## 5. Διαφορίσιμες συναρτήσεις και μερικές παράγωγοι

**5.1. Διαφορίσιμες συναρτήσεις.** Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$, όπου $\Omega$ είναι ένα ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$, και ένα σημείο $a\in\Omega$. Η συνάρτηση $f$ λέγεται **διαφορίσιμη** στο σημείο $a$ αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $A_1, A_2,\dots, A_n$ ούτως ώστε

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{|x-a|}\left(f(x)-f(a)-\sum_{j=1}^{n}A_j(x_j-a_j)\right)=0.$$

**Παρατηρήσεις. 1.** Για $n=1$, ο ανωτέρω ορισμός είναι ισοδύναμος με αυτό που συνήθως ονομάζουμε διαφορισιμότητα στην περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής δηλαδή την ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

**2.** Διαφορισιμότητα της συνάρτησης $f$ στο σημείο $a$ σημαίνει ότι η συνάρτηση είναι δυνατόν να **προσεγγισθεί** κοντά στο σημείο $a$ από μια συνάρτηση που είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Δηλαδή $f(x)\approx f(a)+\sum_{j=1}^{n}A_j(x_j-a_j)$ όταν $x\approx a$. Ακριβέστερα η ποσότητα $f(x)-f(a)-\sum_{j=1}^{n}A_j(x_j-a_j)$ τείνει στο μηδέν <u>γρηγορότερα</u> από την ποσότητα $|x-a|$, εννοείται του $x\to a$. Αυτό ενίοτε το γράφουμε

$$f(x)=f(a)+\sum_{j=1}^{n}A_j(x_j-a_j)+o(|x-a|) \text{ όταν το } x\to a.$$

**3.** Γεωμετρικά αυτό που μόλις είπαμε σημαίνει ότι το $n-$ διάστατο επίπεδο με εξίσωση

$$z=f(a)+\sum_{j=1}^{n}A_j(a)(x_j-a_j),$$

στον $(n+1)-$διάστατο $x_1x_2\cdots x_n z-$χώρο, **εφάπτεται** στην $n-$διάστατη επιφάνεια με εξίσωση $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Είναι δε το μόνο επίπεδο με αυτήν την ιδιότητα.

**4.** Αν η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $a$ τότε είναι συνεχής στο $a$.

**5.2. Μερικές παράγωγοι.** Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και $a\in\Omega$. Η **μερική παράγωγος** της συνάρτησης $f$ **ως προς την μεταβλητή** $x_j$ στο σημείο $a$ ορίζεται σαν το όριο

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\lim_{x_j\to a_j}\frac{f(a_1,\dots,a_{j-1},x_j,a_{j+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_{j-1},a_j,a_{j+1},\dots,a_n)}{x_j-a_j},$$

αν βέβαια αυτό υπάρχει. Έτσι η μερική παράγωγος $(\partial f/\partial x_j)(a)$ είναι η <u>συνήθης</u> παράγωγος στο σημείο $a_j$, της συνάρτησης $h_{j,a}(\tau)=f(a_1,\dots,a_{j-1},\tau,a_{j+1},\dots,a_n)$, δηλαδή $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=\left.\frac{dh_{j,a}}{d\tau}\right|_{\tau=a_j}$. Από αυτό έπονται οι βασικοί κανόνες διαφόρισης του αθροίσματος, του γινομένου και του πηλίκου συναρτήσεων:

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x_j}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)+\frac{\partial g}{\partial x_j}(a),\quad \frac{\partial(fg)}{\partial x_j}(a)=g(a)\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)+f(a)\frac{\partial g}{\partial x_j}(a)$$

και, αν $g(x)\neq 0$ για $x$ κοντά στο σημείο $a$,

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x_j}(a)=\frac{1}{g(a)}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)-\frac{f(a)}{[g(a)]^2}\frac{\partial g}{\partial x_j}(a).$$

Αν τώρα η μερική παράγωγος $(\partial f/\partial x_j)(a)$ υπάρχει για κάθε $a\in\Omega$, τότε ορίζεται η **μερική παράγωγος συνάρτηση**

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}:\Omega\to\mathbb{R},\quad a\to\frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

**Παραδείγματα. 1.** Των συναρτήσεων $f(x,y)=x^k y^m$, οι μερικές παράγωγοι είναι:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=kx^{k-1}y^m \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=mx^k y^{m-1}.$$

Γενικότερα αν $f(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n}$ τότε $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,x_2,...,x_n)=k_j x_1^{k_1}\cdots x_j^{k_j-1}\cdots x_n^{k_n}$.

**2.** Αν $f(x_1,x_2,...,x_n)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ τότε $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{x_j}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}}$, για $(x_1,x_2,...,x_n)\neq 0$.

**3.** Αν $f(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{n}{2}-1}}$ ($n\geq 3$) τότε $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{(2-n)x_j}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{n/2}}$.

***Ασκήσεις.*** **1.** Υπολογίστε τις παραγώγους $(\partial g_j/\partial x_k)(x)$ των συναρτήσεων

$$g_j(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{x_j}{(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{n/2}},\ j=1,2,...,n, \text{ που ορίζονται για } (x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n-\{0\}.$$

**2.** Υπολογίστε τις παραγώγους $(\partial g_a/\partial x_j)(x)$ της συνάρτησης

$$g_a(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{1-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}{[(x_1-a_1)^2+(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2]^{n/2}},$$

που ορίζεται για $(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n-\{a\}$. ($a\in\mathbb{R}^n$ είναι μια παράμετρος.)

**5.3. Σχέση διαφορισιμότητας και μερικών παραγώγων.** Αν η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $a$ τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $(\partial f/\partial x_j)(a)$, για $j=1,2,...,n$, και μάλιστα είναι οι αριθμοί $A_j$ της σχέσης

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{|x-a|}\left(f(x)-f(a)-\sum_{j=1}^n A_j(x_j-a_j)\right)=0 \text{ δηλαδή } \lim_{x\to a}\frac{1}{|x-a|}\left(f(x)-f(a)-\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j-a_j)\right)=0.$$

Επομένως στην περίπτωση που η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $a$, το $n-$διάστατο επίπεδο με εξίσωση $z=f(a)+\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(x_j-a_j)$, στον $(n+1)-$διάστατο $x_1x_2\cdots x_nz-$χώρο, εφάπτεται στην $n-$διάστατη επιφάνεια με εξίσωση $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$. Έτσι το διάνυσμα

$$\vec{\kappa}=\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),-\frac{\partial f}{\partial x_2}(a),...,-\frac{\partial f}{\partial x_n}(a),1\right)$$

είναι **κάθετο** στο εν λόγω εφαπτόμενο επίπεδο και συνεπώς – εξ' ορισμού – είναι κάθετο και στην επιφάνεια $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ στο σημείο $(a,f(a))$.

Όπως είπαμε αν η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $a$ τότε υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $(\partial f/\partial x_j)(a)$. Το αντίστροφο αυτού δεν ισχύει: **Παράδειγμα:** $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & αν\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & αν\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}$

**5.4. Θεώρημα.** *Έστω $f:\Omega\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, η οποία έχει μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x_j:\Omega\to\mathbb{R}$, για κάθε $j=1,2,...,n$. Έστω ακόμη ότι οι μερικές αυτές παράγωγοι είναι συνεχείς σε ένα σημείο $a\in\Omega$. Τότε η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $a$.*

**Ορισμός.** Μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$, ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, λέγεται **συνεχώς διαφορίσιμη** (στο $\Omega$), αν έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x_j:\Omega\to\mathbb{R}$, για $j=1,2,...,n$. Γράφουμε δε τότε $f\in C^1(\Omega)$.

**5.5. Διαφορικό συνάρτησης.** Αν η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $a$, η γραμμική μορφή $(df)_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, η οποία ορίζεται από την σχέση $(df)_a(t)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)t_j$ για $t=(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathbb{R}^n$, λέγεται

**διαφορικό** της συνάρτησης $f$ στο σημείο $a$. Τυπικά κάπως, η γραμμική μορφή $(df)_a$ είναι στοιχείο του δυϊκού του γραμμικού χώρου $\mathbb{R}^n$, δηλαδή $(df)_a \in (\mathbb{R}^n)^*$. Και αν η συνάρτηση $f:\Omega \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $a$ του $\Omega$, η απεικόνιση $df:\Omega \to (\mathbb{R}^n)^*$ που απεικονίζει το $a$ στο $(df)_a$, λέγεται **διαφορικό** της συνάρτησης $f$. Για τις συναρτήσεις $f(x)=x_j$ έχουμε ότι $(dx_j)_a(t)=t_j$ για $t\in\mathbb{R}^n$ (και αυτό για κάθε $a\in\mathbb{R}^n$). Έτσι

$$(df)_a(t)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(dx_j)_a(t) \quad \text{ή} \quad (df)_a=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(dx_j)_a\text{, τέλος δε και στη μορφή } df=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j .$$

Αυτή η τελευταία σχέση υπενθυμίζει ότι αν σε κάποιο σημείο $x\in\Omega$ θεωρήσουμε την μεταβολή $\delta f$ στην συνάρτηση $f$, η οποία είναι συνέπεια της μεταβολής των μεταβλητών από $x_j$ σε $x_j+\delta x_j$, τότε $\delta f\approx\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_j$. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι η ποσότητα $\delta f-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}\delta x_j$ τείνει στο $0$, καθώς το $\delta x\to 0$, **γρηγορότερα** από το $\delta x$.

**5.6. Οι μερικές παράγωγοι μια διαφορίσιμης συνάρτησης ενδέχεται να έχουν ασυνέχειες.** Αυτό φαίνεται από το επόμενο παράδειγμα. Ας θεωρήσουμε κατ' αρχάς την συνάρτηση $g(x)$, ορισμένη για $x\in\mathbb{R}$:

$$g(x)=x^2\sin(1/x) \quad \text{για } x\neq 0 \quad \text{και} \quad g(0)=0.$$

Η συνάρτηση αυτή έχει παράγωγο $g'(x)$ σε κάθε σημείο $x\in\mathbb{R}$, η οποία δίδεται από τον τύπο $g'(x)=2x\sin(1/x)-\cos(1/x)$ για $x\neq 0$ και $g'(0)=0$. Αλλά η συνάρτηση $g'$ είναι ασυνεχής στο $0$.

Αν επομένως θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x,y)=g(x)+g(y)$, ορισμένη για $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, τότε αυτή είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο παρ' όλο που οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$ είναι ασυνεχής στο σημείο $(0,0)$. Παραλλαγή του παραδείγματος αυτού είναι το εξής:

$$h(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \alpha\nu \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \alpha\nu \ (x,y)=(0,0)\ .\end{cases}$$

**5.7. Παραδείγματα. 1.** Ας πάρουμε την συνάρτηση $f(x,y,z)=e^x\cos y-2\sin y\cos z+3z$ ορισμένη για $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, και ας υπολογίσουμε το διαφορικό της στο σημείο $a=(0,0,0)$. Υπολογίζουμε κατ' αρχήν τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}=e^x\cos y$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-e^x\sin y-2\cos y\cos z$, $\frac{\partial f}{\partial z}=2\sin y\sin z+3$. Έπεται ότι η συνάρτηση $f$ είναι $C^1$ σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^3$. Ιδιαιτέρως είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο. Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους στο σημείο $a=(0,0,0)$ βρίσκουμε $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)=1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)=-2$, $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)=3$. Άρα το διαφορικό $(df)_a$ είναι η γραμμική απεικόνιση $(df)_a:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(t,s,u)\to(df)_a(t,s,u)=t-2s+3u$. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι $f(x,y,z)=1+x-2y+3z+o(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ (λαμβάνοντας υπ' όψιν και το ότι $f(0,0,0)=1$), δηλαδή

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{|f(x,y,z)-1-x+2y-3z|}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0.$$

Και απλοϊκά κάπως, $f(x,y,z)\approx 1+x-2y+3z$ όταν $(x,y,z)\approx(0,0,0)$.

Ας υπολογίσουμε τώρα και το διαφορικό της $f$ στο σημείο $b=(\pi/2,\pi,\pi/6)$. Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους στο $b$ βρίσκουμε $\frac{\partial f}{\partial x}(b)=-e^{\pi/2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(b)=\sqrt{3}$, $\frac{\partial f}{\partial z}(b)=3$.

Άρα $(df)_b:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(t,s,u)\to(df)_b(t,s,u)=-e^{\pi/2}t+\sqrt{3}s+3u$. Δηλαδή

$$\lim_{(x,y,z)\to(\pi/2,\pi,\pi/6)}\frac{\left|f(x,y,z)+e^{\pi/2}-\pi/2+e^{\pi/2}(x-\pi/2)-\sqrt{3}(y-\pi)-3(z-\pi/6)\right|}{\sqrt{(x-\pi/2)^2+(y-\pi)^2+(z-\pi/6)^2}}=0.$$

Απλοϊκά, όταν $(x,y,z)\approx(\pi/2,\pi,\pi/6)$ τότε $f(x,y,z)\approx -e^{\pi/2}-\pi e^{\pi/2}/2-\pi\sqrt{3}-e^{\pi/2}x+\sqrt{3}y+3z$.

**2.** Ας πάρουμε την συνάρτηση $f(x,y,z)=\dfrac{ze^{xyz}\sin z}{(x^2+y^2)^2}$, ορισμένη για $(x,y,z)$ με $(x,y)\neq(0,0)$. Υπολογίζοντας τις μερικές παραγώγους, εύκολα ελέγχουμε την συνέχειά των σε κάθε σημείο του συνόλου $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :$ *με* $(x,y)\neq(0,0)\}$. Άρα $f\in C^1(\Omega)$. Υπολογίζοντας τώρα τις τιμές των μερικών παραγώγων της $f$ στο σημείο $a=(0,1,\pi/2)$, βρίσκουμε $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)=\dfrac{\pi^2}{4}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)=-2\pi$, $\dfrac{\partial f}{\partial z}(a)=1$. Και αφού $f(a)=\pi/2$, παίρνουμε την προσέγγιση $f(x,y,z)\approx\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi^2}{4}x-2\pi(y-1)+(z-\dfrac{\pi}{2})=2\pi+\dfrac{\pi^2}{4}x-2\pi y+z$ όταν $(x,y,z)\approx(0,1,\pi/2)$.

**5.8. Θεώρημα.** *Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό και κατά τόξα συνεκτικό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, και ας υποθέσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\partial f/\partial x_j=0$, σε κάθε σημείο του συνόλου $\Omega$ (για $j=1,2,\ldots,n$). Τότε η συνάρτηση αυτή είναι σταθερή.*

**5.9. Ασκήσεις. 1.** Βρείτε μια συνάρτηση $f(x,y)$, ορισμένη για $(x,y)\in\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, ούτως ώστε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2} \quad\text{και}\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

**2.** Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, έχει μερικές παραγώγους $\partial f/\partial x$ και $\partial f/\partial y$. Είναι η συνάρτηση $f$ συνεχής;

**3.** Έστω $\lambda\in\mathbb{R}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^\lambda} & \text{για } (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & \text{για } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ είναι διαφορίσιμη στο $(0,0,0)$ αν και μόνο αν $\lambda<1$.

**4.** Δείξτε ότι $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-1-x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ και $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{x^y-x-2(y-1)\log 2}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}=0$.

**5.** Αν υπάρχουν, υπολογίστε τα όρια $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-e^{\sqrt{x^2+y^2}}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-x-|x|-|y|-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-x-\sqrt{x^2+y^2}-1}{|x|+|y|},\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x\cos y}-x-\sin(\sqrt{x^2+y^2})-1}{e^{|x|+|y|}-1}.$$

**6.** Υπολογίστε το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y)=x^y=e^{y\log x}$, $x>0$, $-\infty<y<\infty$, στα διάφορα σημεία.

**7.** Υπολογίστε το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y)=x^{y^x}=e^{y^x\log x}=e^{(\log x)e^{x\log y}}$ στο σημείο $(2,3)$, καθώς και το διαφορικό της συνάρτησης $f(x,y,z)=x^{y^z}$ το σημείο $(2,3,2)$.

**8.** Έστω $f(x,y)=(\sin x)^{\cos y}=e^{\cos y\log(\sin x)}$. Αν $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi/4,\pi/4)}\frac{|f(x,y)-Ax-By-C|}{\sqrt{(x-\pi/4)^2+(y-\pi/4)^2}}=0$, τί συμπέρασμα βγάζετε για τους αριθμούς $A,B,C$;

**9.** Σωστό ή λάθος; $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,a)}\frac{x\sqrt{1-\cos(xe^y)}}{|x|+|y-a|}=0$ για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

**10.** Σωστό ή λάθος; Αν $\alpha,\beta,\gamma>0$ τότε δεν υπάρχουν $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma,\Delta\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(\alpha,\beta,\gamma)}\frac{x^{y^z}-\mathrm{A}-\mathrm{B}x-\Gamma y-\Delta z+\sin(|x-\alpha|+|y-\beta|+|z-\gamma|)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}.$$

## 6. Διαφορικός λογισμός διανυσματικών συναρτήσεων

**6.1. Παράγωγοι συναρτήσεων της μορφής** $g : \mathrm{I} = \{t \in \mathbb{R} : \alpha < t < \beta\} \to \mathbb{R}^n$. Μια τέτοια συνάρτηση απεικονίζει σε κάθε σημείο $t \in \mathrm{I}$, ένα διάνυσμα $g(t) = (g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t))$ του $\mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση αυτή λέγεται **διαφορίσιμη** στο σημείο $\tau \in \mathrm{I}$ αν κάθε μια από τις συναρτήσεις $g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό. Ορίζουμε δε την παράγωγο $g'(\tau)$ σαν το διάνυσμα με συντεταγμένες τις παραγώγους των $g_j(t)$, δηλαδή

$$g'(\tau) = \frac{dg}{dt}(\tau) \overset{op}{=} \left( \frac{dg_1}{dt}(\tau), \frac{dg_2}{dt}(\tau), ..., \frac{dg_n}{dt}(\tau) \right).$$

Ισοδύναμα,

$$g'(\tau) = \lim_{t \to \tau} \frac{g(t) - g(\tau)}{t - \tau} = \lim_{t \to \tau} \left( \frac{g_1(t) - g_1(\tau)}{t - \tau}, \frac{g_2(t) - g_2(\tau)}{t - \tau}, ..., \frac{g_n(t) - g_n(\tau)}{t - \tau} \right).$$

Αν η συνάρτηση $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $t \in \mathrm{I}$ τότε ορίζεται μια άλλη διανυσματική συνάρτηση, η παράγωγός της: $\frac{dg}{dt} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$, $t \to \frac{dg}{dt}(t)$.

**6.2. Καμπύλες στον χώρο** $\mathbb{R}^n$. Από γεωμετρικής άποψης μια συνάρτηση της μορφής $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ περιγράφει μια καμπύλη: Σε κάθε σημείο $t \in \mathrm{I}$ αντιστοιχεί ένα σημείο του χώρου $\mathbb{R}^n$, το $g(t)$, και όλα αυτά τα σημεία μαζί συνιστούν την καμπύλη. Μερικές φορές θα γράφουμε $\vec{r} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ αντί $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$, θέλοντας να τονίσουμε την διανυσματική φύση των τιμών μιας τέτοιας συνάρτησης. Θα λέγουμε δε ακόμη ότι το **διάνυσμα θέσης** $\vec{r}(t)$ περιγράφει μια καμπύλη – την καμπύλη $\gamma$ με παραμετρικές εξισώσεις:

$$x_1 = g_1(t),\ x_2 = g_2(t),\ \ldots,\ x_n = g_n(t), \quad \alpha < t < \beta.$$

Στην περίπτωση αυτή που βλέπουμε την συνάρτηση $\vec{r} : \mathrm{I} \to \mathbb{R}^n$ σαν μια καμπύλη,

*το διάνυσμα* $\frac{d\vec{r}}{dt}(\tau)$ *είναι εφαπτόμενο της καμπύλης* $\gamma$ *στο σημείο* $g(\tau) = \vec{r}(\tau)$.

Έτσι η ευθεία $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την σχέση $\varepsilon(t) = \vec{r}(\tau) + t\left( \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=\tau} \right)$, είναι η **εφαπτομένη** της καμπύλης $\gamma$ στο σημείο $g(\tau) = \vec{r}(\tau)$. **Παρατήρηση.** Τονίζουμε ότι τα ανωτέρω ισχύουν με την προϋπόθεση ότι το διάνυσμα $\left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{t=\tau} \neq 0$. Το ακόλουθο παράδειγμα δείχνει ότι μια καμπύλη μπορεί να μην έχει εφαπτομένη στο σημείο $g(\tau) = \vec{r}(\tau)$ αν $(d\vec{r}/dt)(\tau) = 0$. Θεωρούμε την εξής καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$:

$$h(t) = \begin{cases} \left(t^3 \cos(1/t), t^3 \sin(1/t)\right) & \alpha\nu \ \ t > 0 \\ (0,0) & \alpha\nu \ \ t \leq 0. \end{cases}$$

Τότε η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ είναι μια $C^1$ καμπύλη που περνά από το σημείο $(0,0)$ και $h'(0) = (0,0)$. Η καμπύλη $h$ «περιστρέφεται» γύρω από το σημείο $(0,0)$ άπειρες φορές, καθώς $t \to 0^+$, και έτσι δεν μπορούμε να μιλήσουμε για εφαπτομένη της $h$ στο σημείο αυτό. Είναι δυνατόν μάλιστα να τροποποιήσουμε την ανωτέρω καμπύλη και να πάρουμε μια παρόμοια που να είναι $C^\infty$ (απεριόριστα διαφορίσιμη). Τέτοια καμπύλη είναι, π.χ., η

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(e^{-1/t^2} \cos(1/t), e^{-1/t^2} \sin(1/t)\right) & \alpha\nu \ \ t > 0 \\ (0,0) & \alpha\nu \ \ t \leq 0. \end{cases}$$

Μια άλλη παρόμοια είναι η

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(e^{-1/t^2} \cos(1/t), e^{-1/t^2} \sin(1/t)\right) & \alpha\nu \ \ t > 0 \\ e^t \left(e^{-1/t^2} \cos(1/t), e^{-1/t^2} \sin(1/t)\right) & \alpha\nu \ \ t < 0, \end{cases}$$

και $\varphi(0)=(0,0)$. Στο παράδειγμα αυτό $\dfrac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|}=(\cos(1/t),\sin(1/t))$ για $t\neq 0$, και επομένως τα όρια $\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|}$ και $\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{\varphi(t)}{|\varphi(t)|}$ δεν υπάρχουν. [Για να δικαιολογήσετε ότι οι ανωτέρω καμπύλες $\varphi$ είναι $C^\infty$ χρησιμοποιήστε ότι $\lim\limits_{t\to 0} t^{-N}e^{-1/t^2}=0$ για κάθε θετικό ακέραιο $N$.]

**6.3. Ταχύτητα και επιτάχυνση.** Στη *Φυσική*, συναρτήσεις της μορφής $g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}^n$ χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν την κίνηση ενός κινητού, κυρίως βέβαια στην περίπτωση $n=3$. Τότε την μεταβλητή $t\in\mathrm{I}$ την σκεπτόμαστε σαν τον χρόνο: την χρονική στιγμή $t$, το κινητό ευρίσκεται στο σημείο $g(t)$ του χώρου. Και στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε συχνά τον συμβολισμό $\vec{r}(t)=g(t)$, του διανύσματος θέσεως. Τώρα μάλιστα η παράγωγος

$$\frac{d\vec{r}}{dt}(t)=\left(\frac{dg_1}{dt},\frac{dg_2}{dt},\dots,\frac{dg_n}{dt}\right)\overset{op}{=}\vec{v}(t)$$

έχει την φυσική σημασία της **ταχύτητας** κατά την χρονική στιγμή $t$. Βέβαια η ταχύτητα $\vec{v}(t)$ που ορίζεται από την ανωτέρω εξίσωση είναι διανυσματικό μέγεθος και δεν πρέπει να συγχέεται με το **μέτρο της ταχύτητας** που είναι η ποσότητα

$$|\vec{v}(t)|=\sqrt{\left(\frac{dg_1}{dt}\right)^2+\left(\frac{dg_2}{dt}\right)^2+\cdots+\left(\frac{dg_n}{dt}\right)^2}\,.$$

Ακόμη η παράγωγος της ταχύτητας ως προς τον χρόνο είναι η **επιτάχυνση** $\vec{a}(t)$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt}(t)=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t)=\left(\frac{d^2g_1}{dt^2},\frac{d^2g_2}{dt^2},\dots,\frac{d^2g_n}{dt^2}\right)\overset{op}{=}\vec{a}(t).$$

**Νόμος του Newton.** Σύμφωνα με τον θεμελιώδη αυτόν νόμο, αν σε ένα υλικό σημείο μάζας $m$ ασκηθεί δύναμη $\vec{F}(t)=A(t)\vec{i}+B(t)\vec{j}+C(t)\vec{k}$ ($t$ είναι χρόνος) τότε το υλικό αυτό σημείο θα κινηθεί ούτως ώστε η επιτάχυνσή του $\vec{a}(t)$ να ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\vec{F}(t)=m\vec{a}(t),\ \text{δηλαδή}\ \vec{F}(t)=m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}.$$

Και αν $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$, η ανωτέρω εξίσωση γράφεται: $\dfrac{d^2x}{dt^2}=A(t)$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=B(t)$ και $\dfrac{d^2z}{dt^2}=C(t)$.

**6.4. Διαφόριση σύνθετης συνάρτησης.** Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $g:\mathrm{I}\to\Omega$, όπου $\mathrm{I}\subset\mathbb{R}$ είναι ένα ανοικτό διάστημα και $\Omega$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, καθώς και μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$. Τότε ορίζεται η σύνθεση $f\circ g:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$. Αν $t$ είναι η μεταβλητή στο $\mathrm{I}$ και $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ η μεταβλητή στο $\Omega$, τότε κάθε $t\in\mathrm{I}$ απεικονίζεται σε ένα σημείο $g(t)=(g_1(t),g_2(t),\dots,g_n(t))$ του $\Omega$ και κάθε σημείο $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ του $\Omega$ απεικονίζεται σε έναν αριθμό $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, οπότε

η σύνθεση $f\circ g$ απεικονίζει το $t$ στο $h(t)=f(g(t))=f(g_1(t),g_2(t),\dots,g_n(t))$.

**Κανόνας της αλυσίδας.** Αν η συνάρτηση $g$ είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $\tau\in\mathrm{I}$ και η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $g(\tau)$, τότε είναι διαφορίσιμη και η σύνθεση $f\circ g$ στο σημείο $\tau$ και ισχύει

$$\frac{dh}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dg_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dg_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dg_n}{dt}\ \text{στο}\ \tau.$$

Αναλυτικότερα: $\dfrac{dh}{dt}(\tau)=\dfrac{d(f\circ g)}{dt}(\tau)=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(g(\tau))\dfrac{dg_1}{dt}(\tau)+\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(g(\tau))\dfrac{dg_2}{dt}(\tau)+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}(g(\tau))\dfrac{dg_n}{dt}(\tau)$.

Ο ανωτέρω κανόνας της αλυσίδας γράφεται ενίοτε και ως εξής:

$$\frac{dh}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt},\ \text{υπονοώντας βέβαια ότι}\ x_1(t)=g_1(t),\dots,x_n(t)=g_n(t).$$

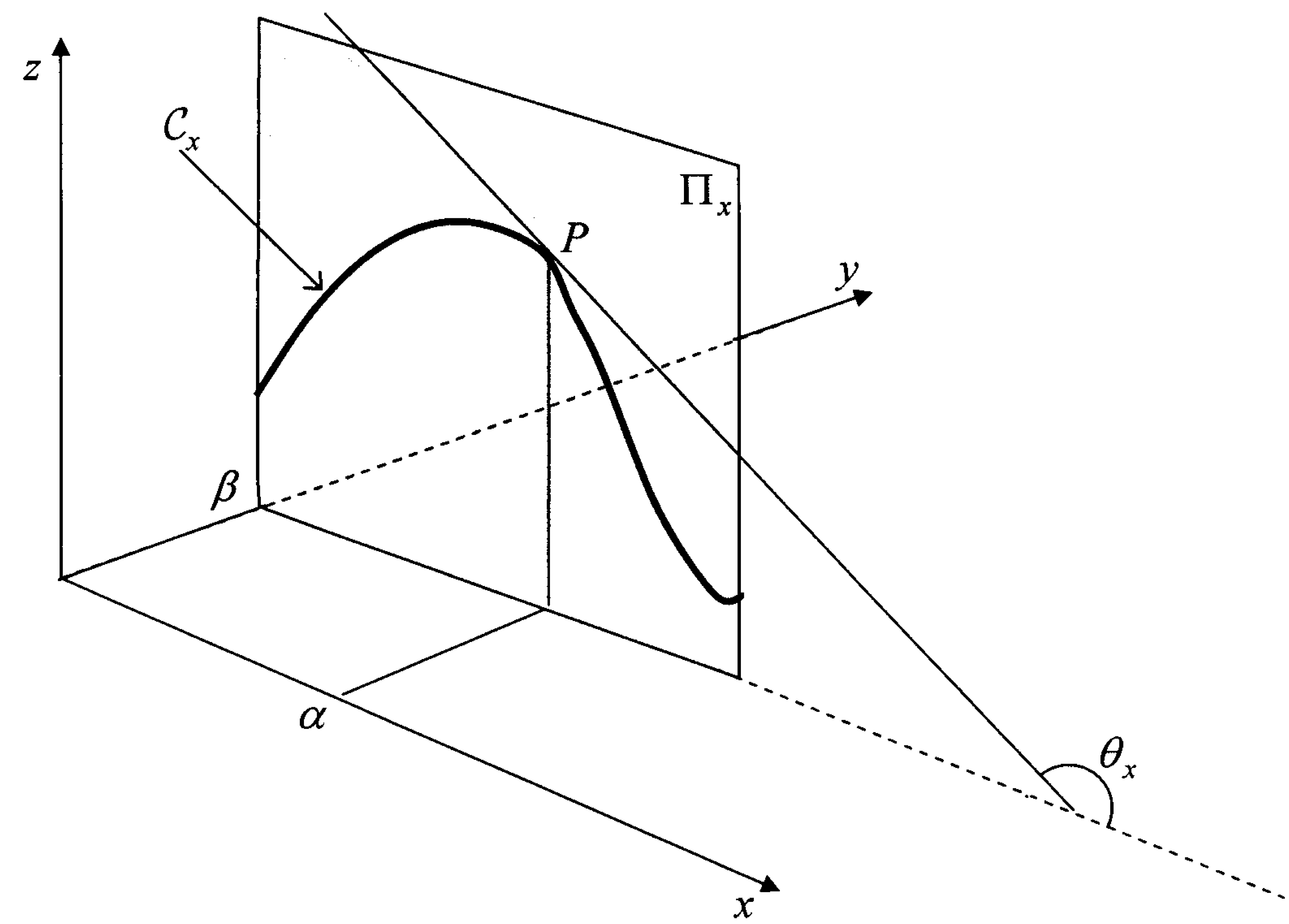
**Άσκηση.** Επαληθεύστε τον κανόνα της αλυσίδας με την συνάρτηση $f(x,y)=x^y=e^{y\log x}$ και όταν θέσετε $x=t^2$ και $y=t^5$. Δηλαδή υπολογίστε την παράγωγο $\frac{d}{dt}\left[f(t^2,t^5)\right]$ με δυο διαφορετικούς τρόπους.

**6.5. Γεωμετρική σημασία των μερικών παραγώγων.** Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ όπου $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ είναι ανοικτό, και $p=(\alpha,\beta)$ ένα σημείο του $\Omega$. Η μερική παράγωγος $\lambda=(\partial f/\partial x)(p)$ δίδεται από τον τύπο

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p)=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x,\beta)-f(\alpha,\beta)}{x-\alpha}=\left.\frac{d\phi}{dt}\right|_{t=\alpha},$$

όπου $\phi(t)=f(t,\beta)$. Με άλλα λόγια όταν <u>**περιορίσουμε**</u> την συνάρτηση $f(x,y)$ πάνω στην ευθεία $\{(t,\beta):t\in\mathbb{R}\}$ (εννοείται το μέρος της ευθείας αυτής που ευρίσκεται μέσα στο $\Omega$), τότε η παράγωγος του <u>**περιορισμού**</u> αυτού για $t=\alpha$ είναι η μερική παράγωγος $\lambda=(\partial f/\partial x)(p)$. Γεωμετρικά ο περιορισμός αυτός σημαίνει το εξής:

*Ας πάρουμε την επιφάνεια* $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: z=f(x,y)\}$, *δηλαδή το γράφημα της συνάρτησης* $z=f(x,y)$, *καθώς και το επίπεδο* $\Pi_x=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: y=\beta\}$, *οπότε το επίπεδο αυτό τέμνει την επιφάνεια* $S$ *κατά μήκος μιας καμπύλης* $C_x$. *Η εφαπτομένη της καμπύλης* $C_x$ *στο σημείο* $P=(\alpha,\beta,f(\alpha,\beta))$ *τέμνει την ευθεία* $\{y=\beta,\ z=0\}$ *και σχηματίζει γωνία* $\theta_x$. *Τότε* $\tan\theta_x=\lambda$.




Ανάλογη βέβαια είναι και η γεωμετρική σημασία της μερικής παραγώγου $\mu=(\partial f/\partial y)(p)$.
Επίσης

*το διάνυσμα* $\vec{\Xi}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p),\frac{\partial f}{\partial y}(p),-1\right)=(\lambda,\mu,-1)$ *είναι **κάθετο** στην επιφάνεια* $S$ *στο σημείο* $P$

και το επίπεδο με εξίσωση $\lambda(x-\alpha)+\mu(y-\beta)-(z-f(\alpha,\beta))=0$ είναι το **εφαπτόμενο επίπεδο** στην επιφάνεια $S$ στο σημείο $P$.

**Άσκηση.** Θεωρήστε μια $C^1$ – συνάρτηση $f(x,y,z)$, την επιφάνεια $S$ με εξίσωση $f(x,y,z)=0$, δηλαδή $S=\{(x,y,z): f(x,y,z)=0\}$, καθώς και ένα σημείο $(a,b,c)$ πάνω στην επιφάνεια αυτή. Εξηγήστε – γεωμετρικά – γιατί το διάνυσμα $\vec{\nabla}f(a,b,c)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια $S$ στο σημείο $(a,b,c)$. Υποτίθεται ότι $\vec{\nabla}f(a,b,c)\neq\vec{0}$. Γενικεύστε στον $\mathbb{R}^n$. (Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό όταν θα συζητήσουμε το *Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων*. Είναι αυτό το θεώρημα που μας εξασφαλίζει την <u>ομαλότητα</u> της επιφάνειας

$\mathcal{S}=\{(x,y,z): f(x,y,z)=0\}$ με την προϋπόθεση $\vec{\nabla} f(x,y,z)\neq\vec{0}$ στα σημεία $(x,y,z)\in\mathcal{S}$. Αυτή δε η ομαλότητα της επιφάνειας είναι απαραίτητη για να έχουμε εφαπτόμενο επίπεδο στα σημεία της.)

**6.6. Κατευθυνόμενη παράγωγος.** Αν $f:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση (όπου $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό) και $a\in\Omega$, η **κλίση** $\vec{\nabla} f(a)$ είναι το διάνυσμα

$$\vec{\nabla} f(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\frac{\partial f}{\partial x_2}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\vec{e}_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\vec{e}_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\vec{e}_n.$$

Βλέποντάς το δε σαν συνάρτηση του $x\in\Omega$, έχουμε την διανυσματική συνάρτηση

$$\vec{\nabla} f:\Omega\to\mathbb{R}^n,\ \ x\to\vec{\nabla} f(x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ του $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή $|\vec{u}|=1$) και την συνάρτηση

$$h_{\vec{u}}(t)=f(\vec{a}+t\vec{u})=f(a_1+t\xi_1,a_2+t\xi_2,\ldots,a_n+t\xi_n),\ -\infty<t<\infty\ \ (t \text{ κοντά στο } 0).$$

Η **κατευθυνόμενη παράγωγος** της $f$ στο σημείο $a$ και στην κατεύθυνση $\vec{u}$ ορίζεται να είναι ο αριθμός

$$\partial_{\vec{u}} f(a)=\left.\frac{dh_{\vec{u}}}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}[f(\vec{a}+t\vec{u})]\right|_{t=0}.$$

Στη περίπτωση που η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $a$,

$$\partial_{\vec{u}} f(a)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\xi_j=\vec{\nabla} f(a)\cdot\vec{u}.$$

Και για δοσμένα $f$ και $a$, η ποσότητα $\partial_{\vec{u}} f(a)$ γίνεται μέγιστη όταν $\vec{u}=\dfrac{\vec{\nabla} f(a)}{|\vec{\nabla} f(a)|}$, και η μέγιστη αυτή τιμή είναι

$$\frac{\vec{\nabla} f(a)}{|\vec{\nabla} f(a)|}\cdot\vec{\nabla} f(a)=|\vec{\nabla} f(a)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)^2}.$$

**6.7. Θεώρημα.** *Ας θεωρήσουμε μια $C^1$ – συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, και δυο σημεία $a,b\in\Omega$ ούτως ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[a,b]\subset\Omega$. Τότε για κάποιο σημείο $\xi\in[a,b]$,*

$$f(b)-f(a)=\nabla f(\xi)\cdot(b-a)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(\xi)(b_j-a_j).$$

**6.8. Διαφόριση συναρτήσεων της μορφής $\mathbb{R}^n\supset\Omega\to\mathbb{R}^m$.** Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ όπου $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό. Μια τέτοια συνάρτηση απεικονίζει τα σημεία $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ του $\Omega$ σε σημεία $y=(y_1,y_2,\ldots,y_m)$ του $\mathbb{R}^m$, και έστω ότι αν $y=f(x)$ τότε $y_i=f_i(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $i=1,2,\ldots,m$. Δηλαδή $f=(f_1,f_2,\ldots,f_m)$ με $f_i:\Omega\to\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $f$ λέγεται **διαφορίσιμη** στο σημείο $a\in\mathbb{R}^n$, αν κάθε συνάρτηση $f_i:\Omega\to\mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό. Στην περίπτωση αυτή κάθε συνάρτηση $f_i:\Omega\to\mathbb{R}$ έχει διαφορικό $(df_i)_a$ που είναι η γραμμική απεικόνιση

$$(df_i)_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}\ \ \text{με}\ \ (df_i)_a(t_1,t_2,\ldots,t_n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)t_j.$$

Και η γραμμική απεικόνιση $(df)_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ με $(df)_a=((df_1)_a,(df_2)_a,\ldots,(df_m)_a)$, ορίζεται να είναι το **διαφορικό** της συνάρτησης $f$ στο σημείο $a$, χαρακτηρίζεται δε από την προσεγγιστική σχέση:

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)-(df)_a(x-a)|}{|x-a|}=0,$$

ή ισοδύναμα: $f(x)=f(a)+(df)_a(x-a)+o(|x-a|)$ για $x\to a$. Ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης $(df)_a:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, δηλαδή ο πίνακας των μερικών παραγώγων, ονομάζεται ***πίνακας Jacobi*** της $f$ στο σημείο $a$ και συμβολίζεται με $(Jf)(a)$. Αναλυτικότερα ο πίνακας Jacobi $(Jf)(a)$ είναι ο $m\times n$ πίνακας

$$(Jf)(a)=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

Ο εν λόγω πίνακας θα συμβολίζεται και ως εξής:

$$(Jf)(a)=\frac{\partial(f_1,f_2,\dots,f_m)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}(a)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right),\ \text{ή ακόμη } (Jf)(a)=\frac{\partial(y_1,y_2,\dots,y_m)}{\partial(x_1,x_2,\dots,x_n)}(a),$$

υπονοώντας βέβαια ότι $y_i=f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$. Τέλος, αν η συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο $a\in\Omega$, ορίζεται η απεικόνιση $df:\Omega\to L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, $a\to(df)_a$ για $a\in\Omega$, όπου $L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ είναι το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων της μορφής $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. Η απεικόνιση αυτή $df$ λέγεται **διαφορικό** της συνάρτησης $f$. Ανάλογα, τότε, ορίζεται και η απεικόνιση $Jf:\Omega\to\mathbb{R}^{m\times n}$, $a\to(Jf)(a)$ για $a\in\Omega$, όπου $\mathbb{R}^{m\times n}$ είναι το σύνολο των $m\times n$ πινάκων.

**6.9. Συνθέσεις $f\circ g$ με $\Theta\xrightarrow{g}\Omega\xrightarrow{f}\mathbb{R}$ όπου $\Theta\subset\mathbb{R}^m$ και $\Omega\subset\mathbb{R}^n$.** Ας θεωρήσουμε ανοικτά σύνολα $\Theta\subset\mathbb{R}^m$ και $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ και συναρτήσεις $g:\Theta\to\Omega$ και $f:\Omega\to\mathbb{R}$, και ας συμβολίζουμε με $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ την μεταβλητή στο $\Theta$ και $y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$ την μεταβλητή στο $\Omega$. Έτσι σε κάθε σημείο $x=(x_1,x_2,\dots,x_m)$ του $\Theta$, η συνάρτηση $g$ απεικονίζει ένα σημείο $y=g(x)$ του $\Omega$, αναλυτικότερα $(y_1,y_2,\dots,y_n)=(g_1(x),g_2(x),\dots,g_n(x))$, το οποίο με την σειρά της η συνάρτηση $f$ το απεικονίζει στο $z=(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(g_1(x),g_2(x),\dots,g_n(x))$.

**Κανόνας της αλυσίδας.** *Αν η συνάρτηση $g$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $a\in\Theta$ και η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο $b=g(a)$, τότε η σύνθεση $f\circ g$ είναι διαφορίσιμη στο $a$ και μάλιστα*

$$(d(f\circ g))_a=(df)_b\circ(dg)_a.$$

**6.10. Ο γενικός κανόνας της αλυσίδας.** *Αν $\Theta\subset\mathbb{R}^m$ και $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτά σύνολα και $g:\Theta\to\Omega$ και $f:\Omega\to\mathbb{R}^s$ είναι συναρτήσεις, η μεν $g$ διαφορίσιμη στο σημείο $a\in\Theta$, η δε $f$ διαφορίσιμη στο σημείο $b=g(a)$, τότε η σύνθεση $f\circ g$ είναι διαφορίσιμη στο $a$ και $(d(f\circ g))_a=(df)_b\circ(dg)_a$.*

Και αν περάσουμε στους πίνακες *Jacobi*, παίρνουμε ότι

$$\big(J(f\circ g)\big)(a)=(Jf)(b)\cdot(Jg)(a).$$

Γράφοντας τώρα $(x_1,\dots,x_m)$ την μεταβλητή στο $\Theta$ και $(y_1,\dots,y_n)$ την μεταβλητή στο $\Omega$, η σχέση αυτή αναλυτικά είναι η ακόλουθη:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1\circ g)}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial(f_1\circ g)}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial(f_1\circ g)}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial(f_2\circ g)}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial(f_2\circ g)}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial(f_2\circ g)}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial(f_s\circ g)}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial(f_s\circ g)}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial(f_s\circ g)}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial f_1}{\partial y_2}(b) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}(b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(b) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}(b) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_s}{\partial y_1}(b) & \frac{\partial f_s}{\partial y_2}(b) & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial y_n}(b) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(a) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή,

$$\frac{\partial(f_i\circ g)}{\partial x_j}(a)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(b)\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(a),\quad j=1,\dots,m,\ i=1,\dots,s.$$

Τέλος, αν $(z_1,...,z_s)$ είναι η μεταβλητή στον $\mathbb{R}^s$, και θεωρήσουμε τα $y_1,...,y_n$ σαν συναρτήσεις των $x_1,...,x_m$, και τα $z_1,...,z_s$ σαν συναρτήσεις των $y_1,...,y_n$, μπορούμε να γράψουμε ακόμη ότι

$$\frac{\partial(z_1,...,z_s)}{\partial(x_1,...,x_m)}(a) = \frac{\partial(z_1,...,z_s)}{\partial(y_1,...,y_n)}(b)\cdot\frac{\partial(y_1,...,y_n)}{\partial(x_1,...,x_m)}(a).$$

Ιδιαιτέρως στην περίπτωση που $m = n = s$,

$$\det[(J(f\circ g))(a)] = \det[(Jf)(b)]\cdot\det[(Jg)(a)].$$

Και αν επιπλέον $f\circ g = id$ τότε

$$\det[(Jf)(b)]\cdot\det[(Jg)(a)] = 1.$$

Ιδιαιτέρως, τότε,

$$\det[(Jf)(b)]\neq 0 \text{ και } \det[(Jg)(a)]\neq 0.$$

Αν επομένως μια απεικόνιση $g:\Theta\to\mathbb{R}^n$ είναι **αντιστρέψιμη** κοντά σε ένα σημείο $a\in\Theta$, τότε $\det[(Jg)(a)]\neq 0$. Εννοείται ότι η $g$ είναι διαφορίσιμη, με διαφορίσιμη τοπική αντίστροφη. Π.χ., η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x^3$, έχει συνεχή αντίστροφη την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(y)=\sqrt[3]{y}$, αλλά $g'(0)=0$. (Το αντίστροφο της προηγουμένης παρατήρησης, ότι δηλαδή αν $\det[(Jg)(a)]\neq 0$, η συνάρτηση $g$ αντιστρέφεται τοπικά στο $a$, ισχύει επίσης, και είναι το *Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης* – θα το μελετήσουμε αργότερα

**Συμβολισμός.** Για έναν μετασχηματισμό $T:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, την **ορίζουσα** του πίνακα *Jacobi* $JT(a)$ (σε ένα σημείο $a\in\Omega$) θα την συμβολίζουμε με $\mathfrak{J}T(a)$ και θα την ονομάζουμε ***Jacobian***. Δηλαδή $\mathfrak{J}T(a)=\det JT(a)$. (Για την **γεωμετρική σημασία** του αριθμού $\mathfrak{J}T(a)$ θα μιλήσουμε αργότερα.)

**6.11. Ασκήσεις. 1.** Δίδεται η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}[1-\cos(x^2/y)]\sqrt{x^2+y^2} & \alpha\nu\ \ y\neq 0\\ 0 & \alpha\nu\ \ y=0.\end{cases}$ Δείξτε ότι η $f$ είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$, δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ και υπολογίστε τις κατευθυνόμενες παραγώγους της $f$ στο $(0,0)$.

**2.** Θεωρήστε την καμπύλη στον $xyz-$χώρο με παραμετρικές εξισώσεις

$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=e^t,\ -\infty<t<+\infty,$$

και γράψτε εξισώσεις για την εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο $(0,1,e^{\pi/2})$. Επίσης γράψτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στην καμπύλη στο σημείο αυτό.

**3.** Μια συνάρτηση μπορεί σε κάποιο σημείο να έχει μερικές παραγώγους (πρώτης τάξης) αλλά να μην έχει κατευθυνόμενη παράγωγο σε καμιά άλλη κατεύθυνση (δηλαδή εκτός από τις κατευθύνσεις των αξόνων). Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \gamma\iota\alpha\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \gamma\iota\alpha\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

**4.** Μια συνάρτηση μπορεί να έχει κατευθυνόμενες παραγώγους σε κάθε κατεύθυνση – σε κάποιο σημείο – και εν τούτοις να μην είναι συνεχής στο σημείο αυτό. Δείξτε το με παράδειγμα την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \gamma\iota\alpha\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \gamma\iota\alpha\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Επίσης δείξτε ότι δεν ισχύει ο κανόνας της αλυσίδας – όταν διαφορίσουμε την σύνθεση $f(\alpha t,\beta t)$ ως προς το $t$ για $t=0$ (όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha\beta\neq 0$).

**5.** Επαληθεύσατε τον κανόνα της αλυσίδας στις περιπτώσεις: (i) $f(x,y)=x^3e^{xy^2}$, $x=t^2$, $y=\sin t$ (ii) $f(x,y)=x^y$, $x=t^2$, $y=t^3$ (iii) $f(x,y)=(\log x)^y$, $x=e^t$, $y=t$.

**6.** Θεωρήστε μια $C^1-$συνάρτηση $f:\Omega\to\mathbb{R}$ ορισμένη σε ένα ανοικτό και κυρτό σύνολο $\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$|f(x)-f(y)| \le \left(\sup_{z\in\Omega}|\nabla f(z)|\right)|x-y|, \text{ για κάθε } x,y\in\Omega.$$

**7.** Σε ποιά κατεύθυνση, η συνάρτηση $f(x,y)=xe^{y}+x^{2}y+y^{2}$ έχει την πιο απότομη μεταβολή στο σημείο $(1,-2,-5)$;

**8.** Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $z=2x^{2}+y^{2}$, στο σημείο $(-1,2,6)$.

**9.** Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $z^{2}=2x^{2}+y^{2}$, στο σημείο $(-1,2,\sqrt{6})$.

**10.** Γράψτε την εξίσωση του επιπέδου του εφαπτόμενου της επιφάνειας με εξίσωση $2x^{2}+y^{2}+5z^{2}=16$, στο σημείο $(1,-3,1)$.

**11.** Θεωρήστε την καμπύλη $C$ στον $xyz-$χώρο η οποία είναι η τομή των επιφανειών με εξισώσεις $z=y^{2}-3x^{2}$ και $z^{2}+y^{2}=2$, και γράψτε εξισώσεις για την ευθεία που είναι εφαπτόμενη στην $C$ στο σημείο $(0,1,1)$.

**12.** Δείξτε ότι οι εξισώσεις

$$(x(t),y(t))=\begin{cases}\left(e^{-1/t^{2}},e^{-1/t^{2}}\right) & \alpha\nu \quad t>0\\ (0,0) & \alpha\nu \quad t=0\\ \left(-e^{-1/t^{2}},e^{-1/t^{2}}\right) & \alpha\nu \quad t<0\end{cases}$$

ορίζουν μια $C^{\infty}$ παραμέτρηση της καμπύλης $y=|x|$ στο $xy-$επίπεδο.

**13.** *(Θεώρημα του Euler)* Δείξτε ότι μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}^{n}-\{0\}\to\mathbb{R}$ είναι ομογενής βαθμού $\lambda$ (όπου $\lambda\in\mathbb{R}$), δηλαδή $f(tx)=t^{\lambda}f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^{n}-\{0\}$ και κάθε $t>0$, αν και μόνο αν η $f$ ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{j}\frac{\partial f}{\partial x_{j}}(x)=\lambda f(x).$$

*Υπόδειξη*. Για την μια κατεύθυνση, διαφορίστε την σχέση $f(tx)=t^{\lambda}f(x)$ ως προς $t$. Για το αντίστροφο θεωρήστε την συνάρτηση $\phi(t)=t^{-\lambda}f(tx)$ και δείξτε ότι $\phi'(t)=0$.

**14.** Για $a_{m}\in\mathbb{R}$, θεωρήστε την συνάρτηση $f(x_{1},x_{2},\ldots,x_{n})=\sum_{m=1}^{N}\frac{a_{m}}{(x_{1}^{2m}+x_{2}^{2m}+\cdots+x_{n}^{2m})^{1/2m}}$ και δείξτε ότι ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση: $\sum_{j=1}^{n}x_{j}\frac{\partial f}{\partial x_{j}}=-f$.

**15.** Εξηγήστε γιατί το σύνολο $C^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$ (με τις συνήθεις πράξεις) είναι γραμμικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{R}$. Εν συνεχεία θεωρήστε τον τελεστή $T:C^{\infty}(\mathbb{R}^{n})\to C^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$, που ορίζεται από την σχέση: $T(f)=\partial f/\partial x_{1}$ για $f\in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n})$. Δείξτε ότι ο $T$ είναι γραμμικός και ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ιδιοτιμή του. Υπόδειξη: $e^{\lambda x_{1}}$.

**16.** Δείξτε ότι κάθε πραγματικός αριθμός είναι ιδιοτιμή του γραμμικού τελεστή

$$S:C^{\infty}(\mathbb{R}^{n}-\{0\})\to C^{\infty}(\mathbb{R}^{n}-\{0\}),\ S(f)=\sum_{j=1}^{n}x_{j}\frac{\partial f}{\partial x_{j}} \text{ για } f\in C^{\infty}(\mathbb{R}^{n}).$$

**17.** Υλικό σημείο μάζας $m$ ευρίσκεται σε ύψος $h$ από οριζόντιο επίπεδο και βάλλεται οριζοντίως με αρχική ταχύτητα $\vec{v}_{0}$, εννοείται μέσα στο πεδίο βαρύτητας. Μετά από λίγο χρόνο $\tau$ ασκείται πάνω σε αυτό μια οριζόντια δύναμης $\vec{F}_{0}$, και το κινεί σε συνδυασμό με το βάρος του, μέχρις ότου αυτό συναντήσει το οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογίστε ακριβώς το σημείο που αυτό θα συναντήσει το οριζόντιο επίπεδο, τον χρόνο που θα κινηθεί μέχρι που να συναντήσει το επίπεδο αυτό, καθώς και την ταχύτητα που θα έχει την στιγμή αυτή.