ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ
ΠΕΡΙΛΗΨΗ
Εαρινό εξάμηνο 2011-2012
Τμήμα Χατζηαφράτη

1. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$

1.1. Ορισμοί. Ο **Ευκλείδειος χώρος** $\mathbb{R}^n$ είναι ο γραμμικός χώρος $\mathbb{R}^n=\{(x_1,x_2,...,x_n): x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}\}$ εφοδιασμένος με το **εσωτερικό γινόμενο**

$$x\cdot y=\langle x,y\rangle=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n \text{ για } x=(x_1,x_2,...,x_n),\ y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Η **απόλυτη τιμή** του σημείου $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$ (ή του διανύσματος $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$) είναι $|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$. Ο αριθμός $|\vec{x}|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ είναι το **μήκος** του διανύσματος $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$.

Η **απόσταση** των σημείων $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ και $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ είναι $|x-y|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$.

Η **γωνία** θ μεταξύ των διανυσμάτων $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ και $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ του $\mathbb{R}^n$ έχει συνημίτονο $\cos\theta=\dfrac{\langle x,y\rangle}{|x||y|}$. Τα διανύσματα x και y του $\mathbb{R}^n$ είναι **κάθετα** αν $\langle x,y\rangle=0$.

1.2. Ανισότητα Cauchy-Schwarz. Για $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|\langle x,y\rangle|\le|x|\cdot|y|$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν τα x και y είναι συγγραμμικά.

1.3. Τριγωνική ανισότητα. Για $x,y\in\mathbb{R}^n$, $|x+y|\le|x|+|y|$. Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $y=\lambda x$ ή $x=\lambda y$ για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda\ge 0$.

1.4. Ταυτότητα του Lagrange. Για $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ και $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ στον $\mathbb{R}^n$,

$$|x|^2|y|^2-(x\cdot y)^2=\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)-\left(\sum_{j=1}^n x_jy_j\right)^2=\sum_{1\le j<k\le n}(x_jy_k-x_ky_j)^2.$$

1.5. Ασκήσεις. 1. Αποδείξτε την ταυτότητα $\left||x|^2y-(x\cdot y)x\right|^2=|x|^2(|x|^2|y|^2-|x\cdot y|^2)$ (για $x,y\in\mathbb{R}^n$).

2. Δείξτε ότι αν $v_1,v_2,...,v_m\in\mathbb{R}^n$ και $v_j\cdot v_k=0$ για $j<k$, τότε $|v_1+v_2+\cdots+v_m|^2=|v_1|^2+|v_2|^2+\cdots+|v_m|^2$.

3. Αν $v_1,v_2,...,v_m\in\mathbb{R}^n$ και $|v_1+v_2+\cdots+v_m|=|v_1|+|v_2|+\cdots+|v_m|$, τί συμπέρασμα βγάζετε;

4. Δείξτε ότι αν $a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R}$, $a_j>0$, και $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$ τότε $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\ge n^2$.

5. Υπολογίστε το $\min\{x_1^{16}+x_2^{16}+\cdots+x_n^{16}: x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$.

6. Υπολογίστε το $\max\{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n: x_1,x_2,...,x_n\in\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1\}$ (όταν δίδονται τα $a_j\in\mathbb{R}$). Γενικότερα υπολογίστε το $\max\{a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n: \mu\varepsilon\ \lambda_1x_1^2+\lambda_2x_2^2+\cdots+\lambda_nx_n^2=1\}$ ($\lambda_j>0$).

7. Σκεφθείτε την σχέση της καθετότητας των διανυσμάτων στον χώρο $\mathbb{R}^n$ με τις λύσεις των γραμμικών αλγεβρικών συστημάτων. Π.χ. παρατηρήστε ότι το σύνολο $\{x\in\mathbb{R}^n: \alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=0\}$ αποτελείται από τα διανύσματα που είναι κάθετα στο διάνυσμα $\vec{u}=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ του $\mathbb{R}^n$.

1.6. Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στον xyz − χώρο. Το **εξωτερικό γινόμενο** $\vec{u}\times\vec{v}$, των διανυσμάτων $\vec{u}=\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k}$ και $\vec{v}=\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k}$ του $\mathbb{R}^3$, ορίζεται ως εξής:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\det\begin{pmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\ \beta_1&\beta_2&\beta_3\end{pmatrix}=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)\vec{i}+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)\vec{j}+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)\vec{k}.$$

Η γεωμετρική του σημασία είναι η εξής: Το διάνυσμα $\vec{u}\times\vec{v}$ είναι κάθετο στα $\vec{u}$ και $\vec{v}$, το μήκος του είναι το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγουν τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$, και η φορά του είναι έτσι ώστε το σύστημα $[\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v}]$ να είναι θετικά προσανατολισμένο.

1.7. Εμβαδόν παραλληλογράμμου. Για δύο διανύσματα $\vec{u}=\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k}$ και $\vec{v}=\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k}$ στον χώρο $\mathbb{R}^3$, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα $\vec{u}$, $\vec{v}$, είναι $\sqrt{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_2 & \beta_3\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}^2}$.

Γενικότερα για δύο διανύσματα $\vec{u}=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ και $\vec{v}=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ στον χώρο $\mathbb{R}^n$, το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ δίδεται από τον τύπο

$$\text{εμβαδόν του παραλληλογράμμου } \{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}:\ 0\le\lambda,\mu\le 1\}=\sqrt{\sum_{1\le j<k\le n}\left[\det\begin{pmatrix}\alpha_j & \alpha_k\\ \beta_j & \beta_k\end{pmatrix}\right]^2}\,.$$

1.8. Όγκος παραλληλεπιπέδου. Αν $\vec{u}=\alpha_1\vec{i}+\alpha_2\vec{j}+\alpha_3\vec{k}$, $\vec{v}=\beta_1\vec{i}+\beta_2\vec{j}+\beta_3\vec{k}$ και $\vec{w}=\gamma_1\vec{i}+\gamma_2\vec{j}+\gamma_3\vec{k}$ είναι τρία διανύσματα στον χώρο $\mathbb{R}^3$, ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, είναι η απόλυτη τιμή της ορίζουσας των διανυσμάτων:

$$\text{όγκος παραλληλεπιπέδου } \{\lambda\vec{u}+\mu\vec{v}+\kappa\vec{w}:\ 0\le\lambda,\mu,\kappa\le 1\}=\left|\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3\end{pmatrix}\right|.$$

1.9. Ασκήσεις. 1. Έστω $x,y\in\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το μήκος της προβολής του $\vec{x}$ πάνω στο $\vec{y}$ είναι ίσο με $|\vec{x}\cdot\vec{y}|/|\vec{y}|$.

2. Δείξτε ότι η απόσταση του σημείου (α,β,γ) από το επίπεδο $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma z+\Delta=0$ είναι

$$\frac{|\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta+\Gamma\gamma+\Delta|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}}\,.$$

3. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των ευθειών

$\ell_1:\ x=2t+3,\ y=-t+\sqrt{2},\ z=5t-\sqrt{7}$, $-\infty<t<\infty$, και $\ell_2:\ x=9t+2,\ y=\sqrt{5}t+2,\ z=-5t-3$, $-\infty<t<\infty$.

4. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των ευθειών

$$\ell_1:\ \begin{cases}x-y+3z=1\\ 2x+3y-z=-2\end{cases}\quad \text{και}\quad \ell_2:\ \begin{cases}5x-7y+z=3\\ 8x+y-2z=-9\,.\end{cases}$$

1.10. Σχόλιο. Για m γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\vec{v}_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\dots,\alpha_{in})$, $i=1,2,\dots,m$, στον χώρο $\mathbb{R}^n$, θεωρήστε το $m-$*διάστατο* παραλληλεπίπεδο $\Pi_m(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_m)=\{\lambda_1\vec{v}_1+\lambda_2\vec{v}_2+\cdots+\lambda_m\vec{v}_m:\ 0\le\lambda_i\le 1, i=1,2,\dots,m\}$ που παράγεται από τα διανύσματα αυτά και ορίστε

$$\mathbb{V}_m(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_m)=\sqrt{\sum_{1\le j_1<\cdots<j_m\le n}\left[\det\begin{pmatrix}\alpha_{1j_1} & \cdots & \alpha_{1j_m}\\ \vdots & & \\ \alpha_{mj_1} & \cdots & \alpha_{mj_m}\end{pmatrix}\right]^2}\,.$$

Παρατηρήστε ότι για $m=1$ η ποσότητα $\mathbb{V}_1(\vec{v}_1)$ είναι το μήκος του διανύσματος $\vec{v}_1$, ενώ για $m=2$ η ποσότητα $\mathbb{V}_2(\vec{v}_1,\vec{v}_2)$ δίνει το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{v}_1,\vec{v}_2$. Γενικότερα ισχύει το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα. *Έστω $m\le n$. Για $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_m\in\mathbb{R}^n$,*

$$\text{ο } m-\text{διάστατος όγκος του } \Pi_m(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_m)=\mathbb{V}_m(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_m).$$

Ιδιαιτέρως για n διανύσματα $\vec{v}_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\dots,\alpha_{in})\in\mathbb{R}^n$, $i=1,2,\dots,n$,

$$\text{ο όγκος του } \Pi_n(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)=\left|\det\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n}\\ \vdots & & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\right|.$$

2. Σύγκλιση ακολουθιών στον $\mathbb{R}^n$

2.1. Ορισμοί. Μια ακολουθία $(a_k \in \mathbb{R}^n)_{k\in\mathbb{N}}$ **συγκλίνει** στο σημείο p του $\mathbb{R}^n$ αν $|a_k - p| \to 0$ καθώς $k \to \infty$. Το σημείο p λέγεται **όριο** της (συγκλίνουσας) ακολουθίας a_k. Αν γράψουμε αναλυτικά $a_k = (a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kn})$ και $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ τότε $|a_k - p| \to 0$ αν και μόνο αν $a_{k1} \to p_1$, $a_{k2} \to p_2$, ..., $a_{kn} \to p_n$ (εννοείται του $k \to \infty$).
Μια **υποακολουθία** της ακολουθίας a_k είναι μια ακολουθία της μορφής a_{s_k} όπου s_k είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων, δηλαδή $s_1 < s_2 < s_3 < \cdots$.
Μια ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ σημείων του $\mathbb{R}^n$ λέγεται ότι είναι **φραγμένη** αν υπάρχει θετικός αριθμός M τέτοιος ώστε $|a_k| \le M$ για κάθε $k = 1,2,3,...$.
Μια ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ σημείων του $\mathbb{R}^n$ λέγεται ότι είναι **ακολουθία *Cauchy*** αν $|a_k - a_l| \to 0$, των $k, l \to \infty$, αν δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $|a_k - a_l| < \varepsilon$ για $k, l > k(\varepsilon)$.

2.2. Θεώρημα. *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ έχει συγκλίνουσες υποακολουθίες.*

2.3. Θεώρημα. *Μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι ακολουθία Cauchy.*

2.4. Ανοικτά και κλειστά σύνολα. Ορισμοί. Έστω σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ και $r > 0$. Η **μπάλα** $B(p,r)$ με κέντρο το σημείο p και ακτίνα r είναι το σύνολο $B(p,r)=\{x \in \mathbb{R}^n : |x - p| < r\}$.
Ένα υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^n$ λέγεται **ανοικτό** αν για κάθε $a \in \Omega$ υπάρχει $r(a) > 0$ ούτως ώστε $B(a, r(a)) \subset \Omega$.
Ένα υποσύνολο F του $\mathbb{R}^n$ λέγεται **κλειστό** αν το συμπλήρωμά του, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}^n - F$, είναι ανοικτό.

Πρόταση. Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$. Το F είναι κλειστό αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_k \in F$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$, έπεται ότι $x \in F$.

Ιδιότητες. Η τομή δυο ανοικτών συνόλων είναι επίσης ανοικτό σύνολο. Γενικότερα αν $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_N$ είναι ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τότε και η τομή $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \cdots \cap \Omega_N$ είναι ανοικτό σύνολο. Μια άπειρη τομή ανοικτών εν γένει δεν είναι ανοικτό σύνολο. Ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο. Η ένωση δυο κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό. Και η οσοδήποτε μεγάλη τομή κλειστών είναι κλειστό σύνολο.

Πρόταση. Έστω ότι $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Τότε η τομή των είναι επίσης μη κενή: $\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \varnothing$.

2.5. Σημεία συσσώρευσης και σημεία επαφής. Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Το σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο **συσσώρευσης** του συνόλου A αν για κάθε $\varepsilon > 0$, η μπάλα $B(p,\varepsilon)$ περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του A διαφορετικό από το p, δηλαδή $B(p,\varepsilon) \cap A - \{p\} \neq \varnothing$. Θα γράφουμε δε τότε ότι $p \in A'$. Ένα σημείο του συνόλου A το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσής του λέγεται ότι είναι **μεμονωμένο** σημείο του A.
Το σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο **επαφής** του συνόλου A αν για κάθε $\varepsilon > 0$, η μπάλα $B(p,\varepsilon)$ περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του A, δηλαδή $B(p,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. Θα γράφουμε δε τότε ότι $p \in \overline{A}$.

Ιδιότητες. 1. Το σημείο $p \in A'$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία σημείων $a_k \in A - \{p\}$ με $a_k \to p$.

2. Το σημείο $p \in \overline{A}$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία σημείων $a_k \in A$ με $a_k \to p$.

3. Για κάθε σύνολο A, $\overline{A} = A \cup A'$.

2.6. Σχετικότητα στη τοπολογία. Έστω T ένα <u>τυχόν</u> υποσύνολο του χώρου $\mathbb{R}^n$. Ένα υποσύνολο $A \subset T$ λέγεται **ανοικτό στο** T (ή **ως προς το** T ή ακόμη **σχετικά με το** T), αν υπάρχει σύνολο $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$, ούτως ώστε $A = \Omega \cap T$. Ομοίως, ένα υποσύνολο $B \subset T$ λέγεται **κλειστό στο** T (ή **ως προς το** T ή **σχετικά με το** T), αν υπάρχει σύνολο $F \subset \mathbb{R}^n$, κλειστό στον $\mathbb{R}^n$, ούτως ώστε $B = F \cap T$. Τα σύνολα T και $\varnothing$ είναι συγχρόνως και ανοικτά και κλειστά ως προς το T. Επίσης το σύνολο $A \subset T$ είναι ανοικτό στο T αν και μόνο αν το $T - A$ είναι κλειστό στο T.

Χαρακτηρισμός σχετικά κλειστών συνόλων με ακολουθίες. Το σύνολο $B \subset T$ είναι κλειστό στο T αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_k \in B$ η οποία συγκλίνει σε σημείο του T έπεται ότι $\lim x_k \in B$.

2.7. Ασκήσεις. 1. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις ακολουθίες: $\left(\frac{k-1}{2k+1}, \frac{2k^2-1}{\sqrt{3k^4+k^3+1}}\right)$, $\left((-1)^k \frac{k-1}{2k+1}, \frac{k^2-1}{k^3+1}\right)$, $\left(\frac{1}{k}, k\right)$, $\left(\frac{1}{k}, (-1)^k k\right)$, $\left(\frac{k-1}{k+1}, \frac{2k^2-k-1}{k^2+k+1}, \frac{3k^3-k^2-k-1}{k^3+k^2+k+1}, \dots, \frac{nk^n-k^{n-1}-k^{n-2}-\dots-1}{k^n+k^{n-1}+\dots+k+1}\right)$.

2. Αν λ_k είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και η ακολουθία $(\lambda_k, k\lambda_k)$ είναι συγκλίνουσα στον $\mathbb{R}^2$, δείξτε ότι $\lambda_k \to 0$.

3. Αν η ακολουθία $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο σημείο p του $\mathbb{R}^n$ και η ακολουθία $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο σημείο q του $\mathbb{R}^n$, και αν $p \neq q$ δείξτε ότι η ακολουθία $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots$ δεν είναι συγκλίνουσα.

4. Υπολογίστε το όριο κάθε μιας από τις επόμενες ακολουθίες – του $k \to \infty$ – στις περιπτώσεις που αυτό υπάρχει:

$\left(\frac{\cos k}{k}, \frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{2-\sin k}}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt[2]{2}+\dots+\sqrt[k]{k}}{k}, \sqrt[k]{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[k]{k}}}\right)$, $\left(\frac{1}{k}, \sqrt[k]{k!}\right)$, $\left(\frac{k\cos k}{2^k}, \frac{k^{10^{100}}\sin k}{2^{k/10^{100}}}\right)$, $\left(\frac{1}{k}, (-1)^k\right)$,

$\left(\left(1-\frac{1}{k}\right)^k, \left(1-\frac{1}{k}\right)^{\sqrt{k}}, \frac{\sqrt{k}\sin(1/k)}{\sin(1/\sqrt{k})}\right)$, $\left(\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)^{\sqrt{k}}, \left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)^{\sqrt[k]{k}}, \left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)^k\right)$, $\left(\frac{\sqrt[k]{k!}}{k}, \sqrt[k^2]{k!}, \sqrt[k^3]{k!}, \dots, \sqrt[k^n]{k!}\right)$,

$\left(\sqrt[k]{1^{100}+2^{100}+\dots+k^{100}}, \frac{k}{k^2+1^2}+\frac{k}{k^2+2^2}+\dots+\frac{k}{k^2+k^2}, 1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{k^2}\right)$,

$\left(1-\frac{1}{2}+\dots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}, \sqrt[k]{1-\frac{1}{2}+\dots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}}, \left(1+\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{2}+\dots+\frac{(-1)^{k-1}}{k}\right)\right)^k, \sqrt[k]{\log k}\right)$.

Υπόδειξη. Θυμηθείτε ότι: $1^{ον}$ $\sqrt[k]{x_k} \to 1$, αν $\varepsilon \le x_k \le M$ για θετικές σταθερές ε και M. Γενικότερα $\sqrt[k]{x_k} \to 1$, αν $\varepsilon k^\alpha \le x_k \le M k^\beta$ $2^{ον}$ Αν $x_k \to x$ τότε $\frac{1}{k}(x_1+x_2+\dots+x_k) \to x$. $3^{ον}$ $\left(1+\frac{x}{k}\right)^k \to e^x$. Γενικότερα $\left(1+\frac{x_k}{k}\right)^k \to e^x$, αν $x_k \to x$. $4^{ον}$ $\frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} f(m/k) \to \int_0^1 f(x)dx$, για κατάλληλες συναρτήσεις f. $5^{ον}$ $k! \approx \sqrt{2\pi k}\,\frac{k^k}{e^k}$ (του $k \to \infty$) δηλαδή $\frac{k!}{\sqrt{2\pi k}}\frac{e^k}{k^k} \to 1$. $6^{ον}$ $1-\frac{1}{2}+\dots+\frac{(-1)^{k-1}}{k} \to \log 2$. $7^{ον}$ $1+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{k^2} \to \frac{\pi^2}{6}$.

5. Αν $P(x_1,\dots,x_n)$ είναι ένα πολυώνυμο δείξτε ότι το σύνολο $\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \mu\varepsilon\ P(x_1,\dots,x_n)=0\}$ είναι κλειστό και το σύνολο $\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : \mu\varepsilon\ P(x_1,\dots,x_n)>0\}$ είναι ανοικτό.

6. Αν $p \in A'$ δείξτε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, το σύνολο $B(p,\varepsilon)\cap A$ είναι άπειρο.

7. Δείξτε ότι το σύνολο $\overline{A}$ είναι κλειστό, μάλιστα δε είναι το ελάχιστο κλειστό σύνολο που περιέχει το A, δηλαδή, $\overline{A} = \bigcap\{F \subset \mathbb{R}^n : F\ \kappa\lambda\varepsilon\iota\sigma\tau\acute{o}\ \kappa\alpha\iota\ F \supset A\}$. Δείξτε επίσης ότι το σύνολο A' είναι πάντοτε κλειστό.

8. Αν $A \subset A'$, έπεται ότι το σύνολο A είναι ανοικτό;

9. Δείξτε ότι $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cup\overline{B}$. Είναι σωστό ότι $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cap\overline{B}$;

10. Υπάρχει ακολουθία a_k στον χώρο $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε για κάθε σημείο x του $\mathbb{R}^n$ να υπάρχει υποακολουθία της a_k η οποία να συγκλίνει στο x;

11. Δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι αριθμήσιμη ένωση μπαλών, δηλαδή αν Ω είναι ένα ανοικτό σύνολο τότε υπάρχει μια ακολουθία από μπάλες $B_1, B_2, B_3, \dots$ ούτως ώστε $\Omega = B_1\cup B_2\cup B_3\cup\cdots$.

12. Σωστό ή λάθος; Ένα υποσύνολο T του χώρου $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό (στον $\mathbb{R}^n$) αν και μόνο αν ισχύει το εξής: Για κάθε ακολουθία $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$ μη κενών και φραγμένων υποσυνόλων του T, κλειστών ως προς το T, έπεται ότι $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} B_k \neq \varnothing$.

3. Όρια και συνεχείς συναρτήσεις

3.1. Όρια. 1. Ορισμός. Ας θεωρήσουμε ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ και a ένα σημείο συσσώρευσης του A. Δοθείσης συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}$, θα λέγουμε ότι το **όριο** της ποσότητας $f(x)$, καθώς το x **τείνει** στο a, υπάρχει και είναι ο αριθμός ℓ, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ ούτως ώστε

$$\text{για } x \in A \text{ με } 0 < |x-a| < \delta(\varepsilon) \text{ να ισχύει } |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

Θα γράφουμε δε τότε $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

2. Άλγεβρα των ορίων. Αν $f, g: A \to \mathbb{R}$ είναι δυο συναρτήσεις και υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to a} f(x)$ και $\lim_{x\to a} g(x)$, τότε υπάρχουν και τα όρια $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$ και $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]$ και μάλιστα

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)][\lim_{x\to a} g(x)].$$

Αν δε επιπλέον $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$ τότε υπάρχει και το όριο $\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)]$ και βέβαια

$$\lim_{x\to a}[f(x)/g(x)] = [\lim_{x\to a} f(x)]/[\lim_{x\to a} g(x)].$$

3. Χαρακτηρισμός της σύγκλισης συναρτήσεων με ακολουθίες. Το $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $x_k \in A - \{a\}$ με $x_k \to a$, έπεται ότι $f(x_k) \to \ell$.

3.2. Παραδείγματα. 1. Έστω $P(x_1,\ldots,x_n)$ και $Q(x_1,\ldots,x_n)$ πολυώνυμα των $x_1,\ldots,x_n$ και $a=(a_1,\ldots,a_n)$ ένα σημείο όπου $Q(a)\neq 0$. Τότε

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)}.$$

Όταν όμως $Q(a)=0$ τότε τα πράγματα μπορεί να είναι εντελώς διαφορετικά και εδώ συναντούμε ενδιαφέρουσες και ποικίλες μορφές συμπεριφοράς συναρτήσεων.

2. Τα όρια $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}$ δεν υπάρχουν.

3. Τα όρια $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x-y}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{xy}\sin(x^4+y^4)$ δεν υπάρχουν.

3.3. Ασκήσεις. 1. Μελετήστε τα όρια: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{xy}}{x^2+y^2-1}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\cos(e^{xy}\pi)}{\sin[(x^2+y^2-1)\pi/2]}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{x}$,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^3}{x^2+y^4}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}|x|^y$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x^2+y^2}-x^2-y^2-1}{(x^2+y^2)^2}$,

$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x^2+y^2}-x^2-y^2-1}{1-\cos(x^2+y^2)}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{1/(x^2+y^2)}$, $\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}}\frac{1-\cos(xy)}{\sin^2(x-y)}$,

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x^4+y^4}-x^4-y^4-1}{\sin^4(x^2+y^2)}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x|^{\exp(1/|x|)}y}{x-y}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x-y}$, $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{|x|^\lambda+|y|^\lambda+|z|^\lambda}{(x^2+y^2+z^2)^{\lambda/2}}$.

2. Αν $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ και $\lim_{x\to 0}\sum_{j=1}^n \lambda_j\frac{x_j}{|x|}=0$, τί συμπεραίνετε για τα λ_j; Αν απλώς το ανωτέρω όριο υπάρχει, τί συμπέρασμα βγάζετε; Το ίδιο ερώτημα όταν $\lim_{\substack{x\to 0\\ x_j>0}}\sum_{j=1}^n\lambda_j\frac{x_j}{|x|}=0$.

3. Αν $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\alpha x^2+\beta xy+\gamma y^2}{x^2+y^2}=0$, τί συμπέρασμα βγάζετε; Ομοίως αν $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\alpha x^3+\beta x^2y+\gamma xy^2+\delta y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$. Διατυπώστε και απαντήστε ανάλογα ερωτήματα για τρεις μεταβλητές x,y,z.

3.4. Όρια διανυσματικών συναρτήσεων. Δοθείσης συνάρτησης $f: A \to \mathbb{R}^m$, ορισμένης σε ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$, και σημείου $a \in A'$, το όριο της διανυσματικής ποσότητας $f(x)$, του $x \to a$, υπάρχει και είναι το σημείο $\ell \in \mathbb{R}^m$, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ ούτως ώστε για $x \in A$ με $0 < |x-a| < \delta(\varepsilon)$ να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Θα γράφουμε δε τότε $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$. Είναι δε αυτό ισοδύναμο με το ότι $\lim_{x \to a} f_i(x) = \ell_i$ για $i = 1, \ldots, m,$ όπου $(f_1, \ldots, f_m) = f$ και $(\ell_1, \ldots, \ell_m) = \ell$.

3.5. Όρια στο άπειρο και άπειρα όρια. 1. Όρια της μορφής $\lim_{x \to \infty} f(x)$**.** Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, ορισμένη σε ένα μη φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$. Θα λέγουμε ότι το όριο $\lim_{x \to \infty} f(x)$ υπάρχει και είναι ο αριθμός ℓ, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $R(\varepsilon) > 0$ ούτως ώστε $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ για κάθε $x \in A$ με $|x| > R(\varepsilon)$. Θα γράφουμε δε ότι $\lim_{x \to \infty} f(x) = \ell$ ή ακόμη $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \ell$. Π.χ., τα όρια $\lim_{(x,y) \to \infty} \frac{x}{y}$ και $\lim_{(x,y) \to \infty} \left[x^2 y^3 \sin\left(\frac{1}{x^3 y^2} \right) \right]$ δεν υπάρχουν. **2. Όρια της μορφής** $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$**.** Όταν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι ορισμένη σε ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ και $a \in A'$, θα λέγουμε ότι $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\delta(M) > 0$ ούτως ώστε για $x \in A$ με $0 < |x-a| < \delta(M)$ να έχουμε ότι $|f(x)| > M$. Π.χ., $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{1}{x^2 + y^4} = \infty$. **Όρια της μορφής** $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Όταν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι ορισμένη πάνω σε ένα μη φραγμένο σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$, θα λέγουμε ότι $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $R(M) > 0$ ούτως ώστε για $x \in A$ με $|x| > R(M)$ να έχουμε ότι $|f(x)| > M$. Π.χ., $\lim_{(x,y) \to \infty} \left(\frac{x^2}{y} + y \right) = \infty$.

3.6. Ασκήσεις. 1. Μελετήστε τα όρια

$$\lim_{(x,y) \to \infty} \frac{x^2 y^2 + x^2 y + x y^2 + 1}{5x^2 y^2 - 4x^2 y + 3x y^2 - 1}, \quad \lim_{(x,y) \to \infty} \left[x^3 y^2 \sin\left(\frac{1}{x^3 y^2} \right) \right], \quad \lim_{(x,y) \to \infty} \left[x^3 y \sin\left(\frac{1}{x^3 y^2} \right) \right], \quad \lim_{(x,y) \to \infty} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^4}.$$

2. Δείξτε ότι $\lim_{x \to \infty} \left[x_1 x_2 \ldots x_n e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)} \right] = 0$. Γενικότερα δείξτε ότι

$$\lim_{x \to \infty} P(x_1, x_2, \ldots, x_n) e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)} = 0,$$

για κάθε πολυώνυμο $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Και ακόμα γενικότερα, δείξτε ότι

$$\lim_{x \to \infty} P(x_1, x_2, \ldots, x_n) e^{-(|x_1|^{\lambda_1} + |x_2|^{\lambda_2} + \cdots + |x_n|^{\lambda_n})} = 0,$$

για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς λ_j, όσο μικροί και αν είναι.

3.7. Διαδοχικά όρια συναρτήσεων. Πρόταση. Έστω $f(x,y)$ μια συνάρτηση δυο μεταβλητών x και y, ορισμένη για $(x,y) \in \Omega - \{(a,b)\}$, όπου Ω είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $(a,b) \in \Omega$. Αν

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = \ell \quad \text{και το μερικό όριο } \lim_{x \to a} f(x,y) \text{ υπάρχει } (\forall y \neq b)$$

τότε υπάρχει και το διαδοχικό όριο $\lim_{y \to b} (\lim_{x \to a} f(x,y))$ και μάλιστα $\lim_{y \to b} (\lim_{x \to a} f(x,y)) = \ell$.

Επίσης αν $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y) = \ell$ και υπάρχουν τα μερικά όρια $\lim_{x \to a} f(x,y)$ και $\lim_{y \to b} f(x,y)$ τότε υπάρχουν και τα διαδοχικά όρια $\lim_{y \to b} (\lim_{x \to a} f(x,y))$ και $\lim_{x \to a} (\lim_{y \to b} f(x,y))$, και μάλιστα είναι ίσα, δηλαδή

$$\lim_{y \to b} (\lim_{x \to a} f(x,y)) = \lim_{x \to a} (\lim_{y \to b} f(x,y)) = \lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y).$$

Ιδιαιτέρως αν $\lim_{y \to b} (\lim_{x \to a} f(x,y)) \neq \lim_{x \to a} (\lim_{y \to b} f(x,y))$ τότε δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x,y)$.

Παραδείγματα. 1. Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y} & \alpha\nu \quad y\neq 0 \\ 0 & \alpha\nu \quad y=0. \end{cases}$$

Τότε το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ υπάρχει και είναι 0. Ακόμη τα μερικά όρια $\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ όρια υπάρχουν, για κάθε y, και είναι όλα 0. Αλλά τα μερικά όρια $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ δεν υπάρχουν για κανένα $x\neq 0$.

2. Θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \quad \text{ορισμένη για } (x,y)\neq(0,0).$$

Στη περίπτωση αυτή τα διαδοχικά όρια υπάρχουν και είναι ίσα: $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))=\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))=0$.

Αλλά το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

3. Για $x+y\neq 0$, ας ορίσουμε την συνάρτηση

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

(στα σημεία όπου $x+y=0$ μπορούμε να δώσουμε οποιεσδήποτε τιμές). Τότε

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))=-1 \quad \text{ενώ} \quad \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))=1.$$

Και το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

3.8. «Ισοδύναμες αποστάσεις». Η ποσότητα $|x-y|$ είναι **<u>«συγκρίσιμη»</u>** με άλλες ποσότητες όπως έπεται από τις ακόλουθες ανισότητες.

1. Για κάθε $a\in\mathbb{R}^n$, $\max\limits_{1\le j\le n}|a_j|\le|a|\le\sqrt{n}\max\limits_{1\le j\le n}|a_j|$.

2. Για κάθε $a\in\mathbb{R}^n$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|\le|a|\le\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|$.

3. Για κάθε θετικό ακέραιο m, $\dfrac{1}{\sqrt{n}}|a|\le\sqrt[m]{|a_1|^m+\cdots+|a_n|^m}\le\sqrt[m]{n}|a|$.

4. Για κάθε $\lambda>1$, $\dfrac{1}{n^\lambda}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|\right)^\lambda\le\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^\lambda\le n\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|\right)^\lambda$.

5. Για κάθε $\lambda>1$, $\dfrac{1}{n^{1/\lambda}\sqrt{n}}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^\lambda\right)^{1/\lambda}\le|a|\le n\left(\sum\limits_{j=1}^{n}|a_j|^\lambda\right)^{1/\lambda}$.

Εφαρμογή. Το $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ ούτως ώστε για $x\in A-\{a\}$ με $|x_1-a_1|<\delta,\ |x_2-a_2|<\delta,\ \ldots,|x_n-a_n|<\delta$, να ισχύει $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

3.9. Συνεχείς συναρτήσεις. 1. Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση, ορισμένη σε ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$, και a ένα σημείο του A. Η συνάρτηση f λέγεται **συνεχής στο σημείο** a, αν για κάθε ακολουθία σημείων $x_k\in A$ με $x_k\to a$ έπεται ότι $f(x_k)\to f(a)$. Ισοδύναμα, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο a αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon)>0$ ούτως ώστε για $x\in A$ με $|x-a|<\delta(\varepsilon)$ να ισχύει ότι $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Επίσης στην περίπτωση που το σημείο a είναι σημείο συσσώρευσης του A, η συνέχεια της συνάρτησης f στο σημείο a είναι ισοδύναμη με το ότι $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Στη δε περίπτωση που το σημείο a είναι μεμονωμένο σημείο του A, η συνέχεια της συνάρτησης f είναι αυτόματη, αρκεί να σκεφθούμε ότι στην περίπτωση αυτή η μόνη ακολουθία σημείων του A που συγκλίνει στο a είναι «ουσιαστικά» η σταθερή.

2. Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται **συνεχής** αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.

3. Ανάλογα ορίζεται και η συνέχεια μιας διανυσματικής συνάρτησης $f=(f_1,f_2,\dots,f_m):A\to\mathbb{R}^m$. Η συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο a, αν για κάθε ακολουθία σημείων $x_k\in A$ με $x_k\to a$ έπεται ότι $f(x_k)\to f(a)$, μόνο που τώρα η σύγκλιση «$f(x_k)\to f(a)$» γίνεται στον χώρο $\mathbb{R}^m$. Είναι δε αυτό ισοδύναμο με την συνέχεια των συναρτήσεων $f_1,f_2,\dots,f_m$ στο εν λόγω σημείο. Και βέβαια η συνέχεια (σε κάθε σημείο) μιας συνάρτησης $f=(f_1,f_2,\dots,f_m):A\to\mathbb{R}^m$ είναι ισοδύναμη με την συνέχεια των συναρτήσεων $f_1,f_2,\dots,f_m:A\to\mathbb{R}$.

4. Ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων. Αν οι συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}$ και $g:A\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο $a\in A$, το αυτό συμβαίνει και με τις συναρτήσεις $f+g$ και fg. Αν επιπλέον $g(a)\neq 0$ τότε και η συνάρτηση f/g είναι συνεχής στο σημείο a. (Βέβαια η συνάρτηση f/g ορίζεται στο σύνολο $A-\{x\in A:\ g(x)=0\}$, και αυτή η συνάρτηση λέγουμε ότι είναι συνεχής στο a.) Στην περίπτωση των διανυσματικών συναρτήσεων ισχύουν οι ιδιότητες: Αν οι συναρτήσεις $f:A\to\mathbb{R}^m$ και $g:A\to\mathbb{R}^m$ είναι συνεχείς στο σημείο $a\in A$, το αυτό συμβαίνει και με τις συναρτήσεις $f+g$ και $f\cdot g$. Και αν $\lambda:A\to\mathbb{R}$ είναι μια αριθμητική συνάρτηση, επίσης συνεχής στο σημείο a, τότε και η συνάρτηση λf είναι συνεχής στο σημείο a. Γενικότερη των ανωτέρω ιδιοτήτων είναι η εξής: Έστω $f:A\to\mathbb{R}^m$ μια συνάρτηση και $g:f(A)\to\mathbb{R}^s$ επίσης μια συνάρτηση (ορισμένη πάνω στο σύνολο τιμών της f). Τότε ορίζεται η σύνθεση $g\circ f:A\to\mathbb{R}^s$, και αν η f είναι συνεχής στο σημείο a και η g είναι συνεχής στο σημείο $f(a)$ τότε και η σύνθεση είναι συνεχής στο σημείο a. Ιδιαιτέρως, η σύνθεση συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

Παραδείγματα. 1. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \alpha\nu\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \alpha\nu\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

είναι συνεχής.

2. Η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \alpha\nu\quad (x,y)\neq(0,0)\\ a & \alpha\nu\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

είναι ασυνεχής για κάθε $a\in\mathbb{R}$.

3.10. Ασκήσεις. 1. Είναι η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(xy)}{(x^2+y^2)^2} & \alpha\nu\quad (x,y)\neq(0,0)\\ a & \alpha\nu\quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

συνεχής για κάποιο a;

2. Εξετάστε κατά πόσο η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{xy}{\sin(x-y)}$, ορισμένη για $x\neq y+k\pi\quad (k\in\mathbb{Z})$, επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση σε σημεία με $x=y+k\pi$.

3. Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}^m$, ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$, είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε σύνολο $F\subset\mathbb{R}^m$, κλειστό στον $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι και το σύνολο $f^{-1}(F)$ είναι κλειστό στο A.

4. Δείξτε ότι μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}^m$, ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$, είναι συνεχής αν και μόνο αν για κάθε σύνολο $U\subset\mathbb{R}^m$, ανοικτό στον $\mathbb{R}^m$, έπεται ότι και το σύνολο $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο A.

5. Θεωρήστε δυο συνεχείς συναρτήσεις $f,g:A\to\mathbb{R}^m$, και ορίστε το σύνολο

$$X=\{x\in A:\ \exists\lambda\in\mathbb{R}\ \ \text{ούτως ώστε}\ f(x)=\lambda g(x)\}.$$

Είναι το σύνολο X κλειστό στο A; Το ίδιο ερώτημα με το σύνολο

$$Y=\{x\in A:\ \exists\lambda\in[0,1]\ \ \text{ούτως ώστε}\ f(x)=\lambda g(x)\}.$$

4. Συμπαγή και συνεκτικά σύνολα και τα βασικά θεωρήματα των συνεχών συναρτήσεων

4.1. Συμπαγή σύνολα. Ορισμός. Ένα υποσύνολο E του χώρου $\mathbb{R}^n$ λέγεται **συμπαγές** αν είναι κλειστό (εννοείται στον $\mathbb{R}^n$) και φραγμένο.

Θεώρημα Α. *Ένα υποσύνολο E του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία σημείων του E έχει συγκλίνουσα υποακολουθία, η οποία να συγκλίνει μέσα στο E.*

Θεώρημα Β. *Ένα σύνολο $E \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε άπειρο υποσύνολό του έχει ένα τουλάχιστον σημείο συσσώρευσης που να ανήκει μέσα στο σύνολο E.*

Θεώρημα Γ. *Έστω ότι $E \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f : E \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε το σύνολο $f(E)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$. Δηλαδή, συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές.*

Θεώρημα Δ. *Έστω ότι $E \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f : E \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε υπάρχουν σημεία $q, p \in E$ ούτως ώστε $f(q) \le f(x) \le f(p)$ για κάθε $x \in E$. Δηλαδή η συνάρτηση $f(x)$ έχει μεγίστη και ελαχίστη τιμή. Και ιδιαιτέρως, αν $f(x) > 0$ για κάθε $x \in E$, τότε $\inf\{f(x) : x \in E\} > 0$.*

Πόρισμα. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$. Τότε υπάρχει σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ ούτως ώστε $f(p) = \max\{f(x) : \text{για } x \in \mathbb{R}^n\}$.*

4.2. Ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$ ορισμένη πάνω σε ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$ λέγεται **ομοιόμορφα συνεχής** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ούτως ώστε για $x, y \in A$ με $|x - y| < \delta$ να έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Παραδείγματα. 1. Κάθε γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.

2. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Χαρακτηρισμός της ομοιόμορφης συνέχειας με ακολουθίες – Πρόταση. Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^m$ είναι ομοιόμορφα συνεχής αν και μόνο αν για κάθε δυο ακολουθίες x_k και y_k από το σύνολο A με $|x_k - y_k| \to 0$ έπεται ότι $|f(x_k) - f(y_k)| \to 0$.

4.3. Θεώρημα. *Έστω ότι $E \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο και $f : E \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής.*

4.4. Σχόλια. 1. Θεώρημα. *(Heine-Borel) Ένα σύνολο $E \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ανοικτό κάλυμμα του E περιέχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Ακριβέστερα αυτό σημαίνει ότι για κάθε οικογένεια $\{U_j,\ j \in J\}$ ανοικτών συνόλων για τα οποία $E \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ έπεται ότι υπάρχουν $j_1, \dots, j_N \in J$ ούτως ώστε $E \subset U_{j_1} \cup \cdots \cup U_{j_N}$.*

2. Λήμμα του Lebesgue. *Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο και $\mathcal{U}$ ένα ανοικτό κάλυμμά του. Τότε υπάρχει ένας αριθμός $\lambda > 0$ ώστε για κάθε υποσύνολο $A \subset E$ με $diam(A) < \lambda$, να υπάρχει κάποιο μέλος $U \in \mathcal{U}$ με $A \subset U$.*

4.5. Ορισμοί. 1. Μια **καμπύλη** στον χώρο $\mathbb{R}^n$ είναι μια συνεχής απεικόνιση $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ (όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$). Συνήθως μια καμπύλη $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ την σκεπτόμαστε σαν το σύνολο των σημείων

$$[\gamma] = \{\gamma(t) : t \in [\alpha, \beta]\} \text{ στον χώρο } \mathbb{R}^n.$$

2. Έστω $a, b \in \mathbb{R}^n$. Το **ευθύγραμμο τμήμα** $[a, b]$, από το σημείο a στο σημείο b, ορίζεται ως εξής:

$$[a, b] = \{(1 - t)a + tb : \text{με } 0 \le t \le 1\}.$$

4.6. Κατά τόξα συνεκτικά σύνολα. Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται ότι είναι **κατά τόξα συνεκτικό** αν κάθε δυο σημεία αυτού μπορούν να συνδεθούν με μια καμπύλη που ευρίσκεται μέσα στο S, αν δηλαδή για κάθε $p, q \in S$ υπάρχει καμπύλη $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ με $\gamma(\alpha) = p$, $\gamma(\beta) = q$ και $[\gamma] \subset S$.

Παραδείγματα. 1. Κάθε κυρτό σύνολο είναι κατά τόξα συνεκτικό.

2. Έστω ότι $S \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα κατά τόξα συνεκτικό σύνολο και $f : S \to \mathbb{R}^m$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε το σύνολο $f(S)$ είναι επίσης κατά τόξα συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.

3. Αν τα σύνολα $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ είναι κατά τόξα συνεκτικά και $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ τότε το σύνολο $S_1 \cup S_2$ είναι επίσης κατά τόξα συνεκτικό. Γενικότερα αν τα σύνολα S_j μιας οικογένειας $\{S_j : j \in J\}$ είναι κατά τόξα συνεκτικά και $\bigcap_{j \in J} S_j \neq \varnothing$ τότε και το σύνολο $\bigcup_{j \in J} S_j$ είναι κατά τόξα συνεκτικό.

Παρατήρηση. Είναι τετριμμένο ότι κάθε διάστημα στην ευθεία $\mathbb{R}$ είναι κατά τόξα συνεκτικό. Το αντίστροφο είναι επίσης σωστό — αυτό έπεται από το *Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής*.

Θεώρημα. Συνεχής εικόνα κατά τόξα συνεκτικού συνόλου είναι επίσης κατά τόξα συνεκτικό. Ιδιαιτέρως αν το σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ είναι κατά τόξα συνεκτικό και $f : S \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε για κάθε δυο σημεία $p, q \in S$ και για κάθε αριθμό λ μεταξύ των $f(p)$ και $f(q)$ υπάρχει σημείο $\xi \in S$ με $f(\xi) = \lambda$.

4.7. Θεώρημα. *Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές και κατά τόξα συνεκτικό σύνολο και $f : E \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν $m = \inf\{f(x) : x \in E\}$ και $M = \sup\{f(x) : x \in E\}$ τότε $f(E) = [m, M]$. Δηλαδή, για κάθε λ με $m \le \lambda \le M$ υπάρχει σημείο $\xi \in E$ ούτως ώστε $f(\xi) = \lambda$.*

4.8. Ασκήσεις. 1. Έστω $E \subset \mathbb{R}^n$ και $K \subset \mathbb{R}^m$ δυο συμπαγή σύνολα. Δείξτε ότι και το σύνολο $E \times K \subset \mathbb{R}^{n+m}$ είναι επίσης συμπαγές σύνολο. Γενικότερα δείξτε ότι αν τα σύνολα $K_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1, 2, \ldots, N$, είναι συμπαγή τότε και το σύνολο $K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_N$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n_1 + n_2 + \cdots + n_N}$.

2. Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$ ένα κλειστό σύνολο και $p \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο $a \in F$ έτσι ώστε $|p - a| = dist(p, F) = \inf\{|p - x| : x \in F\}$.

3. Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$ ένα κλειστό σύνολο και $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές σύνολο. Δείξτε ότι υπάρχουν σημεία $a \in F$ και $b \in K$ τέτοια ώστε $|a - b| = dist(F, K) = \inf\{|x - y| : x \in F, y \in K\}$. Αν το σύνολο K υποτεθεί μόνο κλειστό, ισχύει το συμπέρασμα;

4. Αν $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^n$ είναι κλειστά και $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, έπεται ότι $dist(F_1, F_2) > 0$;

5. Σωστό ή λάθος; Ένα σύνολο $K \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο για κάθε κλειστό σύνολο $F \subset \mathbb{R}^n$ με $K \cap F \neq \varnothing$, υπάρχουν $p, q \in K \cap F$ με $|p - q| = diam(K \cap F) = \sup\{|x - y| : x, y \in K \cap F\}$.

6. Είναι το σύνολο $\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} - \dfrac{x_n^2}{a_n^2} = 1 \right\}$ κατά τόξα συνεκτικό;

7. Είναι το σύνολο $\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \cdots + \dfrac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} - \dfrac{x_n^3}{a_n^3} = 1 \right\}$ κατά τόξα συνεκτικό;

8. Είναι το σύνολο $\mathbb{R}^4 - \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \ \textit{και} \ x_4 = 0\}$ κατά τόξα συνεκτικό;

9. Αν $n \ge 2$, είναι το σύνολο $\mathbb{R}^n - \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 1 \ \textit{και} \ x_n = 0\}$ κατά τόξα συνεκτικό;

4.9. Σχόλια. Συνεκτικά σύνολα. Ένα υποσύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται **συνεκτικό** αν δεν υπάρχουν ανοικτά σύνολα A και B (εννοείται ανοικτά στον $\mathbb{R}^n$), με τις ιδιότητες: $S \subset A \cup B$, $A \cap S \neq \varnothing$, $B \cap S \neq \varnothing$ και $A \cap B = \varnothing$.

Παρατηρήσεις. 1. Κάθε κατά τα τόξα συνεκτικό σύνολο είναι συνεκτικό. Το αντίστροφο αυτού δεν ισχύει.

2. Ένα ανοικτό σύνολο είναι κατά τόξα συνεκτικό αν και μόνο αν είναι συνεκτικό.

Θεώρημα Α. *Αν $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικά σύνολα και $S_1 \cap S_2 \neq \varnothing$ τότε και η ένωση $S_1 \cup S_2$ είναι επίσης συνεκτικό σύνολο. Γενικότερα, αν $\{S_j : j \in J\}$ είναι μια οικογένεια από συνεκτικά σύνολα και $\bigcap_{j \in J} S_j \neq \varnothing$, τότε και η ένωση $\bigcup_{j \in J} S_j$ είναι συνεκτικό σύνολο.*

Θεώρημα Β. *Κάθε διάστημα στην ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι συνεκτικό σύνολο. Αντίστροφα αν $S \subset \mathbb{R}$ είναι συνεκτικό σύνολο τότε το S είναι ένα διάστημα.*

Θεώρημα Γ. *Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^n$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν δεν υπάρχουν υποσύνολά του, X και Y, ανοικτά στο S, με τις εξής ιδιότητες: $S = X \cup Y$, $X \neq \varnothing$, $Y \neq \varnothing$ και $X \cap Y = \varnothing$.* **Πόρισμα.** *Έστω $S \subset \mathbb{R}^n$ ένα συνεκτικό σύνολο και $\Omega \subset S$. Αν το Ω είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό στο S, τότε ή $\Omega = \varnothing$ ή $\Omega = S$.*

Θεώρημα Δ. *Συνεχής εικόνα συνεκτικού συνόλου είναι επίσης συνεκτικό.*