Ασκήσεις

1)Σχεδιάστε το χωρίο D και υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D f(r,\theta)drd\theta$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^3 re^{-r^2}drd\theta$, (β) $\int_0^{2\pi}\int_0^4 2r^2\cos\theta drd\theta$

(γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 \sqrt{4-r^2}\cdot rdrd\theta$, (δ) $\int_0^{\pi}\int_0^{1+\sin\theta} drd\theta$

2)Χρησιμοποιείστε ένα διπλό ολοκλήρωμα για να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου D που περικλείουν οι καμπύλες:
(α) $r=4$, (β) $r=2\cos\theta$, (γ) $r=1$ και $r=2\sin\theta$.

3)Χρησιμοποιείστε πολικές συντεταγμένες για τον υπολογισμό των διπλών ολοκληρωμάτων:
(α) $\iint_D ydxdy$ όπου D ο δίσκος $x^2+y^2\le 4$
(β) $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$ όπου D είναι το χωρίο που φράσσεται από τον άξονα των x, την ευθεία $y=x$ και τον κύκλο $x^2+y^2=1$
(γ) $\iint_D xdxdy$, όπου D είναι η τιμή των χωρίων που περικλείονται από τις καμπύλες $r=2\sin\theta$ και $r=2\cos\theta$.

4)Έστω ότι η $\mathrm{T}: R^3\to R^3$ ορίζεται από την σχέση
$\mathrm{T}(u,v,\omega)=(u\cos v\cos\omega, u\sin v\cos\omega, u\sin\omega)$
(α) Δείξτε ότι $\mathrm{T}(R^3)=S^2$ δηλαδή κάθε (x,y,z) με $x^2+y^2+z^2=1$ γράφεται σαν $(x,y,z)=\mathrm{T}(u,v,\omega)$ για κάποιο (u,v,ω)
(β) Δείξτε ότι η Τ δεν είναι $1-1$.

5) (α) Ολοκληρώστε την συνάρτηση $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ πάνω στον κύλινδρο $x^2+y^2\le 2, -2\le z\le 3$.
(β) Δείξτε ότι η επιφάνεια $z=x^2+y^2$ χωρίζει τον κύλινδρο $x^2+y^2\le a^2, 0\le z\le a^2$ ($a>0$), σε δύο στερεά χωρία που έχουν ίσους όγκους ($=\frac{1}{2}\pi a^4$).

6)Έστω η μοναδιαία σφαίρα $\mathrm{B}=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1\}$ του R^3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\mathrm{B}}\frac{dxdydz}{\sqrt{2+x^2+y^2+z^2}}$.

7)Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_S \frac{dxdydz}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$, όπου S το στερεό που φράσσεται από τις σφαίρες $x^2+y^2+z^2=a^2$ και $x^2+y^2+z^2=b^2$,όπου $0<b<a$. Επίσης υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}$ επί του S και ακόμη υπολογίστε (αν υπάρχει) το ολοκλήρωμα $\int_{\mathrm{B}} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, επί της σφαίρας $\mathrm{B}=\left\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\leq 1\right\}$.

8)Με την χρήση σφαιρικών συντεταγμένων υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $f(\rho,\theta,\varphi)=\frac{1}{\rho}$ πάνω στο χωρίο του πρώτου ογδοημορίου του R^3 που φράσσεται από τους κώνους $\theta=\frac{\pi}{4}, \varphi=\arctan 2$ και την σφαίρα $\rho=\sqrt{6}$.

9)Η απεικόνιση $\mathrm{T}(u,v)=\left(u^2-v^2, 2uv\right)$ μετασχηματίζει το ορθογώνιο $1\leq u\leq 2, 1\leq v\leq 3$ του επιπέδου uv σε ένα χωρίο $\Re$ του επιπέδου xy.
(α) Δείξτε ότι η T είναι $1-1$ στο ανοικτό δεξί ημιεπίπεδο.
(β) Βρείτε το εμβαδόν του $\Re$ χρησιμοποιώντας τον τύπο αλλαγής μεταβλητής.

10)Με την χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων υπολογίστε τα ολοκληρώματα:
(α) $\int_{\Re} xydxdydz$, όπου $\Re$ είναι ο κύλινδρος $x^2+y^2\leq 1$ με $0\leq z\leq 1$,
(β) $\int_{\Re}\left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)dxdydz$, όπου $\Re$ είναι ο κύλινδρος $x^2+y^2\leq a^2$ με $0\leq z\leq \frac{1}{\pi}$
και (γ) $\int_{\Re} z\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}dxdydz$, όπου $\Re$ είναι το στερεό που φράσσεται από πάνω από το επίπεδο $z=2$ και από κάτω από την επιφάνεια $2z=x^2+y^2$
11)Υπολογίστε τον όγκο $V(\Omega)$ του στερεού
$\Omega=\left\{(x,y,z)\in R^3: x^2+y^2\leq 2ax, 0\leq z\leq \sqrt{4a^2-x^2-y^2}\right\}, a>0$
[Απάντηση: $V(\Omega)=\frac{8}{3}a^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$]