Ασκήσεις

1) Έστω $f_k:[a_k,b_k]\to R, k=1,2,...,n$, Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Θέτομε $\Re=[a_1,b_1]\times...\times[a_n,b_n]$ και ορίζουμε την συνάρτηση $F:\Re\to R$ ώστε $F(x_1,...,x_n)=f_1(x_1)...f_n(x_n)$.

Αποδείξτε ότι, $\int\limits_{\Re} F(x_1,...,x_n)d(x_1,...,x_n)=\prod\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{a_k}^{b_k} f_k(t)dt$

(*) 2)Έστω $\Re=[a,b]\times[c,d]$ κλειστό ορθογώνιο του R^2 και $f:\Re\to R$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι για κάθε $y\in[c,d]$ η συνάρτηση, $f_y:x\in[a,b]\to f(x,y)$ είναι αύξουσα και ότι για κάθε $x\in[a,b]$ η συνάρτηση, $f_x:y\in[c,d]\to f(x,y)$ είναι επίσης αύξουσα. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\Re$.

3)Ορίζουμε μια συνάρτηση f στο τετράγωνο $Q=[0,1]\times[0,1]$ ως εξής:

$$f(x,y)=\begin{cases}0\text{ , αν είτε ο } x \text{ ή ο } y \text{ είναι άρρητος}\\ \dfrac{1}{n}\text{, αν ο } y \text{ είναι ρητός και } x=\dfrac{m}{n}\text{, όπου } m \text{ και } n \text{ είναι σχετικά πρώτοι θετικοί ακέραιοι}\end{cases}$$

Αποδείξτε ότι, $\int\limits_0^1 f(x,y)dx=\int\limits_0^1\left[\int\limits_0^1 f(x,y)dx\right]dy=\int\limits_Q f(x,y)dxdy=0$, όμως ότι το $\int\limits_0^1 f(x,y)dy$ δεν υπάρχει αν ο x είναι ρητός.

4)Υπολογίστε τα ολοκληρώματα: στο $\Re=[0,1]\times[0,1]$

(α) $\int\limits_{\Re} x^m\cdot y^n dxdy$ όταν $m,n\in N$

(β) $\int\limits_{\Re}(ax+by+c)dxdy$

(γ) $\int\limits_{\Re}\sin(x+y)dxdy$.

Καθώς και τα ολοκληρώματα στο $Q=[0,\pi]\times[0,\pi]$

(δ) $\int\limits_Q \sin^2 x\cdot\sin^2 ydxdy$

(ε) $\int\limits_Q |\cos(x+y)|dxdy$.

(*) 5)Έστω $f:Q\to R$ συνεχής , όπου $Q=[a,b]\times[c,d]$. Για κάθε εσωτερικό σημείο (x_1,x_2) του Q, ορίζουμε , $F(x_1,x_2)=\int_a^{x_1}\left(\int_c^{x_2} f(x,y)dy\right)dx$.

Αποδείξτε ότι: $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x_1,x_2)=\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x_1,x_2)=f(x_1,x_2)$ σε κάθε εσωτερικό σημείο (x_1,x_2) του Q.

Σκεφθείτε την σχέση του θεωρήματος Fubini με την ισότητα των μεικτών παραγώγων.

(*) 6) Έστω $\gamma:[a,b]\to R^n$ καμπύλη με μήκος. Θέτομε $[\gamma]=\{\gamma(t):t\in[a,b]\}$ δηλαδή $[\gamma]$ είναι το σύνολο τιμών ή <u>ίχνος</u> της γ. Αποδείξτε ότι το $[\gamma]$ είναι Jordan μετρήσιμο με $n-$ διάστατο περιεχόμενο μηδέν.