Ασκήσεις

1)Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και υπολογίστε τα ακόλουθα διπλά ολοκληρώματα:

(α) $\int_0^4 \int_0^{4-x} xydydx$, (β) $\int_{-2}^{1} \int_{y^2+4y}^{3y+2} dxdy$, (γ) $\int_0^3 \int_1^{4-x} (x+y)dydx$

2)Υπολογίστε τα διπλά ολοκληρώματα:

(α) $\int_D ydxdy$, όπου D είναι το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες $y=\sqrt{x},\ y=2-x$ και $y=0$.

(β) $\int_D 2xdxdy$, όπου D είναι το χωρίο που φράσσεται από τις καμπύλες $x^2y=1,\ y=x,\ x=2$ και $y=0$.

3)Σχεδιάστε το χωρίο ολοκλήρωσης και υπολογίστε τα ακόλουθα διπλά ολοκληρώματα με δύο τρόπους:

(α) $\int_0^4 \int_0^{4-x} xydydx$, (β) $\int_0^1 \int_x^{2x} e^{y-x}dydx$, (γ) $\int_1^e \int_0^{\log x} xydydx$.

4)Βρείτε τον όγκο κάτω από την επιφάνεια $z=x+y+2$ και πάνω από το χωρίο D του xy επιπέδου που φράσσεται από τις καμπύλες $y=x^2$ και $y=2$.

5)Υπολογίστε τα ολοκληρώματα

(α) $\int_0^1 \int_0^y \left(x^2+y^2\right)dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} \left(x^2+y^2\right)dxdy$ και

(β) $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{x}}^1 e^{\frac{x}{y}}\, dydx$

αλλάζοντας την τάξη της ολοκλήρωσης.

6)Βρείτε τον όγκο κάτω από την επιφάνεια $z=x^2+y^2$ και πάνω από το τετράγωνο του xy επιπέδου που φράσσεται από τις καμπύλες $|x|\le 1$ και $|y|\le 1$.

7)Υπολογίστε τα διαδοχικά ολοκληρώματα:

(α) $\int_1^4 \int_{-2}^3 \int_2^5 dxdydz$, (β) $\int_1^2 \int_0^1 \int_{-1}^2 8x^2yz^3dxdydz$, (γ) $\int_{-1}^2 \int_0^{\pi} \int_1^4 yz\cos xydzdxdy$ και

(δ) $\int_1^4 \int_{-1}^{2z} \int_0^{\sqrt{3}\cdot x} \frac{x-y}{x^2+y^2}dydxdz$

8)Υπολογίστε τα τριπλά ολοκληρώματα:

(α) $\int\limits_D \left(x^2 y + y^2 z\right) dxdydz$, όπου D είναι το ορθογώνιο $1 \le x \le 3,\ -1 \le y \le 1$ και $2 \le z \le 4$.

(β) $\int\limits_D xyzdxdydz$, όπου D είναι το τετράεδρο με κορυφές $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0)$ και $(0,0,1)$.

(γ) $\int\limits_D xdxdydz$, όπου D είναι το στερεό που φράσσεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και το επίπεδο $z = 1$.

(δ) $\int\limits_D yzdxdydz$, όπου D είναι το στερεό στο πρώτο ογδοημόριο που φράσσεται από τα ημισφαίρα $x = \sqrt{9 - y^2 - z^2}$ και τα επίπεδα συντεταγμένων.

9)Έστω $f : R^3 \to R$ συνεχής συνάρτηση.

(α) Γράψτε έξι διαδοχικά ολοκληρώματα με τα κατάλληλα όρια ολοκλήρωσης τα οποία είναι ίσα με το ολοκλήρωμα, $\int\limits_D f(x,y,z) dxdydz$, όπου D το στερεό: $y^2 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$ και $0 \le z \le 4 - x$.

(β) Αλλάξτε την τάξη ολοκλήρωσης στα ακόλουθα διαδοχικά ολοκληρώματα, όπως υποδεικνύεται:

(ι) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x,y,z) dzdydx \to dzdxdy$

(ιι) $\int_1^2 \int_0^{z-1} \int_0^x f(x,y,z) dydxdz \to dydzdx$

(ιιι) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y,z) dzdydx \to dydxdz$