Ασκήσεις

1)Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα πρώτου είδους.

(α) $\int_\sigma \frac{1}{3+y} ds$, όπου $\sigma(t) = \left(2t^{\frac{3}{2}}, 3t\right), t \in [0,1]$.

(β) $\int_\sigma (3x - 2y) ds$, όπου $\sigma(t) = (\sin t, \cos t), t \in [0, \pi]$

(γ) $\int_\sigma \frac{y^2}{x^3} ds$, όπου $\sigma(t) = (2t, t^4), 0 \le t \le 1$.

(δ) $\int_\sigma (x^2 + y^2) ds$, όπου $\sigma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t), 0 \le t \le \pi$.

2)Να υπολογισθούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα δευτέρου είδους:

(α) $\int_\sigma (x^2 - y^2) dx + xdy$, όπου $\sigma(\theta) = (2\cos\theta, 2\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi]$.

(β) $\int_C x^2 ydx - xydy$, όπου C είναι η καμπύλη που ξεκινά από το $(0,0)$ και πηγαίνει στο $(1,1)$ μέσω της παραβολής $y = x^2$ και επιστρέφει στο $(0,0)$ επί της ευθείας $y = x$.

(γ) $\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, όπου C είναι το τετράγωνο $|x| + |y| = 1$ το οποίο θεωρείται θετικά (αντιωρολογιακά) προσανατολισμένο.

(δ) Να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_{\sigma_i} ydx, i = 1,2$, όπου $\sigma_1(t) = (\cos t, \sin t), \sigma_2(t) = (\cos 2t, \sin 2t), t \in [0, 2\pi]$. Τι παρατηρείτε; [Απάντηση. $\int_{\sigma_1} ydx = -\pi$ και $\int_{\sigma_2} ydx = -2\pi$]

3) Έστω $F = (x^2 - y^2)i + 2xyj$ διανυσματικό πεδίο δυνάμεων στο R^2. Να βρεθεί το ολικό έργο που παράγει αυτή η δύναμη όταν μετακινεί αντιωρολογιακά μια σημειακή μάζα στην περίμετρο του τετραγώνου με κορυφές $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$.

4) Να βρεθεί το έργο που παράγει το διανυσματικό πεδίο δυνάμεων $F = (x^2 + y^2)i + (x + y)j$ όταν μετακινεί αντιωρολογιακά ένα υλικό σημείο επί του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ από το $(1,0)$ στο $(-1,0)$ και κατόπιν πίσω στο $(1,0)$ πάνω στον άξονα των x.

5) Έστω $\sigma:[a,b]\to R^3$ ομαλή καμπύλη (δηλαδή η σ είναι C^1 και $\sigma'(t)\neq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$)

(α) Αν στο $\sigma(t)$ η F είναι κάθετη στο $\sigma'(t)$ για κάθε $t\in[a,b]$, τότε $\int_\sigma F\cdot ds=0$

(β) Αν στο $\sigma(t)$ η F είναι παράλληλη με το $\sigma'(t)$ για κάθε $t\in[a,b]$ δείξτε ότι $\int_\sigma F\cdot ds=\int_\sigma \|F\|ds$ (όταν λέμε παράλληλη με το $\sigma'(t)$ εννοούμε ότι $F(\sigma(t))=\lambda(t)\sigma'(t)$, όπου $\lambda(t)>0$).)

(γ) Αν $x\in R^3$ τότε η εξίσωση $\sigma(t)=x$ έχει το πολύ πεπερασμένες λύσεις στο $[a,b]$.

(δ) Αν η σ είναι C^2 και $\sigma''(t)\neq 0,\forall t\in[a,b]$ τότε η εξίσωση η εξίσωση $\sigma'(t)=0$ έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων στο $[a,b]$.

6) Αν η καμπύλη $\sigma:[a,b]\to R^3$ είναι κατά τμήματα C^1 και $F:[\sigma]\to R^3$ συνεχής δείξτε ότι $\left|\int_\sigma F\cdot ds\right|\leq \mathrm{M}\cdot\ell$ όπου $\mathrm{M}=\sup\left\{\left\|F(\sigma(t))\right\|, t\in[a,b]\right\}$ και ℓ το μήκος της σ.

7) Έστω σ και ψ δύο καμπύλες του R^2 με τα ίδια άκρα και $F:R^2\to R^2$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι η ισότητα $\int_\sigma F\cdot ds=\int_\psi F\cdot ds$ είναι ισοδύναμη με την $\int_C F\cdot ds=0$, όπου C είναι η κλειστή καμπύλη που προκύπτει αν μετακινηθούμε πρώτα πάνω στην σ και μετά πάνω στην ψ στην αντίθετη κατεύθυνση.

8) Έστω $\nabla f(x,y,z)=\left(2xyze^{x^2}, ze^{x^2}, ye^{x^2}\right)$. Αν $f(0,0,0)=5$, βρείτε το $f(1,1,2)$.

9) Υπολογίστε το $\int_C 2xyzdx+x^2zdy+x^2ydz$, όπου C είναι μια προσανατολισμένη απλή καμπύλη που ενώνει το $(1,1,1)$ με το $(1,2,4)$.