text{ για κάθε } P,T \text{ διαμερίσεις του } \Pi,$$

και συνεπώς $\sup_P L(f,P)\le\inf_T U(f,T)$, όπου P και T διατρέχουν το σύνολο των διαμερίσεων του Π. Ορίζουμε το **κάτω ολοκλήρωμα** $\mathcal{L}\iint_\Pi f(x,y)dxdy$ της συνάρτησης f πάνω στο ορθογώνιο Π από τον τύπο

$$\mathcal{L}\iint_\Pi f(x,y)dxdy=\sup_P L(f,P),$$

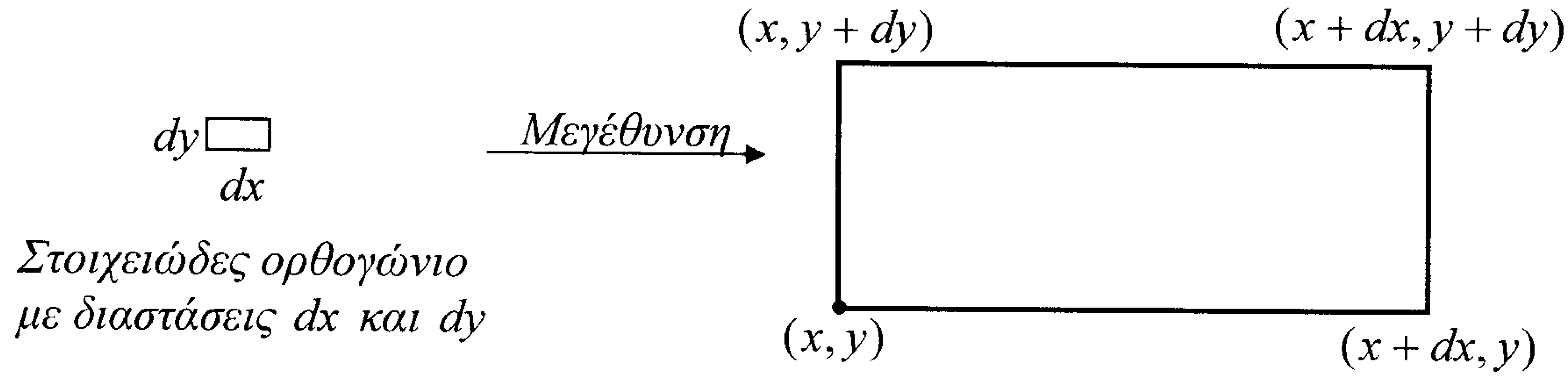
και ομοίως ορίζεται και το **άνω ολοκλήρωμα**

$$\mathcal{U}\iint_\Pi f(x,y)dxdy=\inf_P U(f,P).$$

Και βέβαια για κάθε φραγμένη συνάρτηση f ισχύει $\mathcal{L}\iint_\Pi f(x,y)dxdy\le\mathcal{U}\iint_\Pi f(x,y)dxdy$. Η φραγμένη συνάρτηση $f:\Pi\to\mathbb{R}$ λέγεται ότι είναι **ολοκληρώσιμη** — κατά *Riemann* — πάνω στο ορθογώνιο Π αν στην ανωτέρω σχέση ισχύει η ισότητα, την δε κοινή τιμή του άνω και κάτω ολοκληρώματος την ονομάζουμε ολοκλήρωμα — **διπλό ολοκλήρωμα** — της συνάρτησης f πάνω στο Π, και το συμβολίζουμε με $\iint_\Pi f(x,y)dxdy$. Δηλαδή τότε

$$\iint_\Pi f(x,y)dxdy=\mathcal{L}\iint_\Pi f(x,y)dxdy=\mathcal{U}\iint_\Pi f(x,y)dxdy.$$

Επίσης στην περίπτωση που η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη, το ολοκλήρωμα $\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy$ είναι ο μοναδικός αριθμός $\mathcal{I}$ με την ιδιότητα: $L(f,P) \le \mathcal{I} \le U(f,P)$, για κάθε διαμέριση P του Π.



Το ολοκλήρωμα $\iint_{\Pi} f(x,y)dxdy$ είναι
*το «**συνεχές άθροισμα**» των στοιχειωδών ποσοτήτων $f(x,y)dxdy$.*

12.2. Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann. *Μια φραγμένη συνάρτηση $f : \Pi \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη (κατά Riemann) αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση $P_0 = P_0(\varepsilon)$ του ορθογωνίου Π, ούτως ώστε*

$$U(f,P_0) - L(f,P_0) < \varepsilon .$$

Τότε μάλιστα $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ για κάθε διαμέριση P λεπτότερη από την P_0.

12.3. Ιδιότητες του ολοκληρώματος και βασικά θεωρήματα. 1. ***Το ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης.*** Η σταθερή συνάρτηση 1 είναι ολοκληρώσιμη πάνω σε κάθε ορθογώνιο Π και ότι το ολοκλήρωμά της είναι το **εμβαδόν** του Π: $\iint\limits_{\Pi} 1dxdy = \iint\limits_{\Pi} dxdy = \mathcal{E}\mu\beta(\Pi)$. Και γενικότερα το ολοκλήρωμα της σταθερής συνάρτησης λ είναι

$$\iint\limits_{\Pi} \lambda dxdy = \lambda \iint\limits_{\Pi} dxdy = \lambda\, \mathcal{E}\mu\beta(\Pi) .$$

2. ***Το ολοκλήρωμα σαν όγκος στερεού.*** Αν $f : \Pi \to \mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση ≥ 0, τότε η τιμή του ολοκληρώματος $\iint\limits_{\Pi} f$ είναι ίση με τον **όγκο** του στερεού $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Pi \ \textit{και} \ 0 \le z \le f(x,y)\}$.

3. ***Η γραμμικότητα του ολοκληρώματος.*** Αν $f, g : \Pi \to \mathbb{R}$ είναι δυο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τότε και το άθροισμα αυτών είναι ολοκληρώσιμη και μάλιστα $\iint\limits_{\Pi}(f+g) = \iint\limits_{\Pi} f + \iint\limits_{\Pi} g$. Και αν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε και η συνάρτηση λf είναι ολοκληρώσιμη και $\iint\limits_{\Pi} \lambda f = \lambda \iint\limits_{\Pi} f$.

4. ***Ολοκλήρωμα και διάταξη συναρτήσεων.*** Αν οι συναρτήσεις $f, g : \Pi \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες και $f \le g$, τότε $\iint\limits_{\Pi} f \le \iint\limits_{\Pi} g$. Ιδιαιτέρως αν $m \le f(x,y) \le M$ για κάθε $(x,y) \in \Pi$, τότε

$$m \cdot \mathcal{E}\mu\beta(\Pi) \le \iint\limits_{\Pi} f \le M \cdot \mathcal{E}\mu\beta(\Pi) .$$

Και αφού $-\sup\limits_{\Pi}|f| \le f \le \sup\limits_{\Pi}|f|$, έπεται ότι $\left|\iint\limits_{\Pi} f\right| \le \sup\limits_{\Pi}|f| \cdot \mathcal{E}\mu\beta(\Pi)$.

5. ***Ολοκληρωσιμότητα της απολύτου τιμής μιας συνάρτησης.*** Αν η συνάρτηση $f : \Pi \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, το ίδιο ισχύει και για την συνάρτηση $|f|$. Επίσης έχουμε την τριγωνική ανισότητα:

$$\left|\iint\limits_{\Pi} f\right| \le \iint\limits_{\Pi} |f| .$$

Αν τώρα $f, g : \Pi \to \mathbb{R}$ είναι δυο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις

$$\max(f,g)=\frac{f+g+|f-g|}{2} \quad \text{και} \quad \min(f,g)=\frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

Ιδιαιτέρως, αν $f:\Pi\to\mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις

$$f^{+}=\max(f,0) \quad \text{και} \quad f^{-}=-\min(f,0).$$

Και αφού $f=f^{+}-f^{-}$, έπεται ότι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση είναι διαφορά δυο μη αρνητικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

6. ***Γινόμενο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη.***

7. ***Ολοκληρωσιμότητα συνεχών συναρτήσεων.*** Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

8. Ολοκληρωσιμότητα της σύνθεσης $\phi\circ f$ με συνεχή ϕ και ολοκληρώσιμη f. Έστω $f:\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση, και ας πούμε ότι $m\le f(x,y)\le M$, για κάθε $(x,y)\in\Pi$, όπου $-\infty<m<M<\infty$. Ας θεωρήσουμε επίσης μια συνεχή συνάρτηση $\phi:[m,M]\to\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη, το ίδιο ισχύει και για την συνάρτηση $\phi\circ f:\Pi\to\mathbb{R}$.

12.4. Θεώρημα. *Έστω $f:\Pi\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση πάνω στο ορθογώνιο $\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη. Μάλιστα για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\eta=\eta(\varepsilon)>0$ ώστε για κάθε διαμέριση $P=\{Q\}$ του ορθογωνίου Π, της οποίας η λεπτότητα $\|P\|=\max\{diam(Q):Q\in P\}<\eta$, και για κάθε επιλογή σημείων $\xi_Q\in Q$, ως προς την διαμέριση αυτή, να έχουμε $\left|\sum_{Q\in P} f(\xi_Q)\mathcal{E}\mu\beta(Q)-\iint_{\Pi} f\right|<\varepsilon$. Δηλαδή $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{Q\in P} f(\xi_Q)\mathcal{E}\mu\beta(Q)=\iint_{\Pi} f$.*

12.5. Το σύνολο των σημείων ασυνέχειας και ολοκληρωσιμότητα συναρτήσεων. Ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^2$ λέγεται ότι έχει **περιεχόμενο μηδέν** αν, για κάθε $\varepsilon>0$, είναι δυνατόν να καλυφθεί από πεπερασμένου πλήθους ορθογώνια συνολικού εμβαδού <u>μικρότερου</u> του ε. Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν ορθογώνια $R_1,R_2,\dots,R_N$ (που εξαρτώνται από το ε), ούτως ώστε

$$A\subset R_1\cup R_2\cup\cdots\cup R_N \quad \text{και} \quad \mathcal{E}\mu\beta(R_1)+\mathcal{E}\mu\beta(R_2)+\cdots+\mathcal{E}\mu\beta(R_N)<\varepsilon.$$

Ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^2$ λέγεται ότι έχει **μέτρο μηδέν** αν, για κάθε $\varepsilon>0$, είναι δυνατόν να καλυφθεί από αριθμήσιμου πλήθους ορθογώνια συνολικού εμβαδού <u>μικρότερου</u> του ε. Δηλαδή, αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχουν ορθογώνια $R_1,R_2,R_3,\dots$ (που εξαρτώνται από το ε), ούτως ώστε

$$A\subset R_1\cup R_2\cup R_3\cup\cdots \quad \text{και} \quad \mathcal{E}\mu\beta(R_1)+\mathcal{E}\mu\beta(R_2)+\mathcal{E}\mu\beta(R_3)+\cdots<\varepsilon.$$

Πρόταση. Ας θεωρήσουμε μια συνεχή συνάρτηση $\phi:[\lambda,\mu]\to\mathbb{R}$. Τότε το γράφημά της στο επίπεδο, δηλαδή το σύνολο $A=\{(x,y):y=\phi(x),\ x\in[\lambda,\mu]\}$, έχει περιεχόμενο μηδέν.

12.6. Θεώρημα. (*Lebesgue*) *Έστω $f:\Pi\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση πάνω στο ορθογώνιο $\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$ και A_f το σύνολο των σημείων του Π στα οποία η συνάρτηση f είναι ασυνεχής. Τότε η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το μέτρο του συνόλου A_f είναι μηδέν.*

12.7. Θεώρημα. *Έστω $f:\Pi\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση πάνω στο ορθογώνιο $\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$. Τότε για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\eta=\eta(\varepsilon)>0$ ώστε για κάθε διαμέριση $P=\{Q\}$ του ορθογωνίου Π, της οποίας η λεπτότητα $\|P\|<\eta$, και για κάθε επιλογή σημείων $\xi_Q\in Q$, ως προς την διαμέριση αυτή, να έχουμε*

$$\left|\sum_{Q\in P} f(\xi_Q)\mathcal{E}\mu\beta(Q)-\iint_{\Pi} f\right|<\varepsilon.$$

Αλλά και αντίστροφα, αν $f:\Pi\to\mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη συνάρτηση και $\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{Q\in P} f(\xi_Q)\mathcal{E}\mu\beta(Q)=\mathcal{I}$, για κάποιον αριθμό $\mathcal{I}$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\iint_{\Pi} f=\mathcal{I}$.

Εφαρμογή. $\displaystyle\lim_{N,M\to\infty}\frac{(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)}{NM}\sum_{\substack{1\le k\le N\\1\le l\le M}} f\left(\alpha+\frac{k}{N}(\beta-\alpha),\gamma+\frac{l}{M}(\delta-\gamma)\right)=\iint_{\Pi} f$ (Η συνάρτηση f υποτίθεται ολοκληρώσιμη). Ιδιαιτέρως

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(\beta-\alpha)(\delta-\gamma)}{N^2}\sum_{1\le k,l\le N} f\left(\alpha+\frac{k}{N}(\beta-\alpha),\gamma+\frac{l}{N}(\delta-\gamma)\right)=\iint_{\Pi} f .$$

12.8. Ολοκλήρωμα σε σύνολα των οποίων το σύνορο έχει μέτρο μηδέν. Ας θεωρήσουμε ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο $D\subset\mathbb{R}^2$ και μια συνεχή συνάρτηση $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$. Θα ορίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D f(x,y)dxdy ,$$

της συνάρτησης f πάνω στο D, με την προϋπόθεση το <u>σύνορο</u> του D <u>να έχει μέτρο μηδέν</u>. Για τον σκοπό αυτόν, ας παρατηρήσουμε ότι η χαρακτηριστική συνάρτηση του συνόλου D, δηλαδή η συνάρτηση

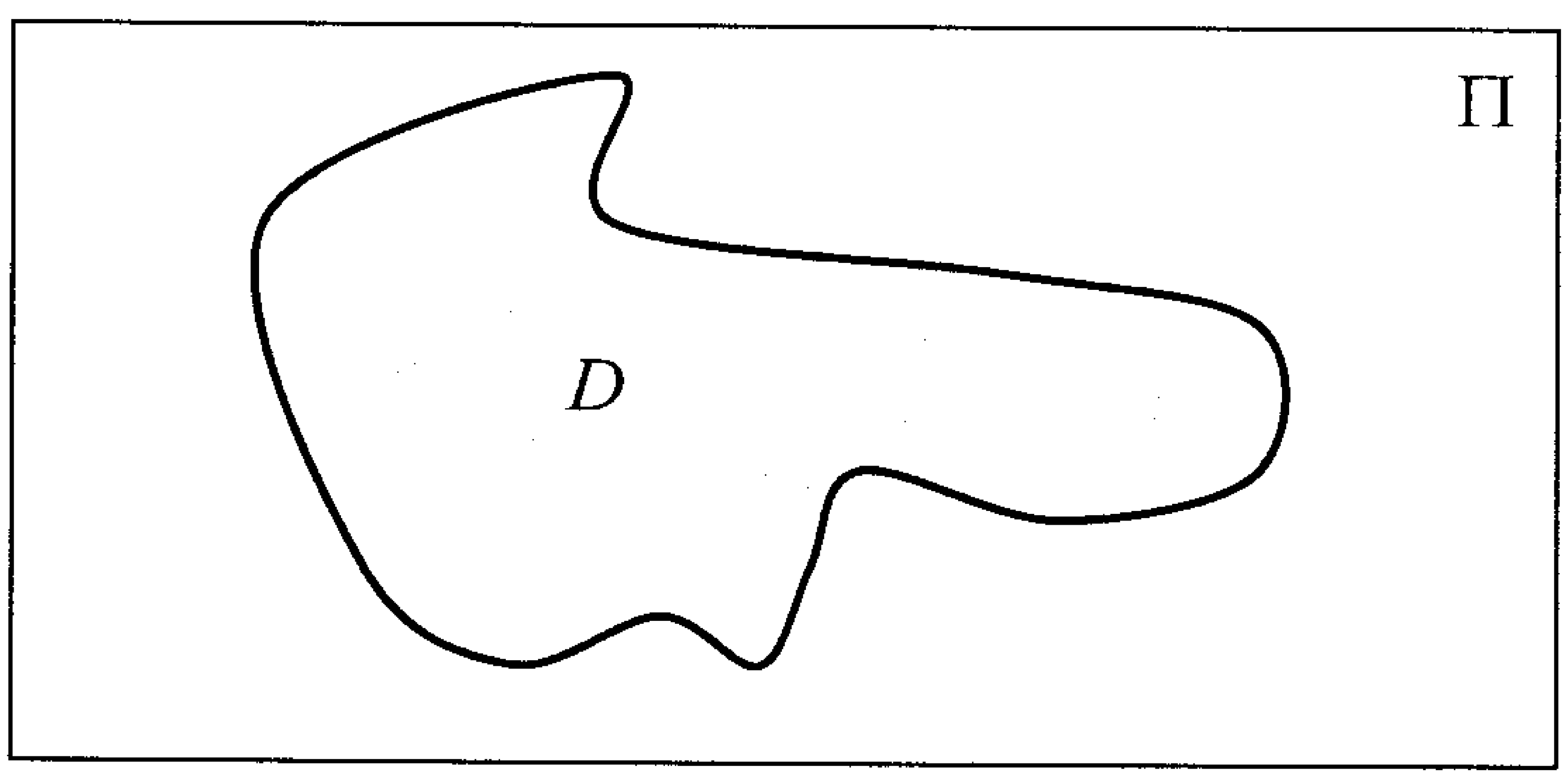
$$\chi_D:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ \chi_D(x,y)=\begin{cases}1 & \alpha\nu\ \ (x,y)\in D\\ 0 & \alpha\nu\ \ (x,y)\notin D,\end{cases}$$

είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου $\mathbb{R}^2-\partial D$ και ασυνεχής σε κάθε σημείο του ∂D. Συνεπώς η συνάρτηση $\chi_D f$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου $\mathbb{R}^2-\partial D$. Βέβαια εννοείται ότι

$$(\chi_D f)(x,y)=\begin{cases}f(x,y) & \alpha\nu\ \ (x,y)\in D\\ 0 & \alpha\nu\ \ (x,y)\notin D.\end{cases}$$

Αν επομένως πάρουμε ένα ορθογώνιο Π με $\Pi\supset\overline{D}$, και $A_{\chi_D f}$ είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της συνάρτησης $\chi_D f|_{\Pi}$, τότε $A_{\chi_D f}\subset\partial D$, και συνεπώς το μέτρο του συνόλου $A_{\chi_D f}$ είναι μηδέν. Επομένως η συνάρτηση $\chi_D f$ είναι ολοκληρώσιμη πάνω στο Π, και ορίζουμε

$$\iint_D f=\iint_D f(x,y)dxdy\overset{o\rho}{=}\iint_{\Pi}\chi_D f .$$



Παίρνουμε ένα ορθογώνιο $\Pi\supset\overline{D}$ και ορίζουμε: $\iint_D f=\iint_{\Pi}\chi_D f$.

Ιδιαιτέρως ορίζεται το ολοκλήρωμα $\iint_{\Pi}\chi_D f$ με $f\equiv 1$, και αυτό δίνει το **εμβαδόν** του συνόλου D:

$$\mathcal{E}\mu\beta(D)\overset{o\rho}{=}\iint_D dxdy=\iint_{\Pi}\chi_D dxdy .$$

Βέβαια εξακολουθούμε να υποθέτουμε ότι το μέτρο του ∂D είναι μηδέν. Γενικότερα, αν η συνεχής συνάρτηση $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$ είναι μη αρνητική, το ολοκλήρωμα $\iint_D f$ δίνει τον **όγκο** $\mathcal{O}\gamma\kappa(G)$ του στερεού:

$$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 0<z<f(x,y)\ \ \kappa\alpha\iota\ \ (x,y)\in D\}.\ \text{Δηλαδή}\ \mathcal{O}\gamma\kappa(G)=\iint_D f(x,y)dxdy .$$

12.9. Βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος $\iint_D f$. 1. Προσθετικότητα του ολοκληρώματος $\iint_D f$ ως προς το σύνολο D. Δηλαδή αν D_1 και D_2 είναι δυο ανοικτά σύνολα στο επίπεδο των οποίων τα σύνορα έχουν μέτρο μηδέν, και $D_1\cap D_2=\varnothing$, και αν $f:\overline{D_1\cup D_2}\to\mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε $\iint_{D_1\cup D_2} f=\iint_{D_1} f+\iint_{D_2} f$.

Ιδιαιτέρως $\mathcal{E}\mu\beta(D_1 \cup D_2) = \mathcal{E}\mu\beta(D_1) + \mathcal{E}\mu\beta(D_2)$.

2. Αν τώρα τα σύνολα D_1, D_2 δεν είναι ξένα μεταξύ των, ισχύει το εξής:

$$\mathcal{E}\mu\beta(D_1 \cup D_2) \le \mathcal{E}\mu\beta(D_1) + \mathcal{E}\mu\beta(D_2).$$

Αυτό έπεται από το ότι $\chi_{D_1 \cup D_2} \le \chi_{D_1} + \chi_{D_2}$. Και γενικότερα

$$\mathcal{E}\mu\beta(D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_N) \le \mathcal{E}\mu\beta(D_1) + \mathcal{E}\mu\beta(D_2) + \cdots + \mathcal{E}\mu\beta(D_N).$$

3. Για συνεχείς συναρτήσεις $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$, $\left|\iint_D f\right| \le \sup_D |f| \cdot \mathcal{E}\mu\beta(D)$. Και γενικότερα αν $m \le f \le M$ στα σημεία του D, τότε $m \cdot \mathcal{E}(D) \le \iint_D f \le M \cdot \mathcal{E}\mu\beta(D)$.

4. Αν $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, $f \ge 0$ και $\iint_D f(x,y)dxdy = 0$ τότε $f \equiv 0$.

5. Σύνολα με μέτρο μηδέν είναι αμελητέα για την ολοκλήρωση.

Ορισμός. Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο, του οποίου το σύνορο έχει μέτρο μηδέν, και $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε για κάθε σύνολο E, με $D \subset E \subset \overline{D}$, ορίζουμε

$$\iint_E f \overset{op}{=} \iint_D f.$$

Πρακτικά, η σημασία του ανωτέρω ορισμού είναι η εξής: Όταν γράφουμε ένα ολοκλήρωμα $\iint_E f$ δεν χρειάζεται να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί για το εάν το σύνολο E είναι ένα ανοικτό σύνολο D ή το D μαζί με κάποια σημεία του ∂D. Εκείνο όμως που έχει οπωσδήποτε ιδιαίτερη σημασία είναι η συνάρτηση να είναι ορισμένη και φραγμένη πάνω στο $\overline{D}$, μάλιστα δε εμείς την υποθέσαμε και συνεχή στο $\overline{D}$. Αλλιώς, ενδέχεται να υπάρχουν προβλήματα σύγκλισης του ολοκληρώματος $\iint_E f$, στα οποία θα επανέλθουμε αργότερα.

12.10. Ολοκληρώματα και φυσικά μεγέθη. Έχουμε ήδη δει ότι το διπλό ολοκλήρωμα είναι $\iint_D f(x,y)dxdy$ είναι ο όγκος του στερεού που φράσσεται από πάνω από την επιφάνεια $z = f(x,y)$. Εκτός αυτής της γεωμετρικής εφαρμογής, υπάρχουν πάμπολλες εφαρμογές του ολοκληρώματος κυρίως στον υπολογισμό φυσικών μεγεθών, και στην παράγραφο αυτή θα συζητήσουμε κάποιες από αυτές.

Μέση τιμή συνάρτησης. Δοθείσης συνάρτησης $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$, ο αριθμός

$$\bar{f} = \frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(D)} \iint_D f(x,y)dxdy,$$

λέγεται μέση τιμή της συνάρτησης f πάνω στο σύνολο D.

Κέντρο μάζας μιας επίπεδης πλάκας. Δοθείσης ομογενούς επίπεδης πλάκας $D \subset \mathbb{R}^2$, στο $xy-$επίπεδο, το κέντρο μάζας αυτής έχει συντεταγμένες το σημείο $(\bar{x}, \bar{y})$, όπου

$$\bar{x} = \frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(D)} \iint_D x dxdy \quad \text{και} \quad \bar{y} = \frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(D)} \iint_D y dxdy.$$

Ροπή αδρανείας μιας επίπεδης πλάκας. Δοθείσης επίπεδης πλάκας $D \subset \mathbb{R}^2$, στο $xy-$επίπεδο, με σταθερή πυκνότητα $\rho = 1$, η ροπή αδρανείας αυτής ως προς κάποιον άξονα περιστροφής α του $xyz-$χώρου, δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$I_\alpha = \iint_D (dist[(x,y),\alpha])^2 dxdy,$$

όπου $dist[(x,y),\alpha]$ είναι η απόσταση του σημείου (x,y) από τον άξονα α. Η σημασία της ποσότητας I_α είναι ότι όταν η πλάκα D περιστρέφεται γύρω από τον άξονα α με γωνιακή ταχύτητα ω, τότε η κινητική της ενέργεια που οφείλεται σε αυτή την περιστροφή είναι ίση με $I_\alpha \omega^2 / 2$.

12.11. Ασκήσεις. 1. Υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{N,M\to\infty} \frac{M}{N^{1+\sqrt{2}}} \sum_{\substack{1\le k\le N \\ 1\le l\le M}} \frac{k^{\sqrt{2}}}{M^2+l^2}, \quad \lim_{N,M\to\infty} \frac{1}{N^{1+\pi}} \sum_{\substack{1\le k\le N \\ 1\le l\le M}} \frac{k^{\pi}}{\sqrt{M^2+l^2}}.$$

2. Έστω $D\subset\mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο του οποίου το σύνορο έχει περιεχόμενο μηδέν. Δείξτε ότι αν $f_k:\overline{D}\to\mathbb{R}$, $k=1,2,3,\ldots$, είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$ τότε $\iint\limits_D f_k\to\iint\limits_D f$ του $k\to\infty$.

3. Κατασκευάστε ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, του οποίου το σύνορο να μην έχει περιεχόμενο (ή μέτρο) μηδέν.

4. Θεωρήστε μια συνεχή συνάρτηση $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$ και δείξτε ότι

$$\lim_{k\to\infty}\left(\iint\limits_D |f|^k\right)^{1/k}=\max_{\overline{D}}|f|.$$

5. Θεωρήστε τον γραμμικό χώρο $C([\alpha,\beta])$ των συνεχών συναρτήσεων της μορφής $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ και ορίστε την απεικόνιση $(f,g)\to\langle f,g\rangle$ με

$$\langle f,g\rangle=\int\limits_{t=\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt,\ \text{για } f,g\in C([\alpha,\beta]).$$

Δείξτε ότι η σύζευξη $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $C([\alpha,\beta])$ με αντίστοιχη νόρμα

$$\|f\|=\sqrt{\langle f,f\rangle}=\left(\int\limits_{t=\alpha}^{\beta} f^2(t)dt\right)^{1/2}.$$

Ιδιαιτέρως δείξτε την ανισότητα *Cauchy-Schwarz* $|\langle f,g\rangle|\le\|f\|\|g\|$ και την τριγωνική ανισότητα $\|f+g\|\le\|f\|+\|g\|$. Πότε ισχύει η ισότητα $|\langle f,g\rangle|=\|f\|\|g\|$; Πότε ισχύει η ισότητα $\|f+g\|=\|f\|+\|g\|$;

Υπόδειξη: $\langle f-\lambda g,f-\lambda g\rangle\ge 0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

6. Διατυπώστε και αποδείξτε τα ανάλογα της προηγούμενης άσκησης με τον χώρο $C(\overline{D})$ των συνεχών συναρτήσεων της μορφής $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$ και το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f,g\rangle=\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy,\ \text{για } f,g\in C(D).$$

7. Έστω p,q θετικοί αριθμοί με $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Αποδείξτε την ανισότητα του *Hölder*:

$$\left|\int\limits_{t=\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt\right|\le\left(\int\limits_{t=\alpha}^{\beta}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}\left(\int\limits_{t=\alpha}^{\beta}|g(t)|^q dt\right)^{1/q},$$

καθώς και την ανάλογη ανισότητα για διπλά ολοκληρώματα.

8. Αποδείξτε την ανισότητα του *Minkowski*:

$$\left(\int\limits_{t=\alpha}^{\beta}|f(t)+g(t)|^p dt\right)^{1/p}\le\left(\int\limits_{t=\alpha}^{\beta}|f(t)|^p dt\right)^{1/p}+\left(\int\limits_{t=\alpha}^{\beta}|g(t)|^p dt\right)^{1/p}\quad (p\ge 1),$$

καθώς και την ανάλογη ανισότητα για διπλά ολοκληρώματα.

12.12. Θεώρημα του Fubini. *Έστω $\Pi=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$ ένα ορθογώνιο στο $xy-$επίπεδο και $f:\Pi\to\mathbb{R}$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε ένα από τα $x\in[\alpha,\beta]$, θέτουμε $g_x(y)=f(x,y)$, $y\in[\gamma,\delta]$, και ορίζουμε τις συναρτήσεις $g_x:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$. Επίσης θεωρούμε τις συναρτήσεις*

$$\mathcal{L}(x)\overset{op}{=}\mathcal{L}\int\limits_{\gamma}^{\delta} g_x=\mathcal{L}\int\limits_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy\quad \textit{και}\quad \mathcal{U}(x)\overset{op}{=}\mathcal{U}\int\limits_{\gamma}^{\delta} g_x=\mathcal{U}\int\limits_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy,$$

ορισμένες για $x\in[\alpha,\beta]$. Τότε οι συναρτήσεις $\mathcal{L}$ και $\mathcal{U}$ είναι ολοκληρώσιμες πάνω στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, και μάλιστα

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,y)dxdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\mathcal{L}(x)dx=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\mathcal{U}(x)dx.$$

Πόρισμα. *Αν επιπλέον οι συναρτήσεις* $g_x:[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$, $x\in[\alpha,\beta]$, *είναι όλες ολοκληρώσιμες, τότε*

$$\iint_{\Pi} f(x,y)dxdy=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy\right)dx.$$

Και αν για τα $y\in[\gamma,\delta]$, *ορίσουμε και τις συναρτήσεις*

$$h_y:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R},\ \text{με}\ h_y(x)=f(x,y),\ \alpha\le x\le\beta,$$

και υποθέσουμε ότι και αυτές είναι όλες ολοκληρώσιμες πάνω στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, *τότε*

$$\iint_{\Pi} f(x,y)dxdy=\int_{\alpha}^{\beta}\left(\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)dy\right)dx=\int_{\gamma}^{\delta}\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)dx\right)dy.$$

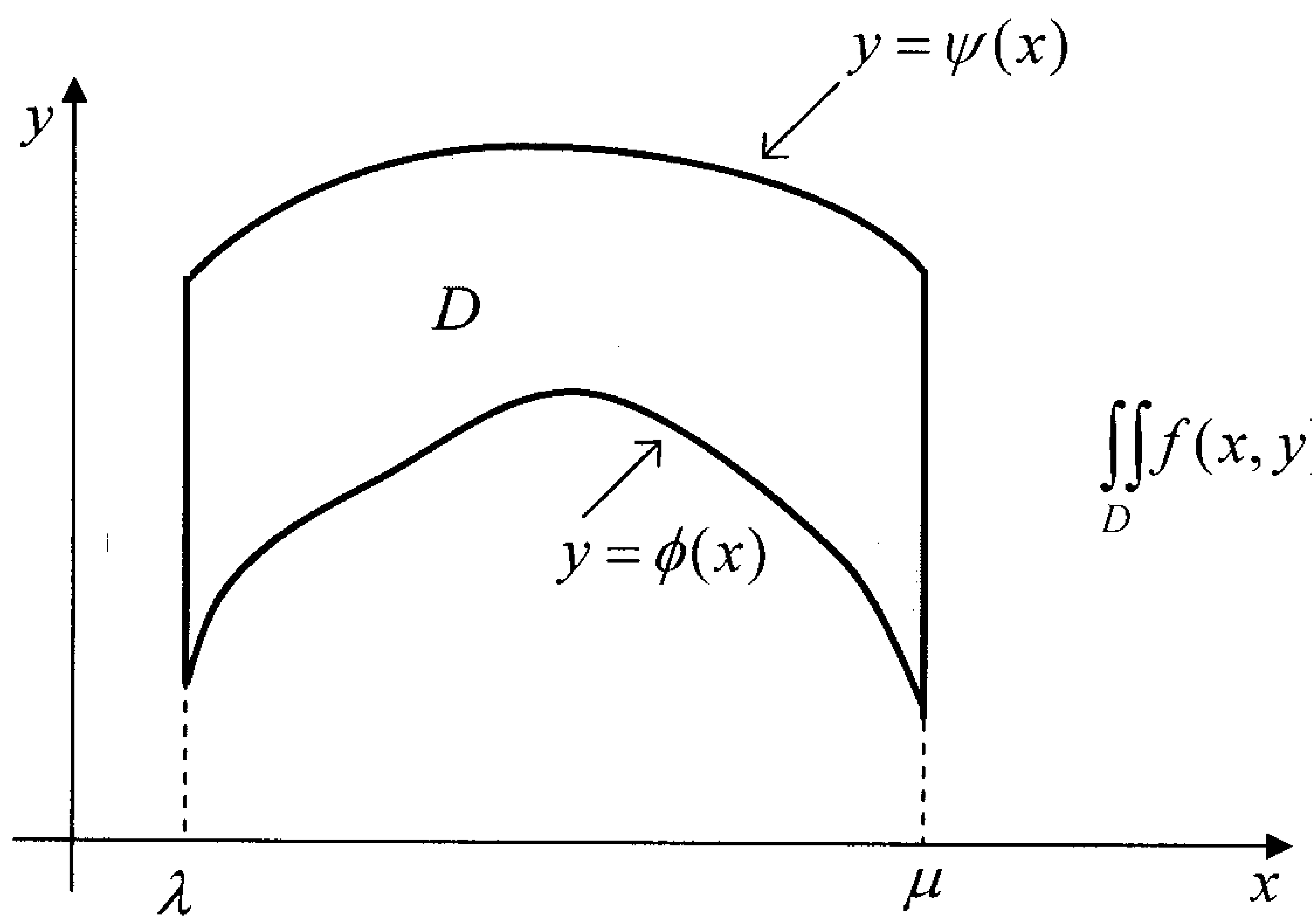
Στην πράξη το *Θεώρημα του Fubini* χρησιμοποιείται συνήθως υπό την μορφή του πορίσματος, και ακόμα ειδικότερα υπό την μορφή του ακόλουθου θεωρήματος.

12.13. Θεώρημα. *Ας θεωρήσουμε δυο συνεχείς συναρτήσεις* $\phi,\psi:[\lambda,\mu]\to\mathbb{R}$, *για τις οποίες να ισχύει* $\phi(x)<\psi(x)$ *για κάθε* $x\in[\lambda,\mu]$, *και ας ορίσουμε το ανοικτό σύνολο*

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[\lambda,\mu]\ \text{και}\ \phi(x)<y<\psi(x)\}.$$

Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$,

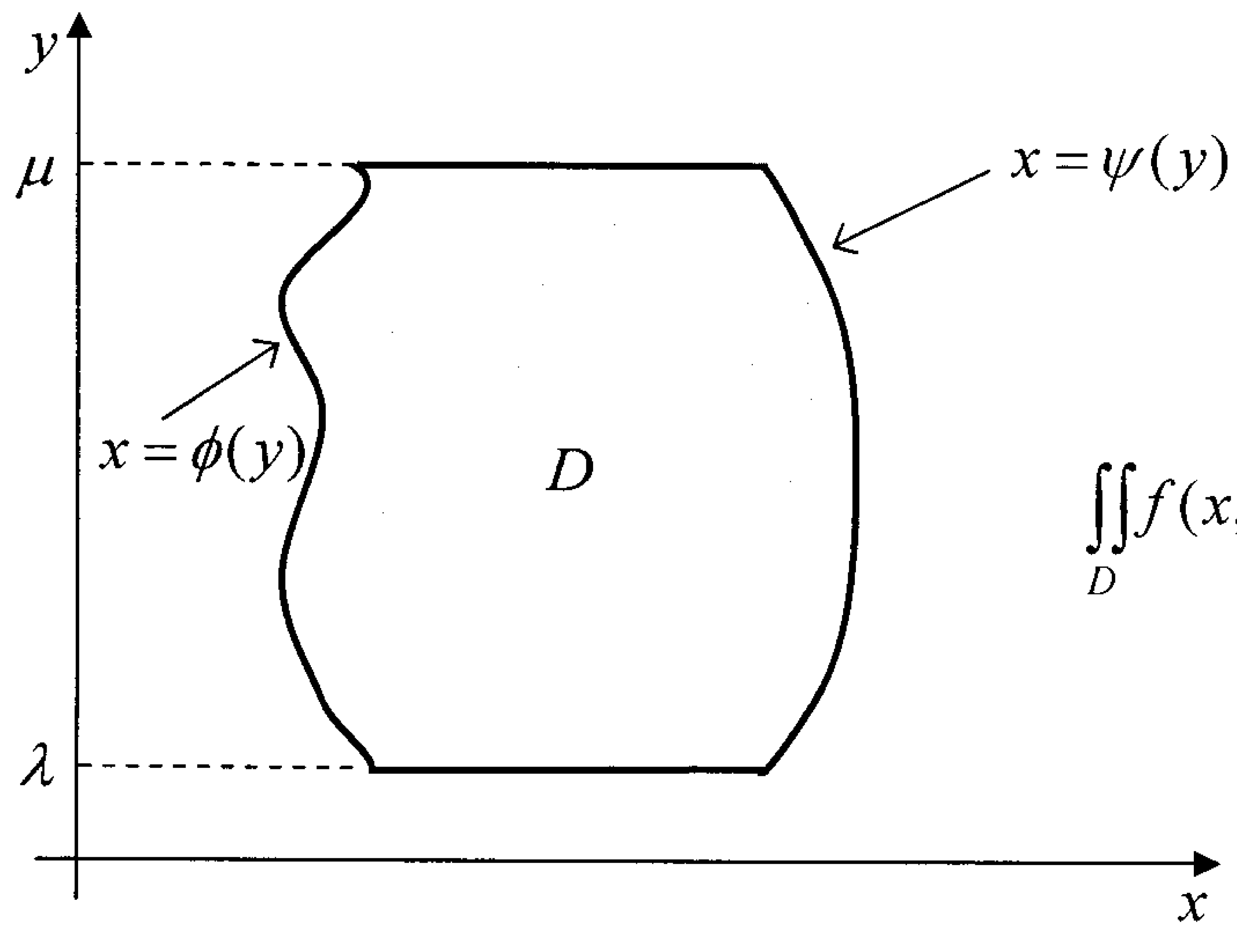
$$\iint_{D} f(x,y)dxdy=\int_{x=\lambda}^{\mu}\left(\int_{y=\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx.$$



$$\iint_{D} f(x,y)dxdy=\int_{x=\lambda}^{\mu}\left(\int_{y=\phi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

Παρατήρηση. Ένας παρόμοιος τύπος ισχύει και για σύνολα της μορφής

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:y\in[\lambda,\mu]\ \text{και}\ \phi(y)<x<\psi(y)\}:$$



$$\iint_{D} f(x,y)dxdy=\int_{y=\lambda}^{\mu}\left(\int_{x=\phi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

12.14. Παραδείγματα. 1. Ας θεωρήσουμε το στερεό
$$G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0<y<1,\ y^2<x<3-2y,\ 0<z<x^2+2y^2\},$$
και ας υπολογίσουμε τον όγκο του. Ο όγκος του εν λόγω στερεού δίδεται από το ακόλουθο διπλό ολοκλήρωμα:
$$\mathcal{O}\gamma\kappa(G)=\iint_D (x^2+2y^2)dxdy,$$
όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<y<1,\ y^2<x<3-2y\}$. Από το *Θεώρημα του Fubini*,
$$\iint_D (x^2+2y^2)dxdy=\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y^2}^{x=3-2y}(x^2+2y^2)dx\right)dy,$$
και το τελευταίο ολοκλήρωμα εύκολα υπολογίζεται.

2. Ας θεωρήσουμε το διαδοχικό ολοκλήρωμα $\mathcal{I}=\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=y}^{1}\frac{dx}{(1+x^3)^5}\right)ydy$. Τότε αυτό είναι ίσο με το εξής διπλό ολοκλήρωμα: $\iint_D \frac{y}{(1+x^3)^5}dxdy$, όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<y<1,\ y<x<1\}$. Παρατηρώντας όμως ότι αυτό το D μπορεί να γραφεί και στη μορφή $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<1,\ 0<y<x\}$,εναλλάσσουμε την διάταξη των ολοκληρώσεων στο ολοκλήρωμα και παίρνουμε ότι
$$\mathcal{I}=\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{x}ydy\right)\frac{dx}{(1+x^3)^5}=\int_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\frac{dx}{(1+x^3)^5}=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{1}\frac{x^2dx}{(1+x^3)^5}=\frac{1}{6}\int_{x=0}^{1}\frac{d(1+x^3)}{(1+x^3)^5}=-\frac{1}{24}(1+x^3)^{-4}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{5}{128}.$$

3. Υπολογισμός του διαδοχικού ολοκληρώματος $\mathcal{I}=\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=\sqrt{y}}^{1}\frac{dx}{(1+x^5)^7}\right)ydy$. Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με το διπλό ολοκλήρωμα $\mathcal{I}=\iint_D\frac{ydxdy}{(1+x^5)^7}$, όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<y<1,\ \sqrt{y}<x<1\}$. Γράφοντας το D στην μορφή $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0<x<1,\ 0<y<x^2\}$, βλέπουμε ότι
$$\mathcal{I}=\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{x^2}ydy\right)\frac{dx}{(1+x^5)^7}=\int_{x=0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^4\right)\frac{dx}{(1+x^5)^7}=\frac{1}{2}\int_{x=0}^{1}\frac{x^4dx}{(1+x^5)^7}=\frac{1}{10}\int_{x=0}^{1}\frac{d(1+x^5)}{(1+x^5)^7}=-\frac{1}{60}(1+x^5)^{-6}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{21}{1280}.$$

12.15. Ασκήσεις. 1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le a,\ x,y\ge 0}(2x+3y)dxdy$.

2. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_{x=0}^{a}\left(\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{a^2-y^2}dy\right)dx$, $\int_{x=0}^{8}\left(\int_{y=\sqrt[3]{x}}^{2}\frac{dy}{y^4+1}\right)dx$.

3. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_{x=1}^{2}\left((x-1)\int_{y=0}^{\log x}\sqrt{1+e^{2y}}dy\right)dx$, $\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le 1,\ y\ge 0}\frac{x^3}{x^4+y^4+1}dxdy$.

4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_{x^2+y^2\le 1,\ 1\le 2y\le 2}\frac{y^3dxdy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.

5. Δείξτε ότι ο όγκος του στερεού $\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le 1,\ x^2+z^2\le 1\}$ είναι $16/3$.

6. Σωστό ή λάθος; Το όριο $\lim_{N\to\infty}\sum_{1\le k,l\le N}\frac{kl}{(N^2+k^2+l^2)^2}=\frac{1}{4}\log\frac{4}{3}$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε το ολοκλήρωμα $\iint_{[0,1]\times[0,1]}xydxdy/(x^2+y^2+1)^2$ και θυμηθείτε τους τύπους της §4.2.5.

7. Υπολογίστε το όριο $\lim_{N\to\infty}\sum_{1\le k,l\le N}\frac{N^{10}kl^3}{(N^4+N^2k^2+l^4)^4}$.

8. Για $\alpha > 0$, ορίστε την συνάρτηση $\mathcal{I}(\alpha) = \int\limits_{y=0}^{1}\left(\int\limits_{x=y^{1/\alpha}}^{1}\frac{dx}{(1+x^{2\alpha+1})^{2\alpha+3}}\right)ydy$. Είναι η συνάρτηση $\mathcal{I}(\alpha)$ συνεχής; Μελετήστε τα όρια $\lim\limits_{\alpha\to 0}\mathcal{I}(\alpha)$ και $\lim\limits_{\alpha\to\infty}\mathcal{I}(\alpha)$.

9. Δείξτε ότι $\int\limits_{x=0}^{1}\left(\int\limits_{y=0}^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}dy\right)dx = \frac{1}{2}$ και $\int\limits_{y=0}^{1}\left(\int\limits_{x=0}^{1}\frac{x-y}{(x+y)^3}dx\right)dy = -\frac{1}{2}$. Γιατί αυτό δεν αντιφάσκει το *Θεώρημα του Fubini*;

10. Δείξτε ότι $\int\limits_{x=0}^{1}\left(\int\limits_{y=0}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dy\right)dx = \frac{\pi}{4}$ και $\int\limits_{y=0}^{1}\left(\int\limits_{x=0}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx\right)dy = -\frac{\pi}{4}$.

12.16. Μέση τιμή συνάρτησης – Θεώρημα. *Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο του οποίου το σύνορο να έχει περιεχόμενο μηδέν, και μια συνεχή συνάρτηση $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$. Τότε υπάρχει σημείο $(\sigma,\tau)\in\overline{D}$ ούτως ώστε*

$$f(\sigma,\tau) = \frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(D)}\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy.$$

Άσκηση. Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό, συνεκτικό και φραγμένο σύνολο του οποίου το σύνορο να έχει περιεχόμενο μηδέν, και δυο συνεχείς συναρτήσεις $f,\varphi:\overline{D}\to\mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν $\varphi(x,y)\ge 0$ για κάθε $(\sigma,\tau)\in\overline{D}$, τότε υπάρχει σημείο $(\sigma,\tau)\in\overline{D}$ ούτως ώστε

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\varphi(x,y)dxdy = f(\sigma,\tau)\iint\limits_{D}\varphi(x,y)dxdy.$$

12.17. Θεώρημα. *Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε μια περιοχή U του σημείου $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Τότε*

$$\lim_{\substack{V\ni(a,b)\\ diam(V)\to 0}}\frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(V)}\iint\limits_{V} f(x,y)dxdy = f(a,b),$$

υπό την έννοια ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ ούτως ώστε για κάθε ανοικτό σύνολο V, που περιέχει το σημείο (a,b), $diam(V) < \eta$ και του οποίου το σύνορο ∂V έχει περιεχόμενο μηδέν, να ισχύει:

$$\left|\frac{1}{\mathcal{E}\mu\beta(V)}\iint\limits_{V} f(x,y)dxdy - f(a,b)\right| < \varepsilon.$$

12.18. Θεώρημα. *Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό και φραγμένο σύνολο, του οποίου το σύνορο να έχει περιεχόμενο μηδέν, και $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, ούτως ώστε για κάθε «διαμέριση» $\{V_j : j = 1,2,\ldots,N\}$ του D σε ανοικτά υποσύνολα V_j, ξένα ανά δυο μεταξύ των, με $\overline{D} = \overline{V}_1\cup\overline{V}_2\cup\cdots\cup\overline{V}_N$, των οποίων τα σύνορα να έχουν περιεχόμενο μηδέν, και με $diam(V_j) < \eta$, και για κάθε επιλογή σημείων $(\sigma_j,\tau_j)\in V_j$, να ισχύει:*

$$\left|\sum_{j=1}^{N} f(\sigma_j,\tau_j)\mathcal{E}\mu\beta(V_j) - \iint\limits_{D} f\right| < \varepsilon.$$

13. Ο τύπος αλλαγής μεταβλητών στα διπλά ολοκληρώματα

13.1. Θεώρημα. *Έστω D ένα φραγμένο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο στο $xy-$επίπεδο και G ένα επίσης φραγμένο ανοικτό και συνεκτικό σύνολο στο $uv-$επίπεδο — και τα δυο σύνολα με κατά τμήματα ομαλό σύνορο. Έστω ακόμη $T = (\phi,\psi):\overline{G}\to\overline{D}$, $(u,v)\to(x,y) = (\phi(u,v),\psi(u,v))$, ένας C^2-μετασχηματισμός, δηλαδή οι συναρτήσεις $\phi:\overline{G}\to\mathbb{R}$ και $\psi:\overline{G}\to\mathbb{R}$ επεκτείνονται σε C^2-συναρτήσεις σε περιοχή του $\overline{G}$. Ας υποθέσουμε* *ακόμη ότι ο μετασχηματισμός T είναι $1-1$ και επί του συνόλου $\overline{D}$, και ότι η Jacobian αυτού* $\mathcal{J}T = \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ *σε κάθε σημείο του $\overline{G}$. Τότε για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:\overline{D}\to\mathbb{R}$,*

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_G f(\phi(u,v),\psi(u,v))\left|\det\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|dudv.$$

Επιπλέον αν $\det\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}>0$, *ο μετασχηματισμός T διατηρεί τον προσανατολισμό των συνόρων, και αν* $\det\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(u,v)}<0$ *τότε ο μετασχηματισμός αντιστρέφει τον εν λόγω προσανατολισμό.*

Γεωμετρική σημασία της Jacobian. Όπως έπεται από το ανωτέρω θεώρημα, ο αριθμός $|\mathcal{J}T(\sigma)|$, για κάποιο $\sigma\in\mathbb{R}^2$, είναι ο παράγοντας που πολλαπλασιάζει σε «απειροστικό επίπεδο» το εμβαδόν. Αν δηλαδή G είναι ένα «μικρό» σύνολο που περιέχει το σημείο σ τότε $\mathcal{E}\mu\beta(T(G)) \approx |\mathcal{J}T(\sigma)|\mathcal{E}\mu\beta(G)$. Ακριβέστερα

$$|\mathcal{J}T(\sigma)| = \lim_{\substack{\sigma\in V\\ diam(V)\to 0}} \frac{\mathcal{E}\mu\beta(T(V))}{\mathcal{E}\mu\beta(V)}.$$

Αυτή είναι η γεωμετρική σημασία της απολύτου τιμής της Jacobian. Αλλά και το πρόσημο της Jacobian έχει γεωμετρική σημασία: Αν $\mathcal{J}T(\sigma)>0$ τότε ο μετασχηματισμός T διατηρεί τον προσανατολισμό στο σημείο σ, δηλαδή αν G είναι ένα «μικρό» σύνολο γύρω από το σ, ανοικτό με ομαλό σύνορο, και το σημείο $(u,v)\in\partial G$ διαγράφει το ∂G κατά την θετική φορά τότε και το $T(u,v)$ διαγράφει το $\partial[T(G)]$ κατά την θετική φορά.

13.2. Γραμμικοί μετασχηματισμοί. Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό μετασχηματισμό $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ του επιπέδου:

$$(u,v)\to(x,y)=T(u,v)=(a_1u+b_1v, a_2u+b_2v),\ (u,v)\in\mathbb{R}^2,$$

και για να είναι ο μετασχηματισμός αυτός $1-1$ *και επί*, ας υποθέσουμε ότι η ορίζουσά του

$$\det T = \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Έστω $G\subset\mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό σύνολο στο $uv-$ επίπεδο και D η εικόνα του, μέσω του μετασχηματισμού T, στο $xy-$ επίπεδο, δηλαδή

$$D=T(G)=\{(x,y):\ \text{όπου}\ (x,y)=T(u,v)=(a_1u+b_1v,a_2u+b_2v)\}.$$

Τότε

$$\iint_D f(x,y)dxdy = |\det T|\cdot\iint_G f(a_1u+b_1v,a_2u+b_2v)dudv.$$

Ιδιαιτέρως $\mathcal{E}\mu\beta(D)=|\det T|\cdot\mathcal{E}\mu\beta(G)$.

Αν $G=[0,1]\times[0,1]$, το σύνολο $D=T(G)$ θα είναι το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία

$$T(0,0)=(0,0),\ T(1,0)=(a_1,a_2),\ T(1,1)=(a_1+b_1,a_2+b_2)\ \text{και}\ T(0,1)=(b_1,b_2).$$

Συνεπώς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου D είναι $\mathcal{E}(D)=|a_1b_2-a_2b_1|=|\det T|$, όπως ήδη γνωρίζουμε.

Παραδείγματα. 1. Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

$$\iint_D \sqrt{x+y}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy,$$

όπου D είναι το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία $(2,-1)$, $(5/2,-1/2)$, $(3,-1)$ και $(5/2,-3/2)$. Θέτοντας $u=x+y$ και $v=x-y$, και λύνοντας ως προς x,y, βρίσκουμε

$$x=\frac{u+v}{2}\ \text{και}\ y=\frac{u-v}{2}.$$

Με μετασχηματισμό $(x,y)=T(u,v)=((u+v)/2,(u-v)/2)$, το ανωτέρω ολοκλήρωμα γίνεται

$$\iint_D \sqrt{x+y}\sqrt[3]{x-y}\,dxdy = |\det T|\cdot\iint_G \sqrt{u}\sqrt[3]{v}\,dudv,$$

όπου G είναι το ορθογώνιο $G=[1,2]\times[3,4]$. Αλλά αυτό το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα αφού, από το *Θεώρημα του Fubini*,

$$\iint_G \sqrt{u}\sqrt[3]{v}\,dudv=\left(\int_{u=1}^{2}\sqrt{u}\,du\right)\left(\int_{v=3}^{4}\sqrt[3]{v}\,dv\right),$$

2. Υπολογισμός του διαδοχικού ολοκληρώματος

$$\int_{x=0}^{1}\left(\int_{y=0}^{1-x}e^{(y-x)/(y+x)}dy\right)dx .$$

Σύμφωνα με το *Θεώρημα του Fubini*, το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}dxdy,$$

όπου D είναι το τρίγωνο $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\}$. Μετά, θέτοντας $u=x+y$ και $v=x-y$, βρίσκουμε ότι

$$\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}dxdy=|\det T|\cdot\iint_G e^{-v/u}dudv,$$

όπου $(x,y)=T(u,v)=\big((u+v)/2,(u-v)/2\big)$ και $G=T^{-1}(D)=\{(u,v):\ 0\le u\le 1,\ -u\le v\le u\}$. Αλλά από το *Θεώρημα του Fubini* πάλι,

$$\iint_G e^{-v/u}dudv=\int_{u=0}^{1}\left(\int_{v=-u}^{u}e^{-v/u}dv\right)du=\int_{u=0}^{1}(e-e^{-1})udu=(e-e^{-1})/2 .$$

Και αφού $\det T=-1/2$, $\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}dxdy=(e-e^{-1})/4$.

13.3. Ασκήσεις. 1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{(x+y)^4}{(x-y)^5}dxdy$, όπου D είναι το τετράγωνο $-1\le x+y\le 1$, $1\le x-y\le 3$.

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D (x+y)^2e^{x-y}dxdy$ όπου D είναι το σύνολο που φράσσεται από τις ευθείες $x+y=1$, $x+y=4$, $x-y=-1$, και $x-y=1$.

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D \frac{(x+2y)^3dxdy}{(2x^2+5y^2+2xy)^{3/2}}$, όπου

$$D=\{(x,y):\ 2x^2+5y^2+2xy\le 1,\ 1\le 2x+4y\le 2\}.$$ *Υπόδειξη*. Θέστε $u=x+2y$, $v=x-y$.

13.4. Διπλά ολοκληρώματα σε πολικές συντεταγμένες. Καθώς το (r,θ) διατρέχει το σύνολο

$$0<r<\infty \quad\text{και}\quad 0\le\theta<2\pi,$$

το ζεύγος (x,y) με

$$x=r\cos\theta \quad\text{και}\quad y=r\sin\theta,$$

διατρέχει ακριβώς μια φορά το σύνολο $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$. Η απεικόνιση

$$(r,\theta)\to(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta),$$

ονομάζεται **πολικός μετασχηματισμός**, και οι αριθμοί r,θ, που περιγράφουν έπ' ακριβώς τα σημεία στο $xy-$επίπεδο, ονομάζονται **πολικές συντεταγμένες**. Για να εκφράσουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες x,y σε σχέση με τις πολικές συντεταγμένες r,θ, απλώς λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων $x=r\cos\theta$ και $y=r\sin\theta$. Το αποτέλεσμα είναι

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad\text{και}\quad \theta=\arctan(y/x),$$

με κάποια ιδιαίτερη προσοχή βέβαια όσον αφορά την συνάρτηση $\arctan$.
Τέλος υπολογίζουμε την Jacobian του πολικού μετασχηματισμού και βρίσκουμε ότι

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\det\begin{bmatrix}\partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta\\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{bmatrix}=r .$$

Έτσι αν D είναι ένα σύνολο στο xy – επίπεδο, της μορφής

$$D=\{(x,y):\ x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta\ \ \mu\varepsilon\ \alpha\le\theta\le\beta\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \sigma\le r\le\tau\},$$

όπου $0\le\alpha<\beta\le 2\pi$ και $0\le\sigma<\tau$, και $G=[\alpha,\beta]\times[\sigma,\tau]$ το αντίστοιχο σύνολο στο (θ,r) – επίπεδο, τότε

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_G f(r\cos\theta,r\sin\theta)rd\theta dr,$$ για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:D\to\mathbb{R}$.

Παραδείγματα. 1. Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα $\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le a}(x^2+y^2)^5dxdy$. Θέτοντας $x=r\cos\theta$ και $y=r\sin\theta$, το σύνολο πάνω στο οποίο ολοκληρώνουμε, δηλαδή το $\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2}\le a\}$, περιγράφεται με πολικές συντεταγμένες ως εξής: $\{(r,\theta):\ 0\le\theta\le 2\pi,\ \ 0\le r\le a\}$. Συνεπώς

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le a}(x^2+y^2)^5dxdy=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{a}(r^2)^5rdr\right)d\theta=2\pi\left(\frac{1}{12}a^{12}\right)=\frac{\pi a^{12}}{6}.$$

2. Για να βρούμε το κέντρο μάζας του ημικυκλίου $D=\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2}\le a,\ \ y\ge 0\}$, πρέπει να υπολογίσουμε τον αριθμό

$$\bar{y}=\frac{1}{\mathcal{E}(D)}\iint_D ydxdy=\iint_D ydxdy\Big/\iint_D dxdy.$$

Ο παρονομαστής $\iint_D dxdy=\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{r=0}^{a}rdr\right)d\theta=\dfrac{\pi a^2}{2}$, όπως αναμέναμε βέβαια. Ο αριθμητής

$$\iint_D ydxdy=\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{r=0}^{a}(r\sin\theta)rdr\right)d\theta=\left(\int_{r=0}^{a}r^2dr\right)\left(\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta d\theta\right)=\frac{2a^3}{3}.$$

Συνεπώς $\bar{y}=\dfrac{2a^3}{3}\Big/\dfrac{\pi a^2}{2}=\dfrac{4}{3\pi}$. Άρα το κέντρο μάζας του ημικυκλίου αυτού είναι το σημείο $(0,4/3\pi)$.

3. Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le a}\dfrac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda}$ ($\lambda\in\mathbb{R}$). Με πολικές συντεταγμένες παίρνουμε

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le a}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda}=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{a}\frac{rdr}{(1+r^2)^\lambda}\right)d\theta=\pi\int_{r=0}^{a}\frac{d(1+r^2)}{(1+r^2)^\lambda}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{1-\lambda}[(1+a^2)^{1-\lambda}-1] & \alpha\nu\ \ \lambda\ne 1\\ \pi\log(1+a^2) & \alpha\nu\ \ \lambda=1.\end{cases}$$

4. Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα $\iint_{a\le\sqrt{x^2+y^2}\le b}\dfrac{(x^2+y^2)^\lambda}{(1+x^2+y^2)^\mu}dxdy$ ($\lambda,\mu\in\mathbb{R}$). Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=a}^{b}\frac{(r^2)^\lambda}{(1+r^2)^\mu}rdr\right)d\theta=\pi\int_{r=a}^{b}\frac{(r^2)^\lambda}{(1+r^2)^\mu}d(r^2)=\pi\int_{u=a^2}^{b^2}u^\lambda(1+u)^{-\mu}du.$$

Το ολοκλήρωμα αυτό υπολογίζεται – με στοιχειώδεις συναρτήσεις – στη περίπτωση που το λ είναι θετικός ακέραιος ή το μ αρνητικός ακέραιος.

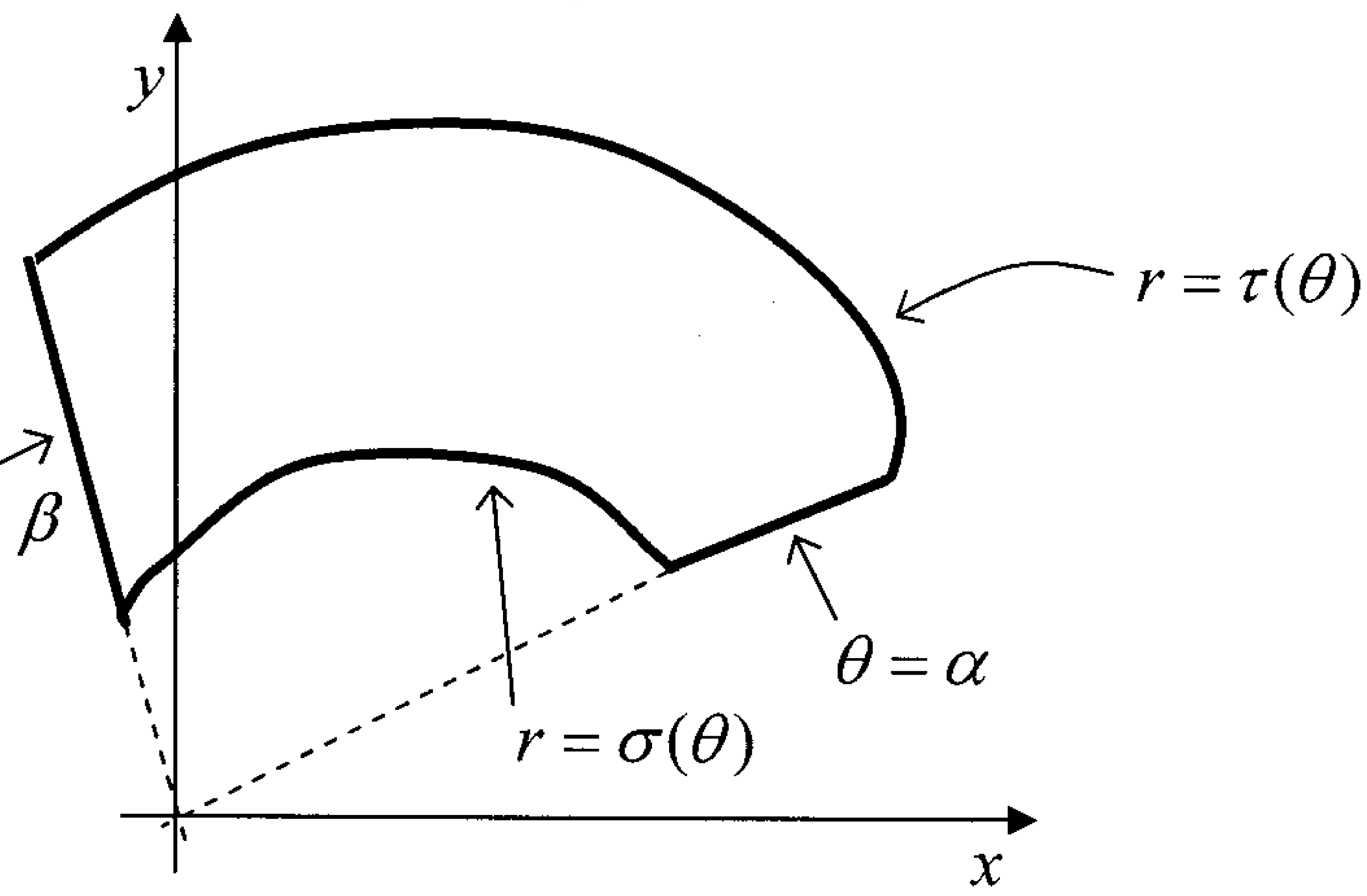
5. Ο όγκος του στερεού $\Omega=\{(x,y,z):\ x^2+y^2\le a^2,\ \ x^2+y^2-a^2\le z\le\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\}$ δίδεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$O\gamma\kappa(\Omega)=\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le a}[\sqrt{4a^2-x^2-y^2}-(x^2+y^2-a^2)]dxdy=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{a}[\sqrt{4a^2-r^2}-(r^2-a^2)]rdr\right)d\theta$$

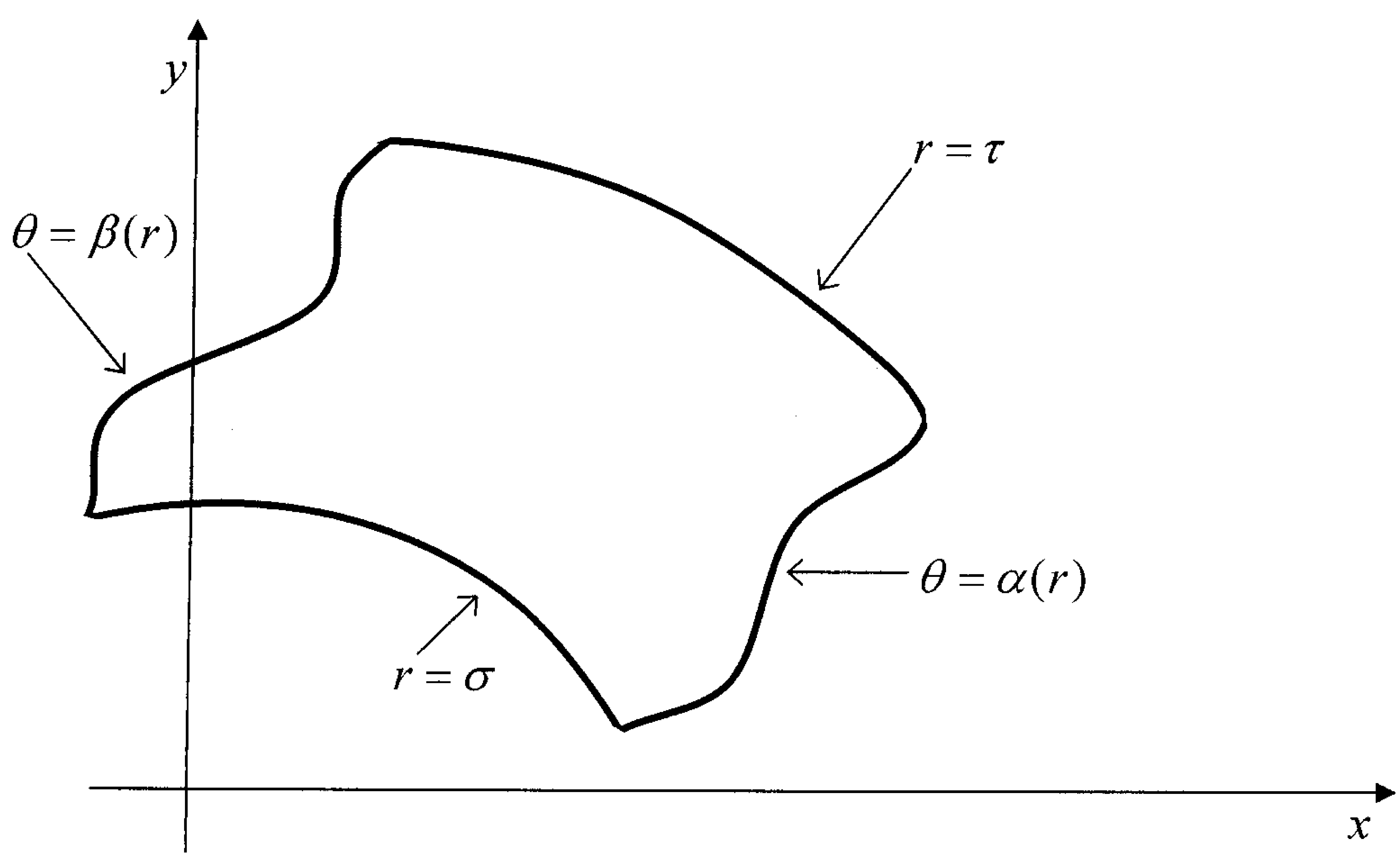
$$=2\pi\int_{r=0}^{a}[\sqrt{4a^2-r^2}-(r^2-a^2)]rdr=-\pi\int_{r=0}^{a}\sqrt{4a^2-r^2}d(4a^2-r^2)-2\pi\int_{r=0}^{a}(r^2-a^2)dr=2\pi(10-\sqrt{27})a^3/3.$$

13.5. Πολικές συντεταγμένες – Γενικότεροι τύποι.

Α. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{\theta=\alpha}^{\beta}\left(\int\limits_{r=\sigma(\theta)}^{\tau(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr\right)d\theta$, στην περίπτωση συνόλων D της μορφής:



Β. $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{r=\sigma}^{\tau}\left(\int\limits_{\theta=\alpha(r)}^{\beta(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta\right)rdr$, στην περίπτωση συνόλων D της μορφής:



Παραδείγματα. 1. Ο όγκος του στερεού $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le 2ax,\ 0\le z\le\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\}$, δίδεται από τον τύπο $\mathcal{O}\gamma\kappa(\Omega)=\iint\limits_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$, όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 2ax\}$. Παρατηρώντας ότι η εξίσωση $x^2+y^2=2ax$ γράφεται ισοδύναμα στη μορφή $(x-a)^2+y^2=a^2$, βλέπουμε ότι πρόκειται για τον κύκλο με κέντρο το σημείο $(a,0)$ και ακτίνα a. Επίσης η εξίσωση $z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$ περιγράφει το άνω ημισφαίριο με κέντρο το σημείο $(0,0)$ και ακτίνα $2a$. Για να υπολογίσουμε το ανωτέρω διπλό ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες και το γράφουμε ως εξής: $\mathcal{O}\gamma\kappa(\Omega)=\int\limits_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int\limits_{r=0}^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}rdr\right)d\theta$, το οποίο εύκολα υπολογίζεται.

2. Ας θεωρήσουμε το στερεό Ω που η βάση του είναι το *καρδιοειδές* $r \le a(1+\cos\theta)$, και το οποίο φράσσεται από πάνω από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$. Ο όγκος του δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$Ογκ(G) = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{a(1+\cos\theta)} r^2 r dr\right)d\theta,$$

το οποίο εύκολα υπολογίζεται.

3. Θεωρήστε το σύνολο στο επίπεδο που περιβάλλεται από τον *λημνίσκο* $r^2 = a^2\cos(2\theta)$. Το εμβαδόν του συνόλου αυτού δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$4\int_{\theta=0}^{\pi/4}\left(\int_{r=0}^{a\sqrt{\cos(2\theta)}} r dr\right)d\theta,$$

το οποίο εύκολα υπολογίζεται.

4. Θεωρήστε το σύνολο D στο $xy-$επίπεδο το οποίο ευρίσκεται μέσα στο καρδιοειδές $r = a(1+\cos\theta)$ και έξω από τον κύκλο $r = a$. Το κέντρο βάρους του D ευρίσκεται στο σημείο $(\bar{x},0)$ όπου

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=a}^{a(1+\cos\theta)} (r\cos\theta) r dr\right)d\theta}{\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=a}^{a(1+\cos\theta)} r dr\right)d\theta}.$$

13.6. Ασκήσεις. **1.** Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που ευρίσκεται ανάμεσα στους κυλίνδρους $x^2 + y^2 = a^2$ και $x^2 + y^2 = b^2$ $(a < b)$, και φράσσεται από πάνω από τον κώνο $z = \lambda\sqrt{x^2+y^2}$ $(\lambda > 0)$ και από κάτω από το παραβολοειδές $z = -\mu(x^2 + y^2 + 1)$ $(\mu > 0)$.

2. Πού ευρίσκεται το κέντρο βάρους των επιπέδων σχημάτων

$$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\} \text{ και } \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$

3. Ένας ομογενής δίσκος μάζας m και ακτίνας a περιστρέφεται γύρω από τον άξονα που είναι κάθετος στο κέντρο του, με γωνιακή ταχύτητα ω. Πόση είναι η κινητική του ενέργεια που οφείλεται σε αυτήν την περιστροφή;

4. Υπολογίστε τον όγκο του ελλειψοειδούς

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\right\}.$$

5. Υπολογίστε το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη

$$r = \begin{cases} \theta & \text{για } 0 \le \theta \le 3\pi/2 \\ -(3\pi/2)\sin\theta & \text{για } 3\pi/2 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

6. Υπολογίστε το εμβαδόν που περικλείεται από κάθε μια από τις καμπύλες:

$$r = \cos(3\theta),\ r = \sin(4\theta),\ r^2 = \cos(5\theta).$$

7. Θεωρήστε το σύνολο $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le a(\sqrt{x^2+y^2} + x),\ y \ge 0\}$. Πού ευρίσκεται το κέντρο βάρους του D; Ομοίως για το σύνολο

$$G = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le a(\sqrt{x^2+y^2} + x),\ y \ge 0,\ x \ge 0\}.$$

8. Πόσο είναι το εμβαδόν που περικλείει η καμπύλη με εξίσωση $r^2 = a^2\cos(4\theta)$;

9. Βρείτε το κέντρο βάρους του συνόλου $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le a^2,\ y \ge b\}$ $(0 < b < a)$.

10. Γράψτε ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα για τον όγκο του στερεού

$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x^2+y^2)^2 \ge 2a^2(x^2-y^2),\ 0 \le z \le \sqrt{2a^2 - x^2 - y^2}\}.$$

13.7. Παραδείγματα. 1. Θεωρήστε το ολοκλήρωμα $\iint\limits_D (x^2-y^2)^5 x^6 y^6 (x^2+y^2)dxdy$, όπου D είναι το σύνολο στο πρώτο τεταρτημόριο του xy – επιπέδου που φράσσεται από τις υπερβολές:

$$x^2-y^2=1,\ x^2-y^2=2,\ xy=3/2 \ \text{ και } \ xy=2.$$

Για τον υπολογισμό αυτού θεωρούμε τον μετασχηματισμό $u=x^2-y^2$ και $v=2xy$, υπολογίζουμε τις Jacobians και βρίσκουμε ότι

$$\det\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=4(x^2+y^2) \quad \text{και} \quad \det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{4(x^2+y^2)}=\frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}.$$

(Παρατηρήστε ότι $u^2+v^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=(x^2+y^2)^2$.) Επίσης το σύνολο $G=S(D)$, όπου $S(x,y)=(u,v)=(x^2-y^2,2xy)$, είναι το ορθογώνιο $[1,2]\times[3,4]$. Εν συνεχεία ελέγχουμε ότι ο μετασχηματισμός $S:\overline{D}\to\overline{G}$, είναι C^∞ σε περιοχή του $\overline{D}$ και $1-1$ *και επί*. Άρα

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x^2-y^2)^5x^6y^6(x^2+y^2)dxdy &= \iint\limits_G u^5(v/2)^6\sqrt{u^2+v^2}\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv\\ &=\iint\limits_G u^5(v/2)^6\sqrt{u^2+v^2}\,\frac{1}{4\sqrt{u^2+v^2}}dudv=\frac{1}{4\cdot 2^6}\iint\limits_G u^5v^6dudv,\end{aligned}$$

και το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα, από το *Θεώρημα του Fubini*, αφού $G=[1,2]\times[3,4]$.

2. Θα δείξουμε ότι για κατάλληλους αριθμούς α,β και συνάρτηση f,

$$\iint\limits_{\substack{x>0,y>0\\x+y<1}} x^\alpha y^\beta f(x+y)dxdy=\left(\int_{u=0}^{1}u^{\alpha+\beta+1}f(u)du\right)\left(\int_{v=0}^{1}v^\alpha(1-v)^\beta dv\right).$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $x=uv$, $y=u(1-v)$, με αντίστροφο τον $u=x+y$, $v=x/(x+y)$. Εν συνεχεία παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{x>0,\ y>0,\ x+y<1\}$ ευρίσκεται σε αντιστοιχία με το σύνολο $\{0<u<1,\ 0<v<1\}$. Αν τώρα υπολογίσουμε την Jacobian βρίσκουμε $\det\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=u$, και η αποδεικτέα σχέση έπεται.

13.8. Ασκήσεις. 1. Θεωρήστε το σύνολο D στο πρώτο τεταρτημόριο του xy – επιπέδου που φράσσεται από τον άξονα των x και τις παραβολές

$$x=1-\tfrac{1}{4}y^2,\ x=\tfrac{1}{4}y^2-1,\ x=4-\tfrac{1}{16}y^2,$$

και υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\iint_D xydxdy$.

2. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

$$\iint\limits_D\frac{x^4-y^4}{x^2y^2}dxdy,\quad \iint\limits_D\left(\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}\right)^2\frac{dxdy}{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad \iint\limits_D\frac{x^8+y^8}{x^4y^4(x^2+y^2)}dxdy$$

όπου D είναι το σύνολο στο πρώτο τεταρτημόριο του xy – επιπέδου που φράσσεται από τις υπερβολές: $x^2-y^2=2$, $x^2-y^2=4$, $xy=5$ και $xy=6$.

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_D (x^2-y^2)xy(x^2+y^2)^\lambda dxdy \quad (\lambda\in\mathbb{R}),$$

όπου D είναι το σύνολο στο πρώτο τεταρτημόριο του xy – επιπέδου που φράσσεται από τις υπερβολές: $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=2$, $xy=3$ και $xy=4$.

4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_D (x^3-3xy^2)^5(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)^2dxdy,$$

όπου D είναι το σύνολο στο μέρος του xy – επιπέδου όπου $-\pi/3<\theta<\pi/3$, και το οποίο φράσσεται από τις καμπύλες: $x^3-3xy^2=1$, $x^3-3xy^2=2$, $3x^2y-y^3=3$ και $3x^2y-y^3=4$. (θ συμβολίζει την γωνία των πολικών συντεταγμένων του σημείου (x,y).)

5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_D e^{3x} \sin y e^{e^{2x} \cos y \sin y} dxdy,$$

όπου D είναι το σύνολο στο μέρος του $xy-$επιπέδου όπου $|y| < \pi$ και το οποίο φράσσεται από τις καμπύλες:

$$e^x \cos y = 1,\ e^x \cos y = 2,\ e^x \sin y = 3 \text{ και } e^x \sin y = 4.$$

14. Ολοκλήρωση μη φραγμένων συναρτήσεων και ολοκληρώματα σε μη φραγμένα σύνολα

14.1. Ολοκλήρωση μη φραγμένων συναρτήσεων – Παραδείγματα. 1. Υπολογισμός του ολοκληρώματος

$$\mathcal{I} = \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ όπου } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Το «πρόβλημα» με αυτό το ολοκλήρωμα έγκειται στο γεγονός ότι ο παρονομαστής $\sqrt{x^2 + y^2}$ μηδενίζεται στο σημείο $(0,0)$ του συνόλου ολοκλήρωσης και έτσι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

<u>δεν είναι φραγμένη</u> στο σύνολο $D - \{(0,0)\}$. Βέβαια το πρόβλημα δεν είναι το σημείο $(0,0)$ αυτό καθ' εαυτό, αλλά κυρίως η συμπεριφορά της συνάρτησης $f(x,y)$, για σημεία (x,y) τα οποία είναι κοντά στο $(0,0)$. Και ακριβέστερα το ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \infty.$$

Ο ορισμός του ολοκληρώματος $\mathcal{I}$ είναι :

$$\mathcal{I} = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{όπου } D_\varepsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon^2 < x^2 + y^2 < 1\},\ \varepsilon > 0.$$

Βέβαια αμέσως συναντάμε το πρόβλημα κατά πόσο το ανωτέρω όριο υπάρχει. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Με πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε ότι

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{r=\varepsilon}^{1} \frac{rdr}{r} \right) d\theta = 2\pi(1-\varepsilon).$$

Συνεπώς

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}[2\pi(1-\varepsilon)] = 2\pi.$$

Έτσι το ολοκλήρωμα $\mathcal{I}$ **συγκλίνει** και μάλιστα η τιμή του είναι 2π .

2. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα άλλο ολοκλήρωμα, το εξής:

$$\mathcal{J} = \iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2}, \quad \text{όπου } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}.$$

Ορίζοντάς το σαν το όριο

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{dxdy}{x^2 + y^2},$$

υπολογίζουμε και βρίσκουμε, όπως προηγουμένως,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{dxdy}{x^2 + y^2} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{r=\varepsilon}^{1} \frac{rdr}{r^2} \right) d\theta = \lim_{\varepsilon\to 0}[2\pi \log(1/\varepsilon)] = \infty.$$

Γι' αυτό στην περίπτωση αυτή λέγουμε ότι το ολοκλήρωμα $\mathcal{J}$ δεν συγκλίνει — ότι αποκλίνει, και ότι $\mathcal{J}=\infty$.

3. Ας μελετήσουμε τώρα την γενική περίπτωση του ολοκληρώματος

(*) $$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\lambda}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Βέβαια όταν το λ είναι θετικός αριθμός, η συνάρτηση $1/(x^2+y^2)^\lambda$ δεν είναι φραγμένη κοντά στο σημείο $(0,0)$. Δηλαδή για $\lambda \le 0$, δεν τίθεται θέμα σύγκλισης του ολοκληρώματος (*). Σε κάθε περίπτωση όμως

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\lambda} = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\varepsilon<\sqrt{x^2+y^2}<1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\lambda}.$$

Υπολογίζοντας σε πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε

$$\iint_{\varepsilon<\sqrt{x^2+y^2}<1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\lambda} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=\varepsilon}^{1} \frac{rdr}{r^{2\lambda}}\right)d\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-\lambda}\left(1-\varepsilon^{2-2\lambda}\right) & \alpha\nu \ \ \lambda \ne 1 \\ 2\pi \log\dfrac{1}{\varepsilon} & \alpha\nu \ \ \lambda = 1. \end{cases}$$

Έτσι

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iint_{\varepsilon<\sqrt{x^2+y^2}<1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\lambda} = \begin{cases} \pi/(1-\lambda) & \alpha\nu \ \ \lambda<1 \\ \infty & \alpha\nu \ \ \lambda>1 \\ \infty & \alpha\nu \ \ \lambda=1. \end{cases}$$

Το συμπέρασμα είναι ότι

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\lambda} = \begin{cases} \pi/(1-\lambda) & \alpha\nu \ \ \lambda<1 \\ \infty & \alpha\nu \ \ \lambda>1 \\ \infty & \alpha\nu \ \ \lambda=1. \end{cases}$$

Ιδιαιτέρως έχουμε ότι

(*)′ Το ολοκλήρωμα (*) συγκλίνει αν και μόνο αν $\lambda<1$.

Το ανωτέρω αποτέλεσμα είναι σημαντικό διότι βασιζόμενοι σε αυτό μπορούμε να αποφανθούμε για την σύγκλιση ή μη πολλών άλλων ολοκληρωμάτων. Και για πολλά θέματα της *Ανάλυσης* αυτό είναι αρκετό.

4. Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}}.$$

Παρατηρούμε ότι πάνω στο σύνολο που ολοκληρώνουμε, όταν δηλαδή $x^2+y^2<1$, η ποσότητα $x^2+|y| \ge x^2+y^2$, οπότε

(1) $$\frac{1}{\sqrt{x^2+|y|}} \le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Αλλά από την (*)′, το ολοκλήρωμα $\iint_{x^2+y^2<1} dxdy/\sqrt{x^2+y^2}$ συγκλίνει και κατά συνέπεια $\iint_{x^2+y^2<1} dxdy/\sqrt{x^2+|y|}<\infty$.

5. Θεωρήστε τώρα την εξής παραλλαγή του ανωτέρω παραδείγματος:

(2) $$\iint_{x^2+y^2<2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}}.$$

Πάνω στο σύνολο $x^2+y^2<2$, δεν είναι πλέον σωστό ότι ισχύει η (1). Αλλά

$$\iint_{x^2+y^2<2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}} = \iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}} + \iint_{1<x^2+y^2<2} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}}.$$

Όσον αφορά όμως το δεύτερο ολοκλήρωμα, δεν υπάρχει απολύτως κανένα πρόβλημα σύγκλισης: η συνάρτηση $1/\sqrt{x^2+|y|}$ είναι συνεχής στο σύνολο $1 \le x^2+y^2 \le 2$. Συνεπώς το ολοκλήρωμα (2) συγκλίνει.

6. Και το ίδιο ισχύει για κάθε ολοκλήρωμα της μορφής

$$\iint_G \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}},$$

όπου G είναι ένα οποιοδήποτε φραγμένο σύνολο στο επίπεδο (αρκεί το σύνορό του να έχει περιεχόμενο μηδέν). Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι στην περίπτωση που $(0,0)\in G$,

$$\iint_G \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}} = \iint_{\sqrt{x^2+y^2}<\delta} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}} + \iint_{G-\{\sqrt{x^2+y^2}<\delta\}} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+|y|}},$$

για $\delta>0$ και μικρό. (Όταν $(0,0)\notin \overline{G}$ δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα σύγκλισης. Πώς θα χειρισθείτε την περίπτωση $(0,0)\in \partial G$;)

7. Θεωρήστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(x^4+y^6)^{5/2}}. \tag{3}$$

Πάνω στο σύνολο $x^2+y^2<1$, η ποσότητα $x^4+y^6 \le x^2+y^2$, οπότε

$$\frac{1}{(x^4+y^6)^{5/2}} \ge \frac{1}{(x^2+y^2)^{5/2}}.$$

Αλλά, λόγω της (*)′, το ολοκλήρωμα

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{5/2}} = \infty,$$

και συνεπώς το ολοκλήρωμα (3) αποκλίνει.

8. Το ίδιο ισχύει για κάθε ολοκλήρωμα της μορφής

$$\iint_G \frac{dxdy}{(x^4+y^6)^{5/2}},$$

όπου G είναι ένα οποιοδήποτε φραγμένο σύνολο.

9. Ας θεωρήσουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\iint_G \frac{\left(\sqrt{|x|+x^2y^2+\sqrt[4]{|y|}}\right)^{15}}{(x^4+y^6)^{3/2}}\,dxdy, \tag{4}$$

όπου G είναι ένα φραγμένο ανοικτό σύνολο του οποίου το σύνορο έχει περιεχόμενο μηδέν. Το πρόβλημα είναι να αποφασίσουμε αν συγκλίνει ή όχι το ολοκλήρωμα αυτό. Όπως και σε προηγούμενα παραδείγματα, η σύγκλιση του ολοκληρώματος αυτού ανάγεται στη σύγκλιση του ολοκληρώματος

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{\left(\sqrt{|x|+x^2y^2+\sqrt[4]{|y|}}\right)^{15}}{(x^4+y^6)^{3/2}}\,dxdy. \tag{5}$$

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι όταν $x^2+y^2<1$ τότε

$$x^4+y^6 \le x^4+y^4 \le (x^2+y^2)^2 \quad\text{και}\quad \sqrt{|x|+x^2y^2+\sqrt[4]{|y|}} \ge \sqrt[4]{|x|}+\sqrt[4]{|y|} \ge (x^2+y^2)^{1/8}.$$

Συνεπώς (για $x^2+y^2<1$)

$$\frac{\left(\sqrt{|x|+x^2y^2+\sqrt[4]{|y|}}\right)^{15}}{(x^4+y^6)^{3/2}} \ge \frac{(x^2+y^2)^{15/8}}{(x^2+y^2)^3} = \frac{1}{(x^2+y^2)^{9/8}}.$$

Αλλά

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{9/8}} = \infty.$$

Συνεπώς το ολοκλήρωμα (5) αποκλίνει, και το ίδιο ισχύει και για το ολοκλήρωμα (4).

14.2. Ολοκλήρωση μη φραγμένων συναρτήσεων — συνέχεια. 1. Στις περιπτώσεις που μελετήσαμε έως τώρα το πρόβλημα της σύγκλισης του ολοκληρώματος οφειλόταν σε ένα σημείο. Αλλά πολύ περισσότερα σημεία ενδέχεται να δημιουργούν προβλήματα του τύπου αυτού. Π.χ., θεωρήστε το ολοκλήρωμα

$$(1) \qquad \iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

Στο ολοκλήρωμα αυτό η ποσότητα $\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}$, η οποία ευρίσκεται στον παρανομαστή, τείνει στο 0 καθώς το (x,y) πλησιάζει κάποιο σημείο του κύκλου $x^2+y^2=1$. Ο ορισμός του ολοκληρώματος αυτού είναι ο εξής:

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}} = \lim_{\substack{a\to 1\\ a<1}} \iint_{\sqrt{x^2+y^2}<a} \frac{dxdy}{\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}}.$$

Και πάλι αν το ανωτέρω όριο είναι πεπερασμένο, το ολοκλήρωμα (1) θα συγκλίνει, ενώ αν είναι ∞, θα αποκλίνει. Για να δούμε λοιπόν ποιά από τις δυο περιπτώσεις συμβαίνει, προχωρούμε τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}<a} dxdy/\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}$$

με πολικές συντεταγμένες. Έχουμε λοιπόν (για $a<1$)

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}<a} \frac{dxdy}{\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{a}\frac{rdr}{\sqrt{1-r}}\right)d\theta = 2\pi\int_{r=0}^{a}\frac{rdr}{\sqrt{1-r}} = 4\pi\left(\frac{2}{3}-\sqrt{1-a}+\frac{1}{3}\sqrt{(1-a)^3}\right)$$

και κατά συνέπεια

$$\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}} = \lim_{\substack{a\to 1\\ a<1}} \iint_{\sqrt{x^2+y^2}<a} \frac{dxdy}{\sqrt{1-\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{8\pi}{3}.$$

Άρα το ολοκλήρωμα (1) συγκλίνει.

2. Γενικότερα τώρα ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

$$(2) \qquad \mathcal{I}_\lambda = \iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^\lambda} = \lim_{\substack{a\to 1\\ a<1}} \iint_{\sqrt{x^2+y^2}<a} \frac{dxdy}{\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^\lambda}.$$

[Παρατηρήστε ότι η ποσότητα $1-\sqrt{x^2+y^2}$ που ευρίσκεται στον παρονομαστή — στην δύναμη λ — είναι η απόσταση του σημείου (x,y) από το σύνορο του συνόλου ολοκλήρωσης, δηλαδή το σύνορο του δίσκου $\{x^2+y^2<1\}$.] Υπολογίζοντας όπως και προηγουμένως σε πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε ότι

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}<a} \frac{dxdy}{\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^\lambda} = 2\pi\int_{r=0}^{a}\frac{rdr}{(1-r)^\lambda} = 2\pi\int_{u=1-a}^{1}\frac{du}{u^\lambda} - 2\pi\int_{u=1-a}^{1}\frac{du}{u^{\lambda-1}}$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{1-\lambda}\left(1-(1-a)^{1-\lambda}\right) - \frac{1}{2-\lambda}\left(1-(1-a)^{2-\lambda}\right)\right].$$

Αυτή η τελευταία ισότητα ισχύει όταν $\lambda\neq 1$ και $\lambda\neq 2$. Αφήνοντας το $a\to 1$, παίρνουμε

$$\mathcal{I}_\lambda = 2\pi\left[\frac{1}{1-\lambda}-\frac{1}{2-\lambda}\right] \quad \text{όταν } \lambda<1 \quad \text{και} \quad \mathcal{I}_\lambda=\infty \quad \text{όταν } \lambda\geq 1.$$

14.3. Ολοκληρώματα σε μη φραγμένα σύνολα. Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

$$(*) \qquad \iint_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda}, \quad \text{όπου } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Το πρόβλημα με το ολοκλήρωμα αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το σύνολο ολοκλήρωσης, το $\mathbb{R}^2$, δεν είναι φραγμένο σύνολο. Με την συνάρτηση που ολοκληρώνεται δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα, μάλιστα για $\lambda>0$ — που είναι και η πλέον ενδιαφέρουσα περίπτωση — η συνάρτηση αυτή είναι φραγμένη αφού τότε

$$\frac{1}{(1+x^2+y^2)^\lambda}\leq 1.$$

Ο ορισμός του ολοκληρώματος (*) είναι ο εξής:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda} = \lim_{R\to\infty} \iint_{\sqrt{x^2+y^2}<R} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda}.$$

Και αν το ανωτέρω όριο είναι πεπερασμένο, λέγουμε ότι το ολοκλήρωμα (*) συγκλίνει, ενώ όταν είναι άπειρο, λέγουμε ότι το ολοκλήρωμα (*) αποκλίνει. Στην προκειμένη περίπτωση μπορούμε και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα αυτό ως εξής: Με πολικές συντεταγμένες βρίσκουμε ότι

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}<R} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda} = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{R} \frac{rdr}{(1+r^2)^\lambda}\right)d\theta = 2\pi\int_{r=0}^{R}\frac{rdr}{(1+r^2)^\lambda} = \pi\int_{r=0}^{R}\frac{d(1+r^2)}{(1+r^2)^\lambda} = \frac{\pi}{1-\lambda}\left[1-\frac{1}{(1+R^2)^{1-\lambda}}\right],$$

για $\lambda \neq 1$. Και για $\lambda = 1$,

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}<R} \frac{dxdy}{1+x^2+y^2} = \pi\log(1+R^2). \quad \text{Άρα} \quad \iint_{\mathbb{R}^2}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^\lambda} = \begin{cases} \pi/(1-\lambda) & \alpha\nu \quad \lambda>1 \\ \infty & \alpha\nu \quad \lambda\le 1. \end{cases}$$

Ιδιαιτέρως,

(*)′ Το ολοκλήρωμα (*) συγκλίνει αν και μόνο αν $\lambda > 1$.

Παρόμοια με το ανωτέρω ολοκλήρωμα είναι και η συμπεριφορά του ακόλουθου ολοκληρώματος:

(**) $$\iint_{x^2+y^2>1}\frac{dxdy}{(x^2+y^2)^\lambda}.$$

Έτσι με έναν παρόμοιο με τον προηγούμενο υπολογισμό καταλήγουμε στο συμπέρασμα:

(**)′ Το ολοκλήρωμα (**) συγκλίνει αν και μόνο αν $\lambda > 1$.

Τα συμπεράσματα (*)′ και (**)′ είναι σημαντικά αφού πολλά άλλα ολοκληρώματα ανάγονται σε αυτά, όσον αφορά το πρόβλημα της σύγκλισης ή μη αυτών. Και καθορίζουν τρόπον τινά την συμπεριφορά των ολοκληρωμάτων — με άλλα λόγια την ολοκληρωσιμότητα των συναρτήσεων — στο άπειρο.

Παραδείγματα. 1. Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα

(1) $$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{|x|+|y|}{(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|})^7}dxdy.$$

Ας παρατηρήσουμε ότι

$$|x|+|y| \le \sqrt{2}(x^2+y^2)^{1/2} \quad \text{και} \quad 1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} \ge (1+x^2+y^2)^{1/4},$$

και συνεπώς

$$\frac{|x|+|y|}{(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|})^7} \le \frac{\sqrt{2}(x^2+y^2)^{1/2}}{(1+x^2+y^2)^{7/4}} \le \frac{\sqrt{2}(1+x^2+y^2)^{1/2}}{(1+x^2+y^2)^{7/4}} = \frac{\sqrt{2}}{(1+x^2+y^2)^{5/4}}.$$

Επομένως, σύμφωνα με το συμπέρασμα (*)′, το ολοκλήρωμα (1) συγκλίνει.

2. Ας θεωρήσουμε τώρα το ολοκλήρωμα

(2) $$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{|x|+|y|}{(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|})^5}dxdy.$$

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τις εξής ανισότητες

$$|x|+|y| \ge (x^2+y^2)^{1/2} \quad \text{και} \quad 1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} \le 3(1+x^2+y^2)^{1/4},$$

για να συμπεράνουμε ότι

$$\frac{|x|+|y|}{(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|})^5} \ge \frac{(x^2+y^2)^{1/2}}{3^5(1+x^2+y^2)^{5/4}} \ge \frac{(1+x^2+y^2)^{1/2}/\sqrt{2}}{3^5(1+x^2+y^2)^{5/4}} = \frac{1}{3^5\sqrt{2}}\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/4}},$$

όταν $x^2+y^2 \ge 1$. Αλλά

$$\iint_{x^2+y^2\ge 1}\frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/4}} = \infty,$$

οπότε το ολοκλήρωμα (2) αποκλίνει.

3. Θεωρήστε το ολοκλήρωμα

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(|x|+|y|)^{\lambda}}{\left(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^{\mu}} dxdy, \ \lambda, \mu > 0 .$$

Έχοντας υπ' όψιν τις ανισότητες των προηγουμένων παραδειγμάτων, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$|x|+|y| \approx (x^2+y^2)^{1/2} \quad \text{και} \quad 1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|} \approx (1+x^2+y^2)^{1/4} .$$

Άρα ο αριθμητής $(|x|+|y|)^{\lambda}$ συμπεριφέρεται σαν την ποσότητα $(x^2+y^2)^{\lambda/2}$, και ο παρονομαστής $\left(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^{\mu}$ συμπεριφέρεται σαν την ποσότητα $(1+x^2+y^2)^{\mu/4}$. Έτσι

$$\frac{(|x|+|y|)^{\lambda}}{\left(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^{\mu}} \approx \frac{1}{(1+x^2+y^2)^{(\mu-2\lambda)/4}}, \text{ όταν } x^2+y^2 \geq 1 .$$

Συνεπώς

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{(|x|+|y|)^{\lambda}}{\left(1+\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^{\mu}} dxdy < \infty \ \text{ αν και μόνο αν } \ \mu-2\lambda > 4 .$$

14.4. Τα ολοκληρώματα $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$ και $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$. Με πολικές συντεταγμένες υπολογίζουμε

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} rdr\right)d\theta = 2\pi \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} rdr = -\pi \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2} d(-r^2) = -\pi\left(e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r=\infty}\right) = \pi .$$

Αλλά

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \int_{y=-\infty}^{\infty}\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}dxdy = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) = \left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 .$$

Άρα $\left(\int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi$, και συνεπώς $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

14.5. Ασκήσεις. 1. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση το ολοκλήρωμα $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\lambda}(1+x^2+y^2)^{\mu}}$.

2. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση το ολοκλήρωμα $\iint_{x^2+y^2<1} \frac{dxdy}{\left(x^2+y^2\right)^{\lambda}\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\mu}}$.

3. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση το ολοκλήρωμα

$$\iint_G \left(\sqrt{|x|}+x^2y^2+\sqrt[4]{|y|}\right)^{17}(x^4+y^6)^{-3/2}dxdy,$$

όταν G είναι ένα φραγμένο ανοικτό σύνολο του οποίου το σύνορο έχει περιεχόμενο μηδέν.

4. Μελετήστε τα ολοκληρώματα

$$\iint_{1<\sqrt{x^2+y^2}<R} \frac{dxdy}{\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\lambda}} = \lim_{\substack{a\to 1\\ a>1}} \iint_{a<\sqrt{x^2+y^2}<R} \frac{dxdy}{\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\lambda}},$$

για τις διάφορες τιμές του λ.

5. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση, τα ολοκληρώματα $\iint_G \frac{dxdy}{\left(1-\sqrt{x^2+y^2}\right)^{\lambda}}$, στις περιπτώσεις: $G \subset \{x^2+y^2<1\}$ και $G \subset \{1<\sqrt{x^2+y^2}<R\}$.

6. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση τα ολοκληρώματα της μορφής $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{p(x,y)dxdy}{(x^2+y^2)^{\lambda}(1+x^2+y^2)^{\mu}}$, για τα διάφορα πολυώνυμα $p(x,y)$, και δώστε παραδείγματα.

7. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση ολοκληρώματα της μορφής $\iint_G \frac{dxdy}{\left(dist[(x,y),\partial G] \right)^\lambda}$. (Ξεκινήστε με απλές περιπτώσεις όπως π.χ. όταν το G είναι ένα ορθογώνιο ή τρίγωνο.)

15. Τριπλά ολοκληρώματα

15.1. Άσκηση. Αναπτύξτε την θεωρία των **τριπλών** ολοκληρωμάτων – κατ' αναλογία με την θεωρία των διπλών ολοκληρωμάτων. Ιδιαιτέρως διατυπώστε θεωρήματα τύπου Fubini και τον τύπο αλλαγής μεταβλητών στην περίπτωση των τριπλών ολοκληρωμάτων.

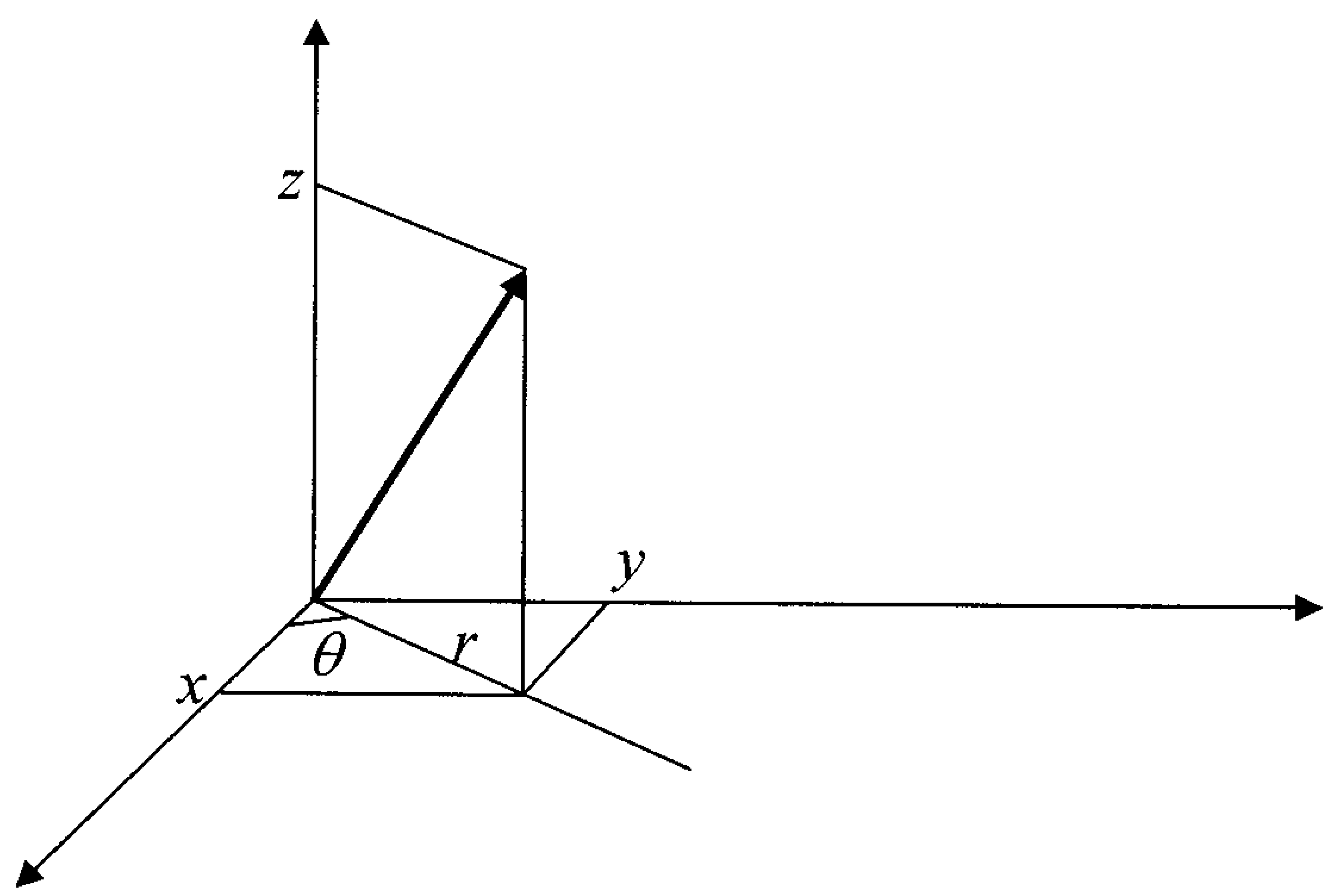
15.2. Κυλινδρικές συντεταγμένες. Ένα σημείο (x,y,z) στο χώρο καθορίζεται από την απόσταση $r=\sqrt{x^2+y^2}$ του σημείου $(x,y,0)$ από το $(0,0,0)$, την γωνία θ με $\tan\theta = \frac{y}{x}$ και το z. Πράγματι

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \text{ και } z = z.$$

Οι συντεταγμένες (r,θ,z) ονομάζονται **κυλινδρικές** συντεταγμένες. Έτσι καθώς $0<r<\infty$, $0\le\theta<2\pi$ και $-\infty<z<\infty$, τα σημεία (x,y,z) με $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ και $z=z$ διαγράφουν το σύνολο $\mathbb{R}^3-\{(0,0,0)\}$ ακριβώς μια φορά. Ένας εύκολος υπολογισμός μας δίνει ότι η *Jacobian* του μετασχηματισμού $T:(r,\theta,z)\to(x,y,z)$ είναι

$$\mathcal{J}T = \det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r.$$

Δηλαδή η σχέση των στοιχείων όγκου είναι $dxdydz = rdrd\theta dz$.



Οι κυλινδρικές συντεταγμένες r,θ,z.

Εφαρμογές. 1. Ας θεωρήσουμε το στερεό

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2<a^2 \ \text{και}\ b<z<c\} \quad (a,b,c\in\mathbb{R} \text{ με } a>0 \text{ και } b<c).$$

Τότε $G=T^{-1}(D)=\{(r,\theta,z): 0\le r<a,\ -\pi<\theta\le\pi,\ b<z<c\}$. Επομένως

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dr d\theta dz.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το *Θεώρημα του Fubini* γράφουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\int_{z=b}^{c}\left[\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{a} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dr\right)d\theta\right]dz.$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\iiint_{x^2+y^2<a^2,\,x>0,\,b<z<c} f(x,y,z)dxdydz = \int_{z=b}^{c}\left[\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{r=0}^{a} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dr\right)d\theta\right]dz,$$

$$\iiint\limits_{x^2+y^2<a^2,\, x>0,\, y>0,\, b<z<c} f(x,y,z)dxdydz = \int_{z=b}^{c}\left[\int_{\theta=0}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{a} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdr\right)d\theta\right]dz,$$

και $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \int_{z=b}^{c}\left[\int_{\theta=0}^{\pi/4}\left(\int_{r=a_1}^{a_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)rdr\right)d\theta\right]dz$$

όπου Ω είναι το στερεό στον $xyz-$χώρο που φράσσεται από τους κυλίνδρους $x^2+y^2=a_1^2$, $x^2+y^2=a_2^2$ ($0<a_1<a_2$) και τα επίπεδα $y=0$, $y=x$, $z=b$ και $z=c$.

2. Θεωρήστε το στερεό D στον $xyz-$χώρο που ευρίσκεται ανάμεσα στον κώνο $z=2\sqrt{x^2+y^2}$ και την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=1$. Το κέντρο βάρους του D είναι το σημείο $(0,0,\bar{z})$ όπου

$$\bar{z}=\frac{\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{1/\sqrt{5}}\left(\int_{z=2r}^{\sqrt{1-r^2}} zdz\right)rdr\right)d\theta}{\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{1/\sqrt{5}}\left(\int_{z=2r}^{\sqrt{1-r^2}} dz\right)rdr\right)d\theta}.$$

Η ροπή αδρανείας του D γύρω από τον άξονα των x είναι

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{1/\sqrt{5}}\left(\int_{z=2r}^{\sqrt{1-r^2}} z^2dz\right)rdr\right)d\theta.$$

Η ροπή αδρανείας του D γύρω από την ευθεία $\{x=-1,\, y=0\}$ είναι

$$\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{1/\sqrt{5}}\left(\int_{z=2r}^{\sqrt{1-r^2}} [(r\cos\theta+1)^2+(r\sin\theta)^2]dz\right)rdr\right)d\theta.$$

3. Θεωρήστε το στερεό D στον $xyz-$χώρο που ευρίσκεται ανάμεσα στο ημισφαίριο $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, το επίπεδο $z=0$ και τον κύλινδρο $x^2+y^2=2x$. Το κέντρο βάρους του D είναι το σημείο $(\bar{x},0,\bar{z})$ όπου

$$\bar{x}=\frac{\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{2\cos\theta}\left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} r\cos\theta dz\right)rdr\right)d\theta}{\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{2\cos\theta}\left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} dz\right)rdr\right)d\theta},\quad \bar{z}=\frac{\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{2\cos\theta}\left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} zdz\right)rdr\right)d\theta}{\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{2\cos\theta}\left(\int_{z=0}^{\sqrt{4-r^2}} dz\right)rdr\right)d\theta}.$$

4. Θεωρήστε το στερεό D στον $xyz-$χώρο που ευρίσκεται ανάμεσα στον κώνο $z=3\sqrt{x^2+y^2}$ και τον κύλινδρο $x^2+y^2=4x$. Η ροπή αδρανείας του D γύρω από τον άξονα των z είναι

$$\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_{r=0}^{4\cos\theta}\left(\int_{z=0}^{3r} dz\right)r^3dr\right)d\theta.$$

15.3. Σφαιρικές συντεταγμένες. Ένα σημείο (x,y,z) στον χώρο $\mathbb{R}^3$ μπορεί να περιγραφεί πλήρως από την απόστασή του $\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ από το σημείο $(0,0,0)$, την γωνία $\phi=\arctan(\sqrt{x^2+y^2}/z)$ με $0\le\phi<\pi$, και την γωνία $\theta=\arctan(y/x)$ με $0\le\theta<2\pi$. Εκφράζοντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες x,y,z συναρτήσει των σφαιρικών συντεταγμένων ρ,ϕ,θ βρίσκουμε

$$x=\rho\sin\phi\cos\theta,\ y=\rho\sin\phi\sin\theta \text{ και } z=\rho\cos\phi.$$

Οι εξισώσεις αυτές ορίζουν τον μετασχηματισμό: $T:\{(\rho,\phi,\theta):0<\rho<\infty, 0<\phi<\pi, 0\le\theta<2\pi\}\to(x,y,z)$. Ένας υπολογισμός μας δίνει ότι η *Jacobian* $\mathfrak{J}T$ είναι

$$\mathfrak{J}T=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}=\rho^2\sin\phi.$$

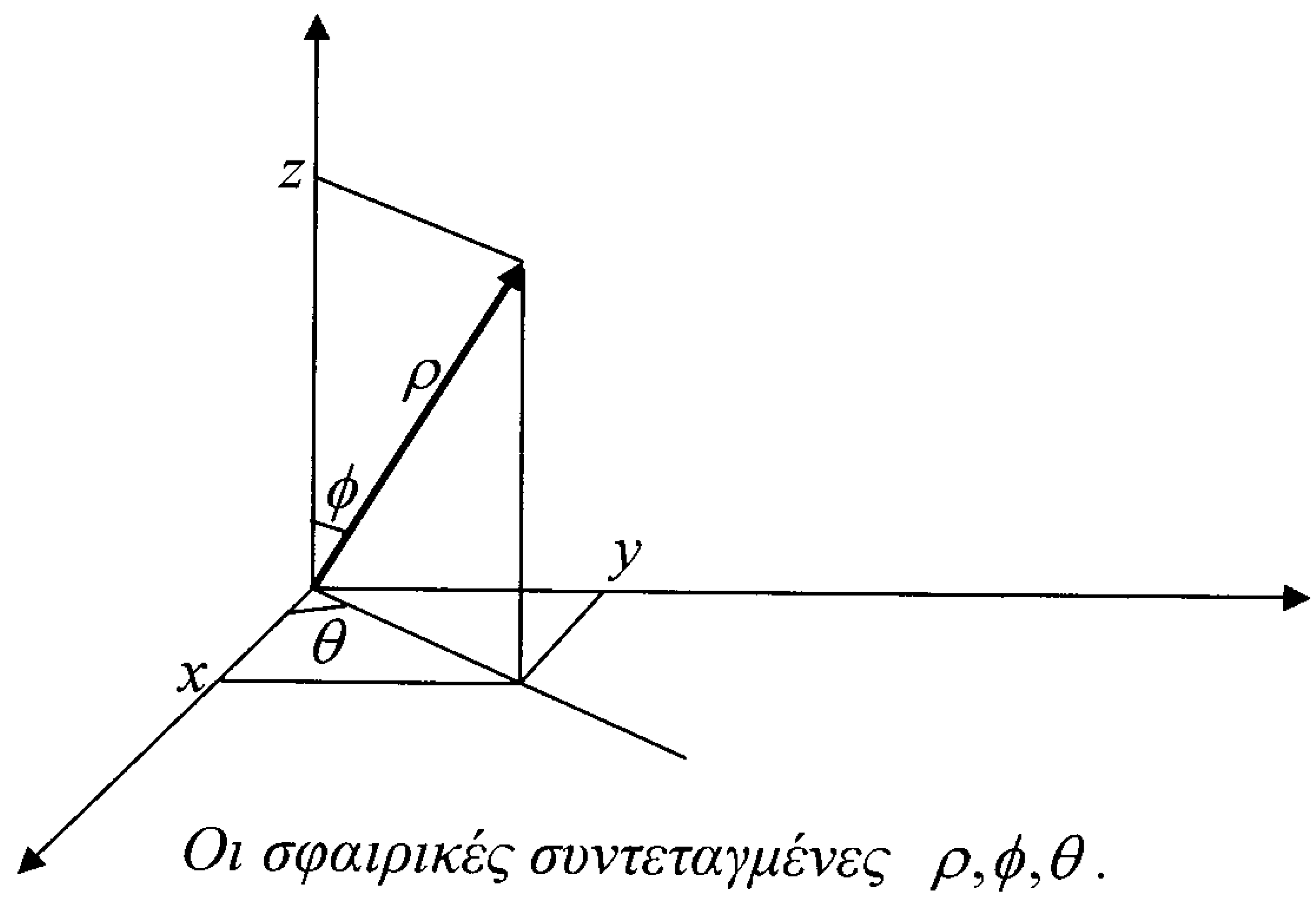
Άρα η σχέση των στοιχείων όγκου είναι $dxdydz=\rho^2\sin\phi\cdot d\rho d\phi d\theta$,

και για κατάλληλα σύνολα $D\subset\mathbb{R}^3$,

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{G} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\rho\sin\phi\sin\theta,\rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\cdot d\rho d\phi d\theta$$

όπου $G = T^{-1}(D)$. Π.χ., για κατάλληλες συναρτήσεις $f(x,y,z)$, έχουμε

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<r^2} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{\phi=0}^{\pi}\int\limits_{\rho=0}^{r} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi\cdot d\rho d\phi d\theta .$$



Οι σφαιρικές συντεταγμένες ρ,ϕ,θ.

Εφαρμογές. 1. Ο όγκος της μπάλας $B(0,r) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2<r^2\}$ δίδεται από το ολοκλήρωμα

$$\mathcal{O}\gamma\kappa(B(0,r)) = \iiint\limits_{B(0,r)} dxdydz = \int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{\phi=0}^{\pi}\int\limits_{\rho=0}^{r} \rho^2\sin\phi\cdot d\rho d\phi d\theta = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

2. Γενικότερα, το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{r^2<x^2+y^2+z^2<R^2} (x^2+y^2+z^2)^\lambda dxdydz \quad (\lambda\in\mathbb{R}),$$

σε σφαιρικές συντεταγμένες γίνεται

$$\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{\phi=0}^{\pi}\int\limits_{\rho=r}^{R} \rho^{2\lambda}\rho^2\sin\phi\cdot d\rho d\phi d\theta = \begin{cases} \dfrac{4\pi}{2\lambda+3}\left(R^{2\lambda+3}-r^{2\lambda+3}\right) & \alpha\nu\ \ 2\lambda+3\neq 0 \\ 4\pi(\log R-\log r) & \alpha\nu\ \ \lambda=-3/2. \end{cases}$$

Αφήνοντας το $\varepsilon\to 0^+$, βρίσκουμε ότι

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1} (x^2+y^2+z^2)^\lambda dxdydz < \infty \text{ αν κα μόνο αν } 2\lambda+3>0 .$$

Ομοίως, αφήνοντας το $r\to\infty$, βρίσκουμε ότι

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1} (x^2+y^2+z^2)^\lambda dxdydz < \infty \text{ αν και μόνο αν } 2\lambda+3<0 .$$

3. Το διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$\int\limits_{x=0}^{a}\left[\int\limits_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\int\limits_{z=0}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}\right)dy\right]dx$$

ισούται – από το *Θεώρημα του Fubini* – με το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2<a^2\\ x,y,z>0}} \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}},$$

το οποίο – από τον τύπο σε σφαιρικές συντεταγμένες – γίνεται

$$\int\limits_{\theta=0}^{\pi/2}\int\limits_{\phi=0}^{\pi/2}\int\limits_{\rho=0}^{a} \frac{\rho^2\sin\phi\cdot d\rho d\phi d\theta}{\sqrt{1+\rho^2}} = \frac{\pi}{2}\int\limits_{\rho=0}^{a}\frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{1+\rho^2}} .$$

4. Το κέντρο βάρους του ημισφαιρίου

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2<1,\ z>0\}$$

είναι το σημείο $(0,0,\bar{z})$ όπου

$$\bar{z}=\frac{\iiint_D z\,dxdydz}{\iiint_D dxdydz}=\frac{\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{\phi=0}^{\pi/2}\left(\int_{\rho=0}^{1}\rho\cos\phi\ \rho^2\sin\phi d\rho\right)rdr\right)d\theta}{\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{\phi=0}^{\pi/2}\left(\int_{\rho=0}^{1}\rho^2\sin\phi d\rho\right)rdr\right)d\theta}.$$

15.4. Εφαρμογές του τύπου αλλαγής μεταβλητών στα τριπλά ολοκληρώματα. 1. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{r^2<\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}<R^2}\left(\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}\right)^{\lambda}dxdydz\quad(\alpha,\beta,\gamma>0,\ \lambda\in\mathbb{R})$$

θέτουμε

$$u=\frac{x}{\alpha},\ v=\frac{y}{\beta},\ w=\frac{z}{\gamma},\ \text{οπότε } dxdydz=\alpha\beta\gamma dudvdw,$$

και το δοθέν ολοκλήρωμα γίνεται

$$\iiint\limits_{r^2<u^2+v^2+w^2<R^2}(u^2+v^2+w^2)^{\lambda}dudvdw.$$

2. Η περίπτωση $\lambda=0$ του προηγουμένου ολοκληρώματος δίνει τον όγκο του ελλειψοειδούς

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1,$$

δηλαδή $\iiint_{\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}<1}dxdydz=\frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma$.

3. Θα δείξουμε ότι για κατάλληλους αριθμούς α,β,γ και συνάρτηση f,

$$\iiint\limits_{\substack{x>0,y>0,z>0\\x+y+z<1}}x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}f(x+y+z)dxdy=\left(\int_{u=0}^{1}u^{\alpha+\beta+\gamma+2}f(u)du\right)\left(\int_{v=0}^{1}v^{\alpha+\beta+1}(1-v)^{\gamma}dv\right)\left(\int_{w=0}^{1}w^{\alpha}(1-w)^{\beta}dw\right).$$

Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $x=uvw$, $y=uv(1-w)$, $y=u(1-v)$, με αντίστροφο τον

$$u=x+y+z,\ v=(x+y)/(x+y+z),\ v=x/(x+y).$$

Εν συνεχεία παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{x>0,y>0,z>0,x+y+z<1\}$ ευρίσκεται σε αντιστοιχία με το σύνολο $\{0<u<1,0<v<1,0<w<1\}$. Αν τώρα υπολογίσουμε την *Jacobian* βρίσκουμε

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=u^2v,$$

και η αποδεικτέα σχέση έπεται.

4. Για ένα σχετικά απλό σύνολο $G\subset\mathbb{R}^2$, θεωρούμε το σύνολο

$$D=\{(tx,ty,a(1-t)):\ (x,y)\in G,\ 0\le t\le 1\}\subset\mathbb{R}^3\quad(a>0).$$

Τότε για κατάλληλες συναρτήσεις $f(x,y,z)$,

$$\iiint\limits_{D}f(x,y,z)dxdydz=a\iint\limits_{(u,v)\in G}\left(\int_{t=0}^{1}f\big(tu,tv,(1-t)a\big)t^2dt\right)dudv.$$

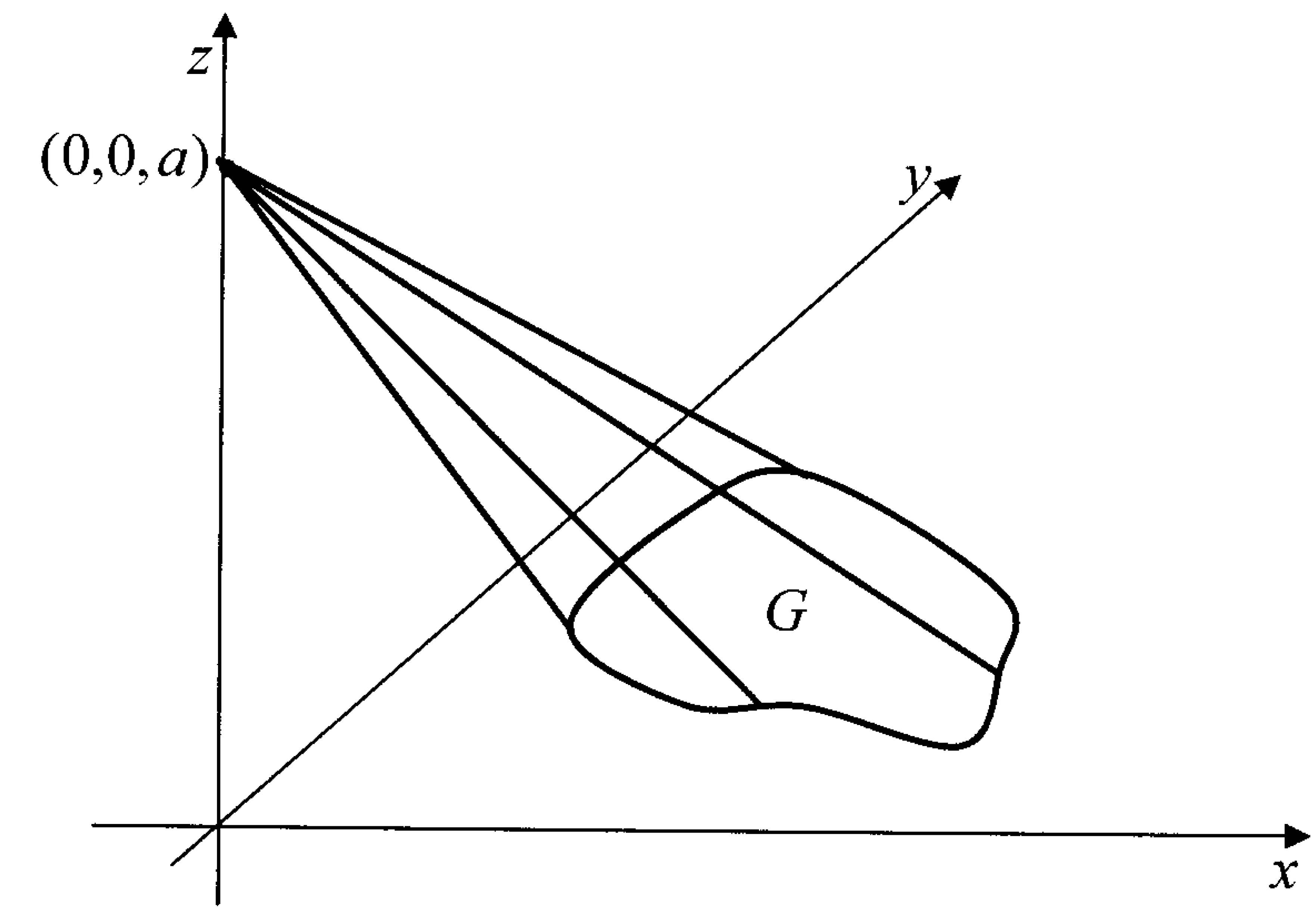
Για να το δούμε αυτό αρκεί να θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό

$$x=tu,\ y=tv,\ z=(1-t)a,\ (u,v)\in G,\ 0\le t\le 1,$$

και να παρατηρήσουμε ότι το σύνολο $G\times[0.1]$ ευρίσκεται σε αντιστοιχία με το σύνολο D. Επίσης

$$\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)}\right|=at^2,$$

και η ζητούμενη σχέση έπεται.



Το σύνολο D παράγεται αν συνδέσουμε (με ευθύγραμμα τμήματα) το σημείο $(0,0,a)$ με τα σημεία $(x,y,0)$ του συνόλου G.

Π.χ., ο όγκος του D είναι

$$\mathcal{O}\gamma\kappa(D)=\iiint_D dxdydz = a\iint_{(u,v)\in G}\left(\int_{t=0}^{1} t^2dt\right)dudv=\frac{1}{3}a\cdot\mathcal{E}\mu\beta(G),$$

και η ροπή αδρανείας του D με άξονα περιστροφής τον άξονα περιστροφής την ευθεία των x είναι

$$\iiint_D y^2dxdydz = a\iint_{(u,v)\in G}\left(\int_{t=0}^{1}(tv)^2t^2dt\right)dudv=\frac{1}{5}a\iint_{(u,v)\in G}v^2dudv.$$

5. Θεωρήστε το ημισφαίριο $\mathrm{H}=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=R^2,\ z>0\}$ και το σημείο $P=(\alpha,\beta,\gamma)$ $(\gamma<0)$. Φέροντας τα ευθύγραμμα τμήματα από το σημείο P προς τα σημεία (x,y,z) του ημισφαιρίου σχηματίζουμε το στερεό $D=\{(1-t)P+t(x,y,z):\ (x,y,z)\in\mathrm{H}\}$. Για κατάλληλες συναρτήσεις $f(x,y,z)$,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/2}\int_{t=0}^{1}g(t,\phi,\theta)\left|\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,\phi,\theta)}\right|dtd\phi d\theta,$$

όπου $g(t,\phi,\theta)=f\big((1-t)\alpha+tR\sin\phi\cos\theta,(1-t)\beta+tR\sin\phi\sin\theta,(1-t)\gamma+tR\cos\phi\big)$ και

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,\phi,\theta)}=\begin{pmatrix}-\alpha+R\sin\phi\cos\theta & -\beta+R\sin\phi\sin\theta & -\gamma+R\cos\phi\\ (1-t)\alpha+Rt\cos\phi\cos\theta & (1-t)\beta+Rt\cos\phi\sin\theta & (1-t)\gamma-R\sin\phi\\ (1-t)\alpha-Rt\sin\phi\cos\theta & (1-t)\beta+Rt\sin\phi\cos\theta & 0\end{pmatrix}.$$

[Εκείνο που κάναμε ήταν να παραμετρήσουμε το ημισφαίριο Η χρησιμοποιώντας τις σφαιρικές συντεταγμένες ϕ,θ και να χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό

$$x=(1-t)\alpha+tR\sin\phi\cos\theta,\ y=(1-t)\beta+tR\sin\phi\sin\theta,\ z=(1-t)\gamma+tR\cos\phi.]$$

15.5. Ασκήσεις. 1. Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό $x=u^2$, $y=v^2$, $z=w^2$, για να μετασχηματίστε ένα τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στο στερεό $\{(x,y,z):\ x+y+z<1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$ σε ένα τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στο πρώτο ογδοημόριο της μπάλας $u^2+v^2+w^2<1$. Εν συνεχεία γράψτε το τελευταίο ολοκλήρωμα σε σφαιρικές συντεταγμένες.

2. Έστω $\alpha,\beta,\gamma>0$. Χρησιμοποιήστε τον μετασχηματισμό $u=x^\alpha$, $v=y^\beta$, $w=z^\gamma$, για να μετασχηματίστε ένα τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στο στερεό

$$\{(x,y,z):\ x^{2\alpha}+y^{2\beta}+z^{2\gamma}<1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}$$

σε ένα τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στο πρώτο ογδοημόριο της μπάλας $u^2+v^2+w^2<1$. Εν συνεχεία γράψτε το τελευταίο ολοκλήρωμα σε σφαιρικές συντεταγμένες.

3. Δείξτε ότι $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2<R^2\\ x>0,y>0,z>0}} xyz\,dxdydz = \frac{R^6}{48}$.

4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2<1\\ x>0,y>0,z>0}} xyz\,dxdydz$ $(\alpha,\beta,\gamma>0)$.

5. Εντοπίστε το κέντρο βάρους του στερεού $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2<1,\ z>\alpha\}$ $(-1<\alpha<1)$.

6. Εντοπίστε το κέντρο βάρους του στερεού $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2<1,\ z>\lambda\sqrt{x^2+y^2}\}$ $(\lambda>0)$.

7. Υπολογίστε την κινητική ενέργεια μιας ομογενούς μπάλας ακτίνας R, όταν αυτή περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω, γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο της.

8. Για $\lambda\in\mathbb{R}$, μελετήστε ως προς την σύγκλιση το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{5}\right)^{\lambda}dxdydz$.

9. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}(x^2+y^2+z^2)^{\lambda}e^{-(x^2+y^2+z^2)}dxdydz \quad (\lambda\in\mathbb{R}).$$

10. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση τα ολοκληρώματα

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{dxdydz}{(\alpha|x|+\beta|y|+\gamma|z|)^{\lambda}} \quad \text{και} \quad \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2>1}\frac{dxdydz}{(\alpha|x|+\beta|y|+\gamma|z|)^{\lambda}},$$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, όταν $\alpha,\beta,\gamma>0$.

11. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{\mu}}{(1+x^2+y^2+z^2)^{\lambda}}dxdydz$ $(\lambda,\ \mu\in\mathbb{R})$.

12. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση το ολοκλήρωμα

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{\sqrt{\sqrt{|x|}+y^2+z^4}}{(x^2+y^2+z^2)^{31/20}}dxdydz.$$

13. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint\limits_{D}\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+(x^2+y^2+z^2)^2}dxdydz$ όπου D είναι το στερεό

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2<r^2 \ \text{και}\ x^2+y^2<\alpha z^2\}\quad (r>0,\alpha>0).$$

14. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση τα ολοκληρώματα

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{1}{\left[1-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\right]^{\lambda}}dxdydz, \quad \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{1}{(x^2+y^6+z^8)^{\lambda+1}\left[1-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\right]^{\lambda}}dxdydz,$$

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{1}{(|x|+|y|+|z|)^{5/2}\left[1-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\right]^{\lambda}}dxdydz,$$

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2<1}\frac{1}{(|x|+|y|+|z|)^{5/2}\left[1-(x^2+y^2+z^2)^{1/2}\right]^{\lambda+(1/2)}}dxdydz, \text{ όταν } \tfrac{1}{2}<\lambda<1.$$

15. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{x=0}^{a}\left[\int_{y=0}^{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2a^2-x^2-y^2}}\frac{x^2+y^2+z^2}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}dz\right)dy\right]dx$.

16. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση, τα ολοκληρώματα $\displaystyle\iiint\limits_{G}\frac{dxdydz}{\left(1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^{\lambda}}$, στις περιπτώσεις: $G\subset\{x^2+y^2+z^2<1\}$ και $G\subset\{1<\sqrt{x^2+y^2+z^2}<R\}$ (G είναι σε κάθε περίπτωση ένα ανοικτό σύνολο του οποίου το σύνορο έχει περιεχόμενο μηδέν).

16. Επικαμπύλια ολοκληρώματα

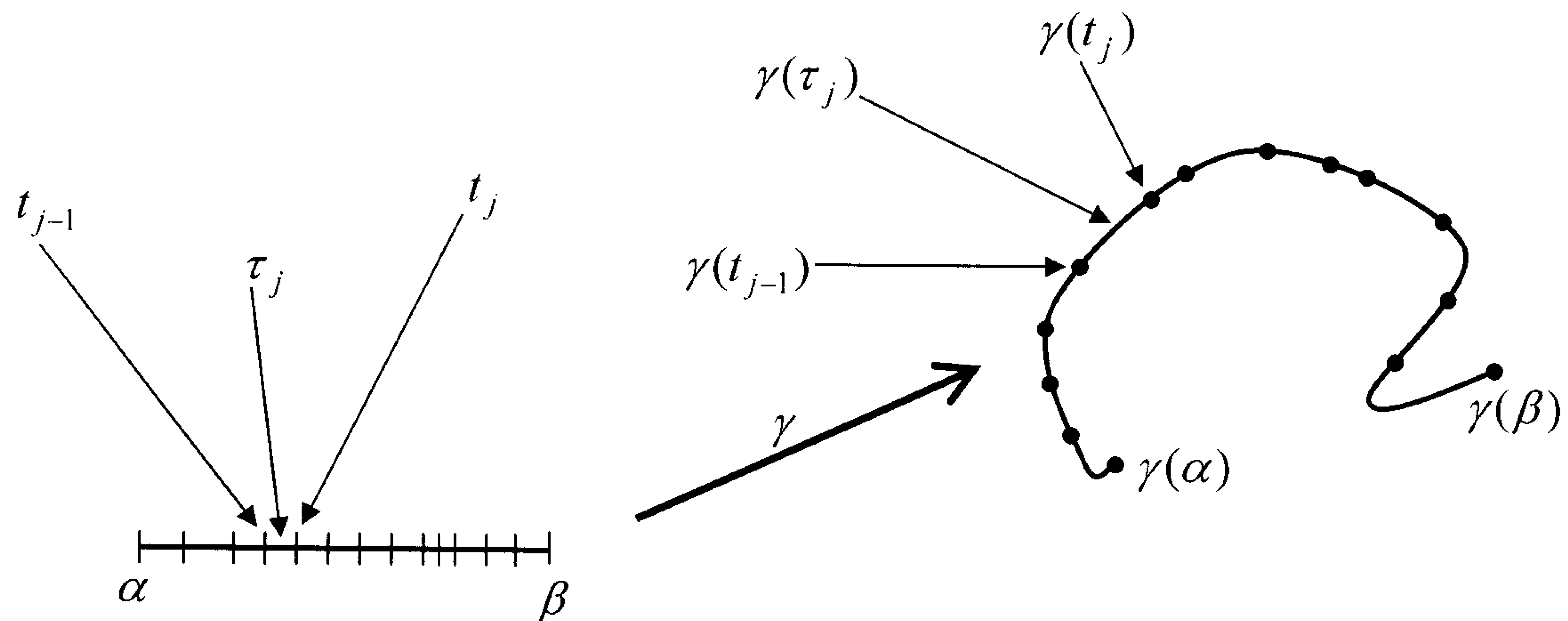
16.1 Επικαμπύλια ολοκληρώματα στο xy – επίπεδο – Επικαμπύλια ολοκληρώματα της μορφής $\int_\gamma pdx+qdy$. Ας θεωρήσουμε μια C^1 – καμπύλη $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ και δυο συνεχείς συναρτήσεις $p,q:[\gamma]\to\mathbb{R}$, όπου $[\gamma]\overset{\text{ορ}}{=}\gamma([\alpha,\beta])$ είναι το σύνολο των σημείων της καμπύλης. Γράφοντας αναλυτικά την καμπύλη γ, έχουμε δυο C^1 – συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$ ορισμένες για $t\in[\alpha,\beta]$, ούτως ώστε $\gamma(t)=(x(t),y(t))$. Με άλλα λόγια οι εξισώσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$, για $t\in[\alpha,\beta]$, είναι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης γ.

Η διαδικασία προσέγγισης στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma pdx+qdy$ είναι η εξής: Για κάθε διαμέριση $P=\{\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_N=\beta\}$ του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ και για κάθε επιλογή σημείων $\{\tau_j\}$ ως προς την διαμέριση αυτή (δηλαδή $t_{j-1}\le\tau_j\le t_j$), σχηματίζουμε τα αθροίσματα *Riemann*

$$\sum_{j=1}^{N}\left[p(\xi_j,\eta_j)(x_j-x_{j-1})+q(\xi_j,\eta_j)(y_j-y_{j-1})\right],$$

όπου $x_j=x(t_j)$, $y_j=y(t_j)$ και $(\xi_j,\eta_j)=\gamma(\tau_j)=(x(\tau_j),y(\tau_j))$. Το όριο αυτών των αθροισμάτων, καθώς η λεπτότητα $\|P\|=\max\limits_{1\le j\le N}(t_j-t_{j-1})\to 0$, υπάρχει και μάλιστα

$$(*)\qquad \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{j=1}^{N}\left[p(\xi_j,\eta_j)(x_j-x_{j-1})+q(\xi_j,\eta_j)(y_j-y_{j-1})\right]=\int_\alpha^\beta\left[p(x(t),y(t))\cdot\frac{dx}{dt}(t)+q(x(t),y(t))\cdot\frac{dy}{dt}(t)\right]dt.$$



Σε κάθε διαμέριση του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, η απεικόνιση γ αντιστοιχεί μια διαμέριση του συνόλου $[\gamma]$ των σημείων της καμπύλης.

Αυτό που σημαίνει η (*) είναι το εξής: Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ώστε για κάθε διαμέριση P του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ με $\|P\|<\delta$ και για κάθε επιλογή σημείων $\{\tau_j\}$ σχετικά με την διαμέριση P, να ισχύει

$$\left|\sum_{j=1}^{N}\left[p(\xi_j,\eta_j)(x_j-x_{j-1})+q(\xi_j,\eta_j)(y_j-y_{j-1})\right]-\int_\alpha^\beta\left[p(x(t),y(t))\cdot\frac{dx}{dt}(t)+q(x(t),y(t))\cdot\frac{dy}{dt}(t)\right]dt\right|<\varepsilon.$$

Ορισμός. Η κοινή τιμή του ορίου και του ολοκληρώματος στην (*) ονομάζεται **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της διαφορικής μορφής** $pdx+qdy$ πάνω στην καμπύλη γ και συμβολίζεται με

$$\int_\gamma p(x,y)dx+q(x,y)dy \text{ ή } \int_\gamma pdx+qdy.$$

16.2. Το ανεξάρτητο του επικαμπυλίου ολοκληρώματος από την παραμέτρηση της καμπύλης. Η τιμή του ολοκληρώματος $\int_\gamma pdx+qdy$ είναι ανεξάρτητη από την παραμέτρηση της καμπύλης γ. Κατ' αρχάς ας εξηγήσουμε τί είναι αναπαραμέτρηση της καμπύλης γ. Ας θεωρήσουμε μια C^1 – απεικόνιση $\phi:[\alpha_1,\beta_1]\to[\alpha,\beta]$, από το διάστημα $[\alpha_1,\beta_1]$ επί του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, η οποία να είναι γνησίως αύξουσα, οπότε βέβαια $\phi(\alpha_1)=\alpha$ και $\phi(\beta_1)=\beta$. Αν $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ είναι μια C^1 – καμπύλη, τότε ορίζεται μια «άλλη» καμπύλη, η εξής:

$$\gamma\circ\phi:[\alpha_1,\beta_1]\to\mathbb{R}^2 \text{ δηλαδή } \gamma\circ\phi(s)=\gamma(\phi(s)) \text{ για } \alpha_1\le s\le\beta_1 .$$

Λέγουμε τότε ότι η $\gamma\circ\phi$ είναι μια **αναπαραμέτρηση** της καμπύλης γ. Έτσι αν $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$, είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$, τότε $x=x(\phi(s))$, $y=y(\phi(s))$, $s\in[\alpha_1,\beta_1]$, είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης $\gamma\circ\phi:[\alpha_1,\beta_1]\to\mathbb{R}^2$. Το ανεξάρτητο του ολοκληρώματος $\int_\gamma pdx+qdy$ από την παραμέτρηση της καμπύλης σημαίνει ότι

(**) $$\int_{\gamma\circ\phi} pdx+qdy=\int_\gamma pdx+qdy .$$

16.3. Παραδείγματα. 1. Ας υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma(-ydx+xdy)$, όταν η καμπύλη γ είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο (0,0) και ακτίνα a. Στο παράδειγμα αυτό η καμπύλη περιγράφεται γεωμετρικά, οπότε θα πρέπει να βρούμε μια παραμέτρηση της καμπύλης. Και μια τέτοια παραμέτρηση του κύκλου αυτού είναι η εξής: $x(t)=a\cos t$, $y(t)=a\sin t$ με $0\le t\le 2\pi$. Επομένως

$$\int_C(-ydx+xdy)=\int_{t=0}^{2\pi}\left[-y(t)\frac{dx}{dt}(t)+x(t)\frac{dy}{dt}(t)\right]dt=\int_{t=0}^{2\pi}[(-a\sin t)(-a\sin t)+(a\cos t)(a\cos t)]dt=\int_{t=0}^{2\pi}a^2dt=2\pi a^2 .$$

2. Υπολογισμός του επικαμπυλίου ολοκληρώματος $\int_{[A,B]}pdx+qdy$, όταν A και B είναι δυο σημεία του επιπέδου. Ας πούμε ότι $A=(a_1,a_2)$ και $B=(b_1,b_2)$. Τότε μια παραμέτρηση του ευθυγράμμου τμήματος $[A,B]$ είναι

$$x(t)=a_1(1-t)+b_1t,\ y(t)=a_2(1-t)+b_2t \text{ με } 0\le t\le 1 .$$

Επομένως

$$\int_{[A,B]}pdx+qdy=\int_{[A,B]}p(x,y)dx+q(x,y)dy=\int_{t=0}^{1}[p(a_1+t(b_1-a_1),a_2+t(b_2-a_2))(b_1-a_1)$$
$$+q(a_1+t(b_1-a_1),a_2+t(b_2-a_2))(b_2-a_2)]dt .$$

Και στην περίπτωση που τα σημεία A και B ευρίσκονται πάνω στον άξονα των x, $A=(a_1,0)$ και $B=(b_1,0)$, έχουμε $\int_{[A,B]}pdx+qdy=\int_{[A,B]}p(x,y)dx+q(x,y)dy=\int_{x=a_1}^{b_1}p(x,0)dx$.

3. Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_\gamma\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$, όπου γ είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο (0,0) και ακτίνα ρ. Παίρνοντας την παραμέτρηση $x(t)=\rho\cos t$, $y(t)=\rho\sin t$, $0\le t\le 2\pi$, του κύκλου αυτού, υπολογίζουμε

$$\int_\gamma\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int_{t=0}^{2\pi}\frac{-y(t)\frac{dx}{dt}(t)+x(t)\frac{dy}{dt}(t)}{[x(t)]^2+[y(t)]^2}dt=\int_{t=0}^{2\pi}\frac{(-\rho\sin t)(-\rho\sin t)+(\rho\cos t)(\rho\cos t)}{\rho^2}dt=\int_{t=0}^{2\pi}dt=2\pi .$$

Παρατηρήστε ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι ανεξάρτητο του ρ.

4. Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int_\Gamma\frac{(x-\alpha)dy-(y-\beta)dx}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}$, όπου Γ είναι η καμπύλη Γ: $x=\alpha+\rho\cos t$, $y=\beta+\rho\sin t$, $0\le t\le 2\pi N$ (όπου $N\in\mathbb{N}$). Η εν λόγω καμπύλη είναι «κύκλος» (με κέντρο το σημείο (α,β)), ο οποίος <u>όμως</u> διαγράφεται N φορές. Οπότε η τιμή του ολοκληρώματος αυτού είναι $2\pi N$.

5. Έστω $\varphi,\theta\in\mathbb{R}$, $\varphi<\theta$, και $C:[\varphi,\theta]\to\mathbb{R}^2$ η καμπύλη C: $x=\alpha+\rho\cos t$, $y=\beta+\rho\sin t$, $\varphi\le t\le\theta$. Τότε

$$\int_C \frac{(x-\alpha)dy-(y-\beta)dx}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2} = \theta - \varphi .$$

16.4. ***Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω σε κατά τμήματα C^1 – καμπύλες.*** Μέχρι τώρα οι καμπύλες που χρησιμοποιούσαμε ήταν C^1. Μια καμπύλη $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ λέγεται ότι είναι **κατά τμήματα** C^1, αν υπάρχουν σημεία $\alpha=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\cdots<\tau_N=\beta$, ούτως ώστε οι καμπύλες $\gamma_j \overset{op}{=} \gamma\big|_{[\tau_{j-1},\tau_j]}:[\tau_{j-1},\tau_j]\to\mathbb{R}^2$, $j=1,2,\ldots,N$, να είναι όλες C^1. [Συνήθως υποθέτουμε ότι η καμπύλη $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ είναι συνεχής.] Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω σε μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη ορίζεται ως εξής:

$$\int_C pdx+qdy \overset{op}{=} \sum_{j=1}^{N}\int_{C_j} pdx+qdy = \sum_{j=1}^{N}\int_{\tau_{j-1}}^{\tau_j}\big[p(x(t),y(t))x'(t)+q(x(t),y(t))y'(t)\big]dt .$$

Συνήθως τα σημεία $\gamma(\tau_j)$, $j=1,2,\ldots,N$, όπου η καμπύλη ενδέχεται να μην είναι ομαλή, δεν δημιουργούν προβλήματα.

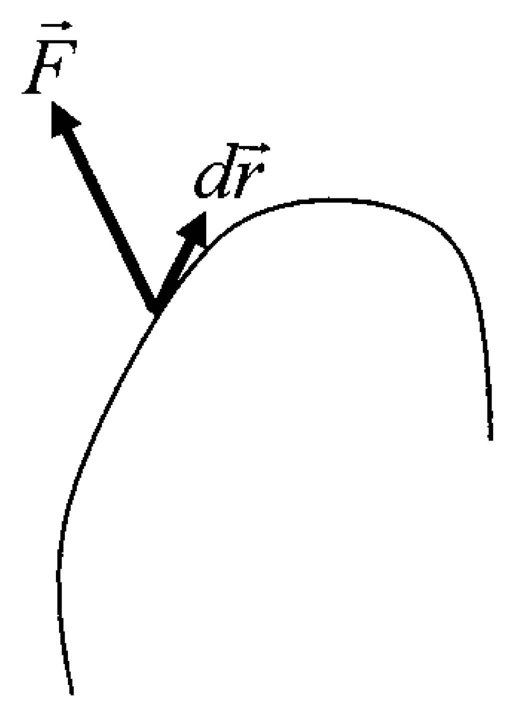
16.5. ***Φυσική σημασία του επικαμπυλίου ολοκληρώματος.*** Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma pdx+qdy$ ενίοτε γράφεται στην μορφή

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

όπου $\vec{F}$ παριστά το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}=p\vec{i}+q\vec{j}$, οριζόμενο πάνω στην καμπύλη γ — ή κατά μήκος της καμπύλης όπως λέγουμε — και $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}$ είναι το διάνυσμα θέσεως, που περιγράφει την καμπύλη. Με άλλα λόγια το διαφορικό $pdx+qdy$ γράφεται στην μορφή

$$pdx+qdy=\vec{F}\cdot d\vec{r}=(p\vec{i}+q\vec{j})\cdot[(dx)\vec{i}+(dy)\vec{j}\,].$$

Αν δε το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}$ θεωρηθεί σαν πεδίο δυνάμεων, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ είναι το **έργο** που παράγει το εν λόγω πεδίο δυνάμεων κατά μήκος της καμπύλης γ.



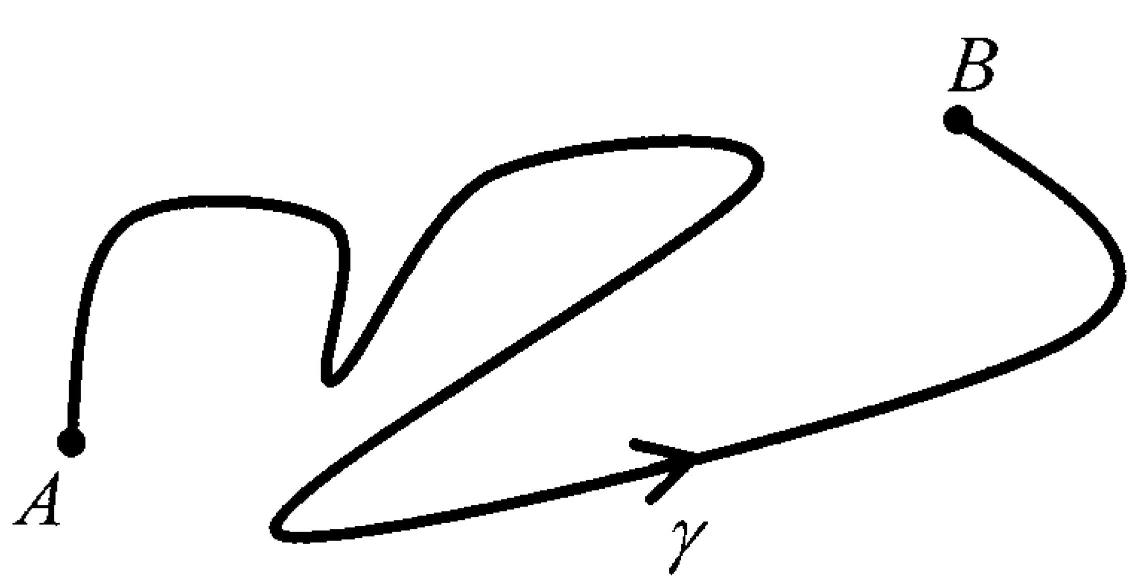
Το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\vec{F}$ με το στοιχειώδες διάνυσμα $d\vec{r}$ είναι το ***στοιχείο έργου*** *– το στοιχειώδες έργο.*

16.6. Θεώρημα. *Έστω $D\subset\mathbb{R}^2$ ένα ανοικτό σύνολο, $f:D\to\mathbb{R}$ μια C^1 – συνάρτηση και $\gamma:[\alpha,\beta]\to D$ μια κατά τμήματα C^1 – καμπύλη στο D. Τότε*

$$\int_\gamma df = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy = f(B)-f(A)$$

όπου $A=\gamma(\alpha)$ και $B=\gamma(\beta)$. Ισοδύναμα,

$$\int_\gamma \nabla f\cdot d\vec{r} = f(B)-f(A).$$



Αν η καμπύλη γ ξεκινά από το σημείο A και καταλήγει στο σημείο B, και η συνάρτηση f είναι C^1 σε περιοχή της καμπύλης, τότε $\int_\gamma df = f(B)-f(A)$.

Πόρισμα. *Αν η καμπύλη* $\gamma:[\alpha,\beta]\to D$ *είναι κλειστή, αν δηλαδή* $\gamma(\alpha)=\gamma(\beta)$, *τότε*

$$\int_\gamma df = \int_\gamma \vec{\nabla} f\cdot d\vec{r} = 0.$$

16.7. Παραδείγματα. 1. Θεωρήστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma x^y\left(\frac{y\cos x}{x}-\sin x\right)dx + x^y\log x\cos x dy$$

όπου γ είναι η καμπύλη: $x=e^t\cos t$, $y=\cos t-\sin t$, $0\le t\le \pi/3$. Παρατηρώντας ότι (για $x>0$)

$$x^y\left(\frac{y\cos x}{x}-\sin x\right)dx + x^y\log x\cos x dy = df \quad \text{όπου} \quad f(x,y)=x^y\cos x,$$

και ότι $\gamma(0)=(1,1)$ και $\gamma(\pi/3)=(\tfrac12 e^{\pi/3},\tfrac{1-\sqrt3}{2})$, βρίσκουμε ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι ίσο με $f(\tfrac12 e^{\pi/3},\tfrac{1-\sqrt3}{2})-f(1,1)$.

2. Θεωρήστε δυο τυχούσες C^1 συναρτήσεις $g(x,y)$ και $h(x,y)$, και ορίστε την καμπύλη

$$\Gamma:\ x=e^{g(\cos t,\sin t)},\ y=h(\cos t,\sin t),\ 0\le t\le 2\pi.$$

Τότε η καμπύλη Γ είναι κλειστή και ευρίσκεται στο ημιεπίπεδο $\{(x,y): x>0\}$. Επομένως

$$\int_\Gamma x^y\left(\frac{y\cos x}{x}-\sin x\right)dx + x^y\log x\cos x dy = 0.$$

3. Θεωρήστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, όπου $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ είναι μια καμπύλη η οποία δεν περνά από το σημείο $(0,0)$. Παρατηρώντας ότι

$$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=d\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad \text{στο σύνολο } \mathbb{R}^2-\{(0,0)\},$$

βρίσκουμε ότι

$$\int_\gamma \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=\log|B|-\log|A|,$$

όπου $A=\gamma(\alpha)$ και $B=\gamma(\beta)$.

16.8. Ασκήσεις. 1. Θεωρήστε την καμπύλη $\gamma=[(-1,-2),(3,0)]+[(3,0),(-3,4)]$ και υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}.$$

Επίσης θεωρήστε το ημικύκλιο $\mathcal{K}$ με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα $[(-1,-2),(-3,4)]$, το οποίο το ξεκινά από το σημείο $(-1,-2)$, περνά από το σημείο $(1,0)$, και καταλήγει στο σημείο $(-3,4)$, και υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}.$$

2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{[A,B]} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2},$$

όταν τα σημεία A και B ευρίσκονται πάνω στην ίδια ημιευθεία που ξεκινά από το σημείο $(0,0)$.

3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{C_{A,B}} \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$$

όταν $C_{A,B}$ είναι το τόξο του κύκλου, κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας a, από το σημείο A μέχρι το σημείο B.

4. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_C -ydx$ και $\int_C xdy$ όταν C είναι η έλλειψη $\frac{(x-\alpha)^2}{\lambda^2}+\frac{(y-\beta)^2}{\mu^2}=1$.

5. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_C -ydx$ και $\int_C xdy$ όταν C είναι το τρίγωνο (εννοείται η τριγωνική γραμμή) με κορυφές τα σημεία A,B,C.

6. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα $\int_C -ydx$ και $\int_C xdy$ όταν C είναι η καμπύλη $x^{2/3}+y^{2/3}=\alpha^{2/3}$ ($\alpha>0$).

7. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{[x+(x^2+y^2)f_x]dx+[y+(x^2+y^2)f_y]dy}{x^2+y^2},$$

όπου $f\in C^1(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})$ και $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ είναι μια καμπύλη η οποία δεν περνά από το σημείο $(0,0)$.

8. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{[(x^2+y^2)f_x-y]dx+[(x^2+y^2)f_y+x]dy}{x^2+y^2},$$

όπου $f\in C^1(\mathbb{R}^2-\{(0,0)\})$ και γ είναι ένας κύκλος με κέντρο το σημείο $(0,0)$.

9. Σωστό ή λάθος; Αν οι συναρτήσεις f και g είναι C^1 σε περιοχή της κλειστής καμπύλης γ τότε

$$\int_\gamma fg_x dx+fg_y dy=-\int_\gamma gf_x dx+gf_y dy.$$

10. Δείξτε ότι

$$\int_\Gamma \frac{(x-\alpha)dy-(y-\beta)dx}{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\pm 2\pi,$$

όπου Γ είναι η έλλειψη $x=\alpha+\lambda\cos t$, $y=\beta+\mu\sin t$, $0\le t\le 2\pi$.

16.9. Μήκος καμπυλών. Ας θεωρήσουμε μια καμπύλη $\gamma:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$ στο $xy-$επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$. Για κάθε διαμέριση $P=\{\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_N=\beta\}$ του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, θεωρούμε τα αντίστοιχα σημεία $\gamma(\alpha)=\gamma(t_0),\gamma(t_1),\gamma(t_2),\ldots,\gamma(t_N)=\gamma(\beta)$, πάνω στην καμπύλη $[\gamma]$. Οι συντεταγμένες των σημείων αυτών είναι $(x(t_j),y(t_j))$, $j=0,1,2,\ldots,N$. Εν συνεχεία ας σχηματίσουμε το άθροισμα

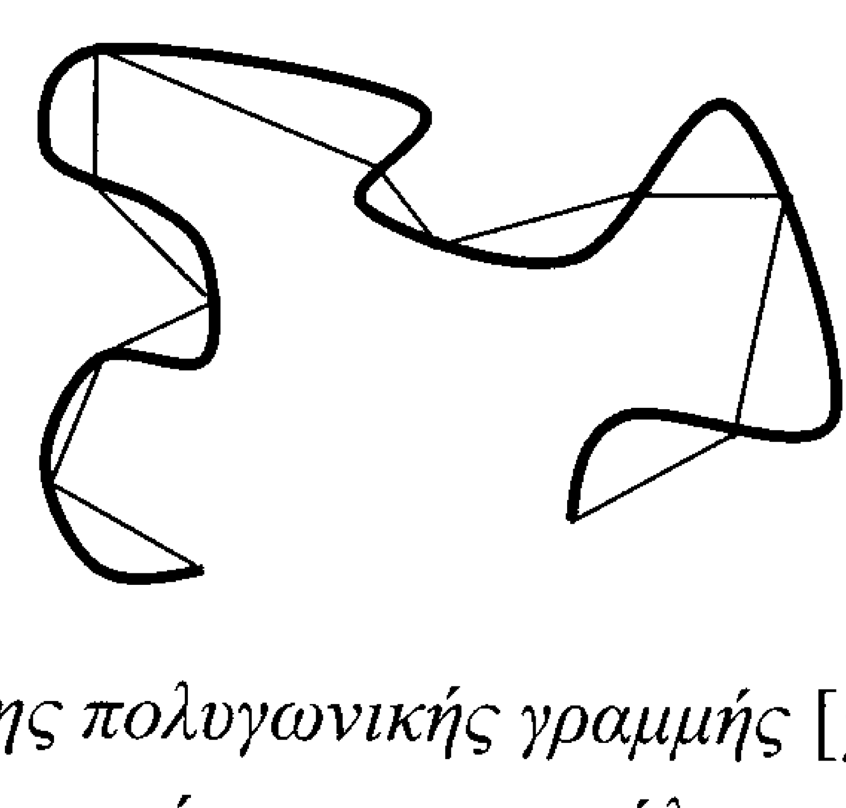
$$\mu(\gamma,P)=\sum_{j=1}^N\left|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\right|=\sum_{j=1}^N\sqrt{[x(t_j)-x(t_{j-1})]^2+[y(t_j)-y(t_{j-1})]^2},$$

το οποίο είναι το μήκος της πολυγωνικής γραμμής

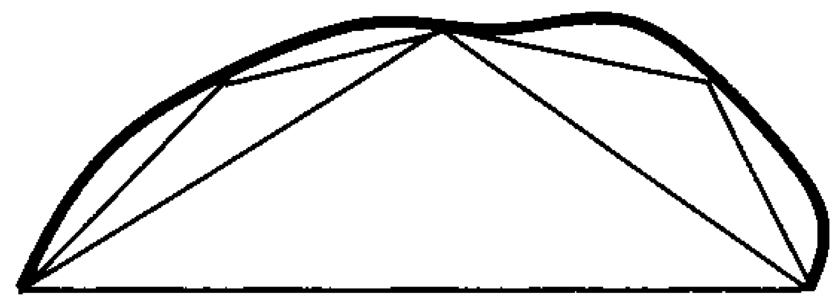
$$[\gamma(t_0),\gamma(t_1),\gamma(t_2),\ldots,\gamma(t_N)],$$

Τώρα, πρέπει να είναι διαισθητικά αποδεκτό, ότι αν η λεπτότητα $\|P\|=\max\limits_{1\le j\le N}(t_j-t_{j-1})$ της διαμέρισης P είναι «μικρή», τότε ο αριθμός $\mu(\gamma,P)$ προσεγγίζει το μήκος της καμπύλης γ. Από την ανωτέρω συζήτηση φαίνεται ότι είναι φυσικό ότι το μήκος της καμπύλης γ είναι ο αριθμός

$$\mu\eta\kappa(\gamma)\overset{o\rho}{=}\sup\{\mu(\gamma,P):\ \textit{καθώς το } P \textit{ διατρέχει το σύνολο των διαμερίσεων του } [\alpha,\beta]\}.$$



Το μήκος της πολυγωνικής γραμμής $[\gamma(t_0),\gamma(t_1),\gamma(t_2),\ldots,\gamma(t_N)]$ *προσεγγίζει το μήκος της καμπύλης.*



Λεπτότερες διαμερίσεις δίνουν καλύτερες προσεγγίσεις.

16.10. Θεώρημα. *Αν η καμπύλη γ είναι κλάσεως C^1, το supremum που ορίζει το μήκος της καμπύλης είναι πεπερασμένο και μάλιστα*

$$\mu\eta\kappa(\gamma) = \int_{t=\alpha}^{\beta} \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt = \int_{t=\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

16.11. Το ανεξάρτητο του μήκους καμπύλης από την παραμέτρηση. Ας θεωρήσουμε μια αναπαραμέτρηση $\gamma \circ \phi$ της καμπύλης $\gamma:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$. Δηλαδή αν $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$, είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης γ τότε $x = x(\phi(s))$, $y = y(\phi(s))$, $s \in [\alpha_1,\beta_1]$, είναι οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης $\gamma \circ \phi:[\alpha_1,\beta_1] \to \mathbb{R}^2$, όπου $\phi:[\alpha_1,\beta_1] \to [\alpha,\beta]$ είναι μια C^1 − απεικόνιση, από το διάστημα $[\alpha_1,\beta_1]$ επί του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, η οποία να είναι γνησίως αύξουσα, οπότε βέβαια $\phi(\alpha_1) = \alpha$ και $\phi(\beta_1) = \beta$. Τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$\int_{t=\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_{t=\alpha_1}^{\beta_1} \sqrt{\left(\frac{dx(\phi(s))}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy(\phi(s))}{ds}\right)^2}\, ds.$$

16.12. Στοιχείο μήκους καμπύλης. Ας θεωρήσουμε πάλι μια C^1 − καμπύλη $\gamma:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ στο xy − επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, και έστω $\ell = \mu\eta\kappa(\gamma)$ το μήκος αυτής. Το διαφορικό $\left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt$ λέγεται **στοιχείο μήκους** της καμπύλης $\gamma:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ και συμβολίζεται με ds. Δηλαδή,

$$ds = \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Είναι αυτό που όταν ολοκληρωθεί πάνω στην καμπύλη, δίνει το μήκος της καμπύλης. Ακριβέστερα, μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση $s:[\alpha,\beta] \to [0,\ell]$, με τον τύπο

$$s(t) = \int_{\gamma_t} ds = \int_{\tau=\alpha}^{t} \left|\frac{d\gamma}{d\tau}\right| d\tau = \int_{\tau=\alpha}^{t} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2}\, d\tau.$$

(γ_t είναι το μέρος της καμπύλης γ από το σημείο $\gamma(\alpha)$ μέχρι το σημείο $\gamma(t)$.) Τότε η συνάρτηση αυτή είναι C^1, και η παράγωγός της ως προς την παράμετρο t, είναι

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\gamma}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

γεγονός που δικαιολογεί και τον συμβολισμό « ds » του στοιχείου μήκους.

16.13. Επικαμπύλια ολοκληρώματα της μορφής $\int_\gamma f ds$. Έστω $\gamma:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^2$ μια C^1 − καμπύλη στο xy − επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, και $f:[\gamma] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής καμπύλη ορισμένη πάνω στην καμπύλη αυτή. Τότε ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma f ds$, της συνάρτησης f πάνω στην καμπύλη γ, γνωστό και σαν επικαμπύλιο ολοκλήρωμα **πρώτου είδους**, ως εξής:

$$\int_\gamma f ds = \int_{t=\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\frac{ds}{dt}\, dt = \int_{t=\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Και δεν είναι τίποτα άλλο από το όριο των αθροισμάτων Riemann που σχηματίζονται ως εξής: Θεωρούμε διαμερίσεις $P=\{\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_N=\beta\}$ του διαστήματος $[\alpha,\beta]$, καθώς και ενδιάμεσα σημεία $\tau_j\in[t_{j-1},t_j]$, και σχηματίζουμε τα αθροίσματα

$$\mathcal{S}(P,\{\tau_j\})=\sum_{j=1}^{N} f(\gamma(\tau_j))\left|\gamma(t_j)-\gamma(t_{j-1})\right|=\sum_{j=1}^{N} f(x(\tau_j),y(\tau_j))\sqrt{[x(t_j)-x(t_{j-1})]^2+[y(t_j)-y(t_{j-1})]^2}\,.$$

Τότε

$$\lim_{\|P\|\to 0}\mathcal{S}(P,\{\tau_j\})=\int_\gamma f ds\,,$$

υπό την έννοια ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ώστε για κάθε διαμέριση P του διαστήματος $[\alpha,\beta]$ και για κάθε επιλογή σημείων $\{\tau_j\}$, ως προς την διαμέριση P, να ισχύει:

$$\left|\mathcal{S}(P,\{\tau_j\})-\int_\gamma f ds\right|<\varepsilon\,.$$

Σημείωση. Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα της μορφής $\int_\gamma pdx+qdy$ λέγονται επικαμπύλια ολοκληρώματα **δευτέρου είδους**.

16.14. Εφαρμογές των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_\gamma f ds$.

1. Η **μέση τιμή** της συνάρτησης f πάνω στην καμπύλη γ είναι

$$\bar{f}=\frac{\int_\gamma f ds}{\int_\gamma ds}=\frac{1}{\mu\eta\kappa(\gamma)}\int_\gamma f ds\,.$$

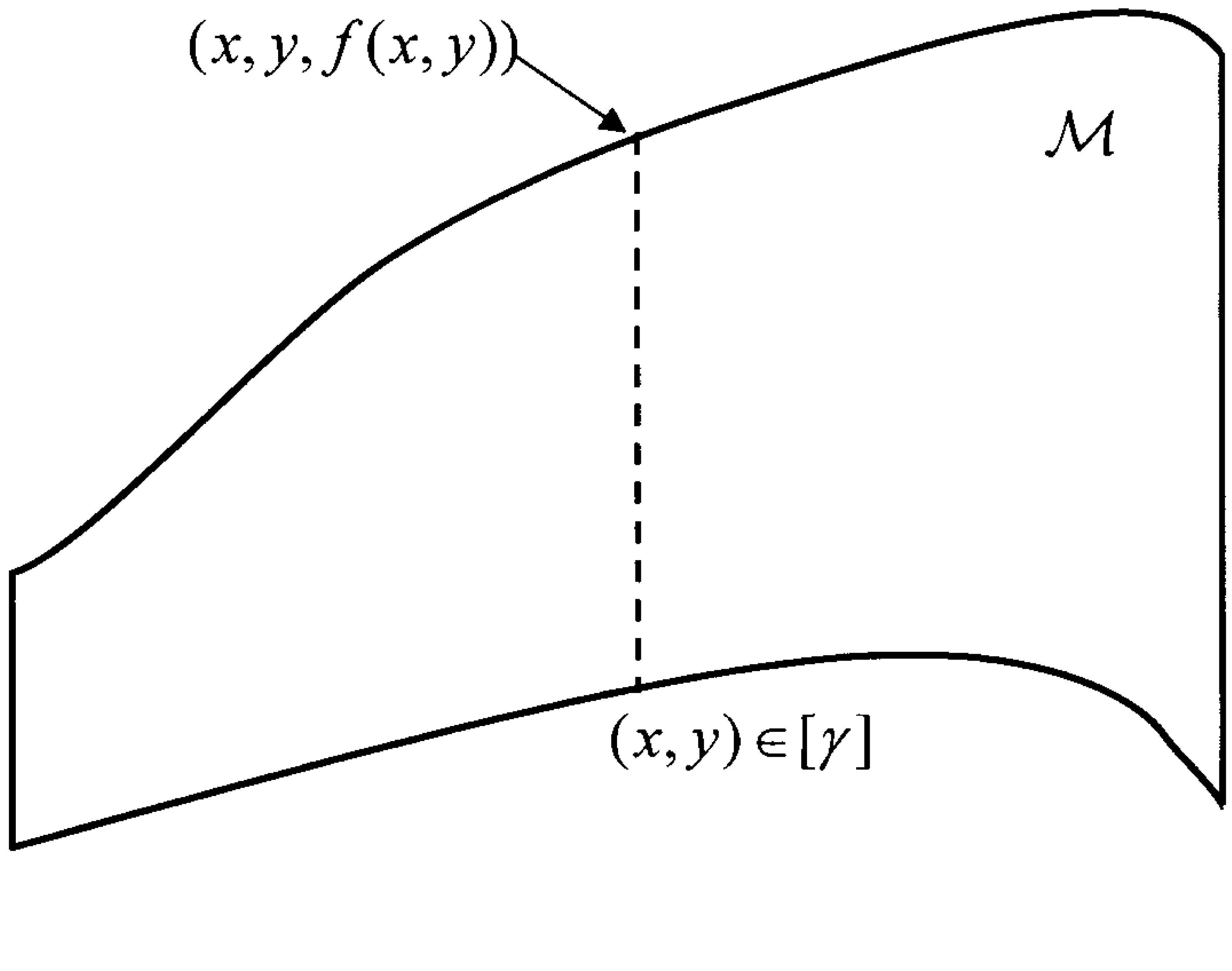
Π.χ. το **κέντρο βάρους** της ομογενούς καμπύλης γ είναι το σημείο

$$(\bar{x},\bar{y})=\frac{1}{\mu\eta\kappa(\gamma)}\left(\int_\gamma x ds,\int_\gamma y ds\right).$$

2. Αν η συνάρτηση $f\geq 0$ τότε η τιμή του ολοκληρώματος $\int_\gamma f ds$ είναι το **εμβαδόν** της επιφάνειας

$$\mathcal{M}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:(x,y)\in[\gamma],\ 0\leq z\leq f(x,y)\}\,.$$

(Βέβαια για να ισχύει αυτό θα πρέπει η καμπύλη να είναι σχετικά «απλή» – αλλιώς το ολοκλήρωμα «<u>μετρά και τις τυχόν επικαλύψεις</u>» που κάνει η καμπύλη με τον εαυτόν της.)



3. Η **ροπή αδρανείας** σώματος στο σχήμα της καμπύλης γ, με πυκνότητα 1 και με άξονα περιστροφής τον άξονα των z, είναι

$$\int_\gamma (x^2+y^2)ds .$$

4. Το **έργο** μιας δύναμης $\vec{F}$ κατά μήκος της καμπύλης γ είναι

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{\tau}\, ds ,$$

όπου $\vec{\tau}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο (στην καμπύλη) διανυσματικό πεδίο.

5. Η **ροή** της δύναμης $\vec{F}$ διαμέσω της καμπύλης γ είναι

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\vec{v}\, ds$$

όπου $\vec{v}$ είναι το μοναδιαίο κάθετο (στην καμπύλη) διανυσματικό πεδίο. (Εφαρμόζεται για επίπεδες καμπύλες.)

16.15. Ασκήσεις. 1. Γράψτε το ολοκλήρωμα που δίνει το μήκος της έλλειψης

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi\ (a>b>0).$$

Μπορείτε να το «υπολογίσετε»; Εν συνεχεία δείξτε ότι το μήκος της εν λόγω έλλειψης είναι $4aE(\sqrt{a^2-b^2}/a)$ όπου $E(k)=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt\ \ (0<k<1)$.

2. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}+x)$.

3. Γράψτε ένα ολοκλήρωμα για το μήκος της καμπύλης $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$.

4. Υπολογίστε το μήκος της καμπύλης $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

5. Εντοπίστε το κέντρο βάρους ενός ομογενούς σύρματος σε σχήμα ημικυκλίου ακτίνας a.

6. Θεωρήστε την επιφάνεια $\mathcal{M}$ που παράγεται όταν στα σημεία (x,y) της καμπύλης $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ υψώσουμε ευθύγραμμα τμήματα, κάθετα στο $xy-$επίπεδο, μήκους e^x+y^2. Γράψτε ένα ολοκλήρωμα που να δίνει το εμβαδόν της $\mathcal{M}$.

7. Πόση είναι η ροπή αδρανείας του κύκλου $x^2+y^2=2ax$ γύρω από τον $z-$άξονα;

8. Πόση είναι η ροπή αδρανείας του κύκλου $x^2+y^2=2ax$ γύρω από την ευθεία

$$x=2t+3,\ y=3t-2,\ z=5t-1\ (t\in\mathbb{R});$$

9. Θεωρήστε μια καμπύλη γ στο $xy-$επίπεδο με παραμετρικές εξισώσεις $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$. Εν συνεχεία πάρτε ένα σημείο (a,b,c) στον χώρο και συνδέστε το με τα σημεία της καμπύλης. Γράψτε ένα ολοκλήρωμα που να δίνει το εμβαδόν της επιφάνειας που παράγεται κατ' αυτόν τον τρόπο. (Η επιφάνεια μοιάζει με «κώνο».)

10. Γράψτε ένα ολοκλήρωμα για το εμβαδόν της επιφάνειας που αποτελείται από τα σημεία $(u,v,w)\in\mathbb{R}^3$ με

$$u=(1-\lambda)x,\ v=(1-\lambda)y,\ w=\lambda,\ x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}+x),\ \lambda\in[0,1].$$

11. Αναπτύξτε την θεωρία των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων στον $\mathbb{R}^n$: $2^{ου}$ είδους: $\int_\gamma \sum_{j=1}^n f_j dx_j$ και $1^{ου}$ είδους: $\int_\gamma f ds$. Ιδιαιτέρως αποδείξτε το θεώρημα: *Έστω $D\subset\mathbb{R}^n$ ένα ανοικτό σύνολο, $F:D\to\mathbb{R}$ μια C^1-συνάρτηση και $\gamma:[\alpha,\beta]\to D$ μια κατά τμήματα C^1-καμπύλη στο D. Τότε*

$$\int_\gamma dF=\int_\gamma\sum_{j=1}^n\frac{\partial F}{\partial x_j}dx_j=F(B)-F(A)\ \ \textit{όπου}\ A=\gamma(\alpha)\ \textit{και}\ B=\gamma(\beta).$$

Ισοδύναμα, $\int_\gamma \vec{\nabla}F\cdot d\vec{r}=F(B)-F(A)$.