Παραδείγματα και εφαρμογές

1)Έστω D απλά συνεκτικός τόπος στο R^2 που φράσσεται από την (κατά τμήματα C^1) καμπύλη c. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν $\mathrm{A}(D)$ του D δίνεται από τους τύπους

$$\mathrm{A}(D)=\int_c xdy=-\int_c ydx$$

Απόδειξη (Ι) Αποδεικνύουμε πρώτα τον τύπο $\mathrm{A}(D)=\int_c xdy$. Εδώ έχουμε ότι, $(p,q)=(0,q)=(0,x)$. Συνεπώς από το θεώρημα του Green $\int_c pdx+qdy=\int_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy$. Άρα θα έχουμε

$$\int_c xdy=\int_D\left(\frac{\partial(x)}{\partial x}-\frac{\partial(0)}{\partial y}\right)dxdy=\int_D dxdy=\mathrm{A}(D).$$

(ΙΙ) Για τον τύπο $\mathrm{A}(D)=-\int_c ydx$, παρατηρούμε ότι $(p,q)=(p,0)=(-y,0)$. Από το θεώρημα του Green λαμβάνουμε

$$\int_c(-y)dx=-\int_c ydx=\int_D\left(\frac{\partial(0)}{\partial x}-\frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)dxdy=\int_D dxdy=\mathrm{A}(D)$$

2) Έστω D τετράγωνο και c η (θετικά προσανατολισμένη) περίμετρος του D. Αποδείξτε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c xy^2dx+\left(x^2y+2x\right)dy$, εξαρτάται μόνο από την πλευρά του τετραγώνου και όχι από την θέση του στο xy επίπεδο.

Λύση Έστω $p(x,y)=xy^2$, $q(x,y)=x^2y+2x$. Παρατηρούμε ότι οι p,q είναι C^1 συναρτήσεις (ως πολυωνυμικές) και $\frac{\partial p}{\partial y}=2xy, \frac{\partial q}{\partial x}=2xy+2$.

Από το θεώρημα του Green λαμβάνουμε

$$\int_c pdx+qdy=\int_c xy^2dx+\left(x^2y+2x\right)dy=\int_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=\int_D 2dxdy$$

$$=2\int_D dxdy=2\mathrm{A}(D).$$

Έπεται ότι δεν έχει σημασία η θέση του τετραγώνου στο $xy-$επίπεδο αλλά το εμβαδόν του, ισοδύναμα η πλευρά του.

Παρατήρηση Αν c είναι κλειστή απλή (κατά τμήματα C^1) καμπύλη του επιπέδου τότε πρέπει να είναι σαφές ότι αν D είναι το εσωτερικό της c, θα ισχύει $\mathrm{A}(D)=\frac{1}{2}\int_c xy^2dx+\left(x^2y+2x\right)dy$, δηλαδή έχουμε έναν ακόμη τύπο για την εύρεση του εμβαδού του εσωτερικού καμπύλης.

Στην πραγματικότητα υπάρχει μια απειρία τέτοιων τύπων. Πράγματι αν F είναι ένα C^1 διανυσματικό πεδίο $F:R^2\to R^2$ με $F=(p,q)$, ώστε $\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=k\neq 0$

(k σταθερά) τότε, $\mathrm{A}(D)=\frac{1}{k}\int_c pdx+qdy$, για κάθε κλειστή απλή καμπύλη c του R^2. (Αν $\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=0$, τότε από το θεώρημα 23.3 το διανυσματικό πεδίο F είναι συντηρητικό.)

3) Έστω c απλή κλειστή καμπύλη του επιπέδου να υπολογιστούν τα επικαμπύλια ολοκληρώματα $\int_c 4x^3ydx+x^4dy$, $\int_c -y^3dy+x^3dx$

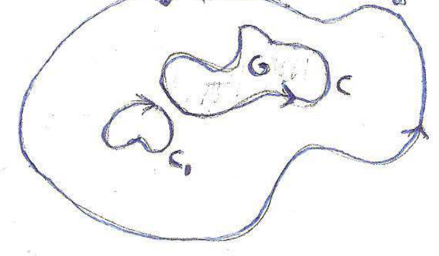
Λύση Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι αν, $p(x,y)=4x^3y$ και $q(x,y)=x^4$ τότε $\frac{\partial p}{\partial y}=4x^3=\frac{\partial q}{\partial x}$, επομένως το διανυσματικό πεδίο (p,q) είναι συντηρητικό στο R^2 και συνεπώς το δοθέν ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν.
Για το δεύτερο ολοκλήρωμα, θέτομε $p(x,y)=x^3$ και $q(x,y)=-y^3$. Επομένως $\frac{\partial p}{\partial y}=0=\frac{\partial q}{\partial x}$, έτσι το διανυσματικό πεδίο (p,q) είναι συντηρητικό στο R^2 και το ολοκλήρωμα ισούται πάλι με μηδέν.

4) Μια συνάρτηση $f:D\subseteq R^2\to R$, όπου D ανοικτό σύνολο, λέγεται <u>αρμονική</u> στο D, αν είναι C^2 και ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. Έστω c απλή κλειστή καμπύλη του R^2, με εσωτερικό το D και f αρμονική συνάρτηση σε μια περιοχή του $\overline{D}$. Αποδείξτε ότι $\int_c \frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy=0$.

Λύση Έστω $p=\frac{\partial f}{\partial y}$ και $q=-\frac{\partial f}{\partial x}$, τότε οι p και q είναι C^1 σε μια περιοχή του $\overline{D}$ και το θεώρημα του Green μπορεί να εφαρμοσθεί. Έτσι έχουμε: $\int_c pdx+qdy=\int_c \frac{\partial f}{\partial y}dx-\frac{\partial f}{\partial x}dy=\iint_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)dxdy=0$.

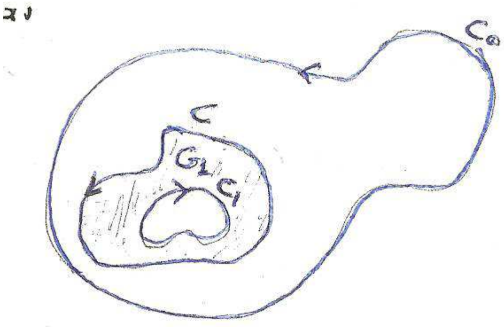
5) Έστω D φραγμένος τόπος του R^2, ο οποίος φράσσεται από δύο καμπύλες Jordan. Έστω ακόμη c μια καμπύλη Jordan στον D ($c\subseteq D$). Αν $F=(p,q)$ είναι C^1 διανυσματικό πεδίο στον D με $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$, πόσες διαφορετικές τιμές μπορεί να λάβει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_c pdx+qdy$;

<u>Λύση</u> Το D είναι ένας τόπος του R^2 που φράσσεται από δύο (κατά τμήματα C^1) καμπύλες Jordan, c_0 (εξωτερική) και c_1 (εσωτερική). Επομένως έχει μία «τρύπα».



Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.
(Ι) Η καμπύλη c δεν περιβάλλει την «τρύπα». Στην περίπτωση αυτή και επειδή το πεδίο F είναι συντηρητικό σε μια περιοχή του $\overline{G}$, όπου G το

εσωτερικό της c, έπεται από το θεώρημα του Green ότι $\mathrm{I}=\int_{c} pdx+qdy=\int_{G}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=0$.



(ΙΙ) Έστω ότι η καμπύλη c περιβάλλει την «τρύπα». Έστω G_1 ο τόπος που φράσσεται από τις καμπύλες c και c_1.

(α) Υποθέτουμε ότι η c είναι θετικά προσανατολισμένη. Τότε εφαρμόζουμε το θεώρημα του Green στον τόπο G_1 και έχουμε: $(\partial G_1=c-c_1)$

$$\int_{c-c_1} pdx+qdy=\int_{G_1}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{I}=\int_{c} pdx+qdy=\int_{c_1} pdx+qdy .$$

(β) Υποθέτουμε ότι η c είναι αρνητικά προσανατολισμένη. Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε την αντίθετη καμπύλη $-c$ της c και εφαρμόζουμε πάλι όπως προηγουμένως το θεώρημα του Green στον τόπο G_1, παρατηρώντας ότι, $\partial G_1=-c-c_1$.

Επομένως

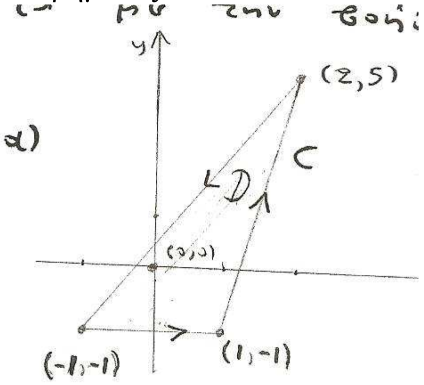
$$\int_{-c-c_1} pdx+qdy=\int_{G_1}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=0 \Rightarrow -\int_{c} pdx+qdy-\int_{c_1} pdx+qdy=0 \Rightarrow$$

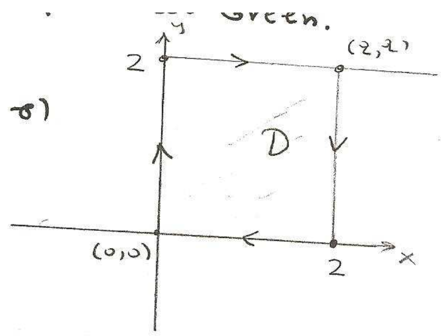
$$\mathrm{I}=\int_{c} pdx+qdy=-\int_{c_1} pdx+qdy .$$

Άρα στην περίπτωση που η c είναι αρνητικά προσανατολισμένη το $\int_{c} pdx+qdy$ λαμβάνει την αντίθετη της προηγούμενης τιμής.

Επομένως υπάρχουν τρεις πιθανές τιμές για το ζητούμενο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

6) Υπολογίστε τα ακόλουθα επικαμπύλια ολοκληρώματα με την βοήθεια του θεωρήματος του Green.





$$\int_{c} x\sin x dx-e^{y^2}dy$$

$$\int_{c} 2x\tau o\xi\varepsilon\varphi y dx-\frac{x^2y^2}{1+y^2}dy$$

Λύση (α) Έστω $p(x,y)=x\sin x$ και $q(x,y)=-e^{y^2}$ τότε έχουμε

$$\int_c x\sin xdx-e^{y^2}dy=\int_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=\int_D 0dxdy=0$$

(β) Έστω $p(x,y)=2x\tau o\xi\varepsilon\varphi y$ και $q(x,y)=-\dfrac{x^2y^2}{1+y^2}$ (υπενθυμίζουμε ότι $\tau o\xi\varepsilon\varphi:R\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και $\tau o\xi\varepsilon\varphi y=x\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ και $\varepsilon\varphi x=y$. Επίσης ότι, $\tau o\xi'\varepsilon\varphi y=\dfrac{1}{1+y^2}$, $y\in R$ η παράγωγος της $\tau o\xi\varepsilon\varphi y$)

Επειδή η c είναι αρνητικά προσανατολισμένη απλή κλειστή καμπύλη και το διανυσματικό πεδίο (p,q) είναι C^1 στο R^2, το θεώρημα του Green εφαρμόζεται:

$$\int_c 2x\tau o\xi\varepsilon\varphi ydx-\frac{x^2y^2}{1+y^2}dy=-\int_D\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2y^2}{1+y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(2x\tau o\xi\varepsilon\varphi y\right)\right)dxdy=$$

$$-\int_0^2\left(\int_0^2\left[-\frac{2xy^2}{1+y^2}-\frac{2x}{1+y^2}\right]dx\right)dy=-\int_0^2\left[\left(\frac{-y^2-1}{1+y^2}\right)x^2\right]_0^2dy=\int_0^2\left[x^2\right]_0^2dy=\int_0^2 4dy=8$$

(Απευθείας εφαρμογή του θεωρήματος Fubini στο τετράγωνο D).

7) Έστω D φραγμένος τόπος του R^2 με κατά τμήματα ομαλό σύνορο ∂D (το οποίο προσανατολίζεται θετικά).

(α) Αν $f,g:R\to R$ είναι C^1 συναρτήσεις να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_{\partial D} f(x)dx+g(y)dy$

(β) Αν k και h είναι πραγματικές σταθερές να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_{\partial D} kydx+hxdy$

Λύση (α) Οι συναρτήσεις $p(x,y)=f(x)$ και $q(x,y)=g(y)$, $(x,y)\in R^2$ είναι C^1 στο R^2 και $\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial q}{\partial x}=0$ στο R^2. Δηλαδή το διανυσματικό πεδίο, $F=(p,q)=(f,g)\Leftrightarrow F(x,y)=(f(x),g(y))$ είναι συντηρητικό στο R^2. Έπεται αμέσως από το θεώρημα του Green ότι $\mathrm{I}=0$

(β) Έστω $p(x,y)=ky$ και $q(x,y)=hx,(x,y)\in R^2$. Οι συναρτήσεις p και q είναι C^1 στο R^2 και το θεώρημα του Green εφαρμόζεται:

$$\int_{\partial D} kydx+hxdy=\int_D\left(\frac{\partial(hx)}{\partial x}-\frac{\partial(ky)}{\partial y}\right)dxdy=\int_D(h-k)dxdy=(h-k)\cdot\mathrm{A}(D).$$

(*) 8) Έστω $D = R^2 - \left(\left(-\infty, 0\right] \times \{0\}\right)$. Ορίζουμε την συνάρτηση $f(x,y) = \left(\log\sqrt{x^2+y^2}, \arg(x,y)\right), (x,y) \in D$, όπου $\arg(x,y) = 2\tau o\xi\varepsilon\varphi \dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι ολόμορφη στο D. (Υπενθυμίζουμε ότι η γωνία $\arg(x,y) \in (-\pi, \pi)$ για $(x,y) \in D$ είναι το πρωτεύον όρισμα του $(x,y) = x+iy$. Δες και την παρατήρηση (2) μετά τον Ορισμό 24.4. Για τον ορισμό της ολόμορφης συνάρτησης, δες την εφαρμογή 4 μετά το Θεωρημα 23.3 .)

Λύση Επειδή οι $u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ και $v(x,y) = \arg(x,y)$ είναι C^1 συναρτήσεις στο D, είναι αρκετό να αποδείξουμε τις εξισώσεις Cauchy-Riemann στο D.

Δηλαδή, θέτοντας $u = \log\sqrt{x^2+y^2}$ και $v = \arg(x,y)$ τότε, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Πράγματι,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$\dfrac{x}{x^2+y^2}$. Αντικαθιστώντας το x με το y βρίσκουμε $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \arg}{\partial x} = 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad (1)$$

Έπεται ότι

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau o\xi\varepsilon\varphi \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right) =$$

$$\frac{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + y^2} \cdot \left(-y\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\right) = -y\frac{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + y^2}.$$

Παρατηρούμε ότι: $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right) = 1 + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Επομένως,

$$\frac{\partial}{\partial x}\arg = -y \cdot \frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + y^2} = -y \cdot \frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 + y^2\right)} \quad (2)$$

Κάνουμε τώρα πράξεις στον παρανομαστή αυτής της συνάρτησης:
$$\sqrt{x^2+y^2}\left(\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2+y^2\right)=\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+x^2+y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}+y^2\right)=$$
$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(2x^2+2y^2+2x\sqrt{x^2+y^2}\right)=2\left[\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}+x\left(x^2+y^2\right)\right]=$$
$$2\left(x^2+y^2\right)\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad (3)$$
Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) (και εν συνεχεία στην (1)) βρίσκουμε $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial \arg}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$. Αναλόγως, υπολογίζουμε $\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \arg}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$. Έπεται ότι οι εξισώσεις Cauchy-Riemann ισχύουν και η συνάρτηση f είναι ολόμορφη στον τόπο D.

9) Έστω $f:R^2\to R^2: f\left(x,y\right)=e^x\left(\cos y,\sin y\right),\quad \left(x,y\right)\in R^2$. Τότε η f είναι ολόμορφη στο R^2 και συνεπώς τα διανυσματικά πεδία $g\left(x,y\right)=e^x\left(\sin y,\cos y\right)$ και $\overline{f}\left(x,y\right)=e^x\left(\cos y,-\sin y\right)$ είναι συντηρητικά στο R^2 (πρβλ. και εφαρμογή 4 σελίδα 244).

Λύση Οι συνιστώσες $u\left(x,y\right)=e^x\cos y$ και $v\left(x,y\right)=e^x\sin y$ είναι προφανώς C^1 στο R^2. Αρκεί να εξακριβώσουμε τις εξισώσεις Cauchy-Riemann στο R^2 για τις u και v.
$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\cos y\right)=e^x\cos y=\frac{\partial\left(e^x\sin y\right)}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\cos y\right)=-e^x\sin y=-\frac{\partial}{\partial x}\left(e^x\sin y\right)=-\frac{\partial v}{\partial x}$$
Επομένως οι εξισώσεις Cauchy-Riemann ισχύουν και η f είναι ολόμορφη στο R^2.

10) Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $F=\left(20x^3z+2y^2,4xy,5x^4+3z^2\right)$ είναι συντηρητικό στο R^3 και βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το F.

Λύση Το F είναι C^1 διανυσματικό πεδίο στο R^3 αφού οι συνιστώσες του είναι C^1 στο R. Σύμφωνα με την παρατήρηση 25.5.1- και εφόσον το R^3 είναι απλά συνεκτικό σύνολο- για να αποδείξουμε ότι το F είναι συντηρητικό (πρέπει και) αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι αστρόβιλο. Έτσι έχουμε
$$curlF=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 20x^3z+2y^2 & 4xy & 5x^4+3z^2 \end{vmatrix}=\left(0-0\right)i-\left(20x^3-20x^3\right)j+\left(4y-4y\right)k=0$$
Επομένως το F είναι αστρόβιλο και άρα συντηρητικό. Έστω $f:R^3\to R$ μια συνάρτηση δυναμικού για το πεδίο F, άρα
$$\frac{\partial f}{\partial x}=20x^3z+2y^2,\frac{\partial f}{\partial y}=4xy,\frac{\partial f}{\partial z}=5x^4+3z^2$$
Ολοκληρώνοντας την πρώτη εξίσωση ως προς x (και κρατώντας τα y και z σταθερά) βρίσκουμε

$f(x,y,z)=\int\left(20x^3z+2y^2\right)dx=5x^4z+2xy^2+g(z,y)$ (1) όπου η $g(y,z)$ είναι σταθερή ως προς την ολοκλήρωση ως προς x.

Επειδή $\frac{\partial f}{\partial y}=4xy$ διαφορίζοντας την παραπάνω έκφραση της f ως προς y βρίσκουμε $4xy+\frac{\partial g}{\partial y}=4xy$. Επομένως, $\frac{\partial g}{\partial y}=0$ και $g(y,z)=h(z)$ (2) όπου η $h(z)$ είναι σταθερή ως προς την ολοκλήρωση ως προς x και y.

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι, $f(x,y,z)=5x^4z+2xy^2+h(z)$ (3)

Διαφορίζοντας την (3) ως προς z και εξισώνοντας με την $\frac{\partial f}{\partial z}=5x^4+3z^2$ βρίσκουμε ότι $5x^4+h'(z)=5x^4+3z^2$ ή $h'(z)=3z^2$ ή $h(z)=3\int z^2dz=z^3+c$.

Έπεται ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $f(x,y,z)=5x^4z+2xy^2+z^3+c$ όπου c πραγματική σταθερά είναι μια συνάρτηση δυναμικού για την F.

Ασκήσεις

(1)Υπολογίστε το $divF$ και το $curlF$ για κάθε διανυσματικό πεδίο στο δοσμένο σημείο.
(α) $F(x,y,z)=i+j+k$ στο $(2,-1,3)$, (β) $F(x,y,z)=\left(e^{-x}\sin y\right)i+\left(e^{-x}\cos y\right)j+k$ στο $(1,3,-2)$, (γ) $F(x,y,z)=e^{-xy}i+e^{xz}j+e^{yz}k$ στο $(3,2,0)$.

2)Βρείτε το $divF$ και το $curlF$ για το καθένα από τα διανυσματικά πεδία:
(α) $F=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}i+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}j$, (β) $F=\left(e^x\sin y\right)i+\left(e^x\cos y\right)j+k$,
(γ) $F=xyzi+x^2y^2z^2j+y^2z^3k$, (δ) $F=\frac{xi+yj+zk}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

3)Ελέγξτε ποια από τα ακόλουθα διανυσματικά πεδία είναι συντηρητικά και οποτεδήποτε είναι βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού: (α) $F=\left(y^2,2xy\right)$,
(β) $F=\left(2xy^3,3x^2y^2\right)$, (γ) $F=\left(-y+e^x\sin y,(x+2)e^x\cos y\right)$,
(δ) $F=\left(y-x^2,2x+y^2\right)$, (ε) $F=\left(e^{2x}\sin y,e^{2x}\cos y\right)$.

4)Ένα πεδίο δυνάμεων $F(x,y)=\left(3x^2+6xy^2\right)i+\left(6x^2y+4y^2\right)k$ μετακινεί ένα αντικείμενο στο xy επίπεδο. Δείξτε ότι το F είναι συντηρητικό και βρείτε μια συνάρτηση δυναμικού για το F. Υπολογίστε το έργο που παράγεται όταν το αντικείμενο μετακινείται από το $(1,0)$ στο $(0,1)$ πάνω σε οποιαδήποτε καμπύλη που συνδέει αυτά τα σημεία.

5) Υπολογίστε με την βοήθεια του θεωρήματος του Green τα ακόλουθα επικαμπύλια ολοκληρώματα και εν συνεχεία ελέγξτε τα αποτελέσματα με απ' ευθείας υπολογισμό αυτών των ολοκληρωμάτων αφού παραμετρικοποιήσετε τις καμπύλες

(α) $\int_c y^2dx + x^2dy$, όπου c είναι η περίμετρος του τετραγώνου με κορυφές τα $(1,0),(1,1),(0,1),(0,0)$

(β) $\int_c y^3dx - x^3dy$, όπου $c = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$

(γ) $\int_c 4ydx - 3xdy$, όπου c είναι η έλλειψη $\{(x,y) : 2x^2 + y^2 = 4\}$

(δ) $\int_c x\sin xdx - e^{y^2}dy$, όπου c είναι το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1,-1),(2,5),(-1,-1)$

(ε) $\int_c 2x\tau o\xi\varepsilon\varphi ydx - \frac{x^2y^2}{1+y^2}dy$, όπου c είναι η περίμετρος του τετραγώνου με κορυφές τα $(0,0),(2,0),(2,2)$ και $(0,2)$.

6)Υπολογίστε, χρησιμοποιώντας έναν από τους τύπους για τον υπολογισμό εμβαδού που προκύπτουν από το θεώρημα του Green, τα εμβαδά των ακόλουθων χωρίων:

(α) Του δίσκου $\mathrm{B}(a,r)$, όπου $a \in R^2$ και $r > 0$

(β) Του τριγώνου με κορυφές τα $(0,0),(1,1)$ και $(0,2)$.

(γ) Του τραπεζίου με κορυφές $(0,0),(4,0),(1,3)$ και $(0,3)$.

(δ) Του ημιδίσκου που περιβάλλει το ημικύκλιο $y = \sqrt{4-x^2}$.

7)Αν c είναι καμπύλη Jordan, αποδείξτε ότι , $\int_c (x-3y)dx + (2x-y^2)dy = 5\mathrm{A}$ όπου Α είναι το εμβαδόν του χωρίου που περιβάλλει η c.

8) Υπολογίστε τα επικαμπύλια ολοκληρώματα:

(α) $\int_c \frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$, όταν η c είναι θετικά προσανατολισμένη καμπύλη Jordan στο εσωτερικό της οποίας δεν περιέχεται το σημείο $(0,0)$ και κατόπιν όταν το $(0,0)$ περιέχεται στο εσωτερικό της.

(β) $\int_c \frac{-ydx+(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$, όπου c είναι θετικά προσανατολισμένη καμπύλη Jordan στο εσωτερικό της οποίας δεν ανήκει το σημείο $(1,0)$.

(γ) $\int_c \frac{-(y+2)dx+(x-1)dy}{(x-1)^2+(y+2)^2}$, όπου c είναι θετικά προσανατολισμένη καμπύλη Jordan στο εσωτερικό της οποίας δεν ανήκει το σημείο $(1,-2)$.

9) Για ποια απλή κλειστή θετικά προσανατολισμένη καμπύλη c το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_c y^3dx + (3x-x^3)dy$ λαμβάνει την μέγιστη τιμή του;

10) Έστω $D \subseteq R^2$ ανοικτό και $f:(u,v):D \to R^2$ C^1 συνάρτηση, αποδείξτε ότι:

(ι) η f είναι ολόμορφη (δηλαδή ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$) αν και μόνο αν τα διανυσματικά πεδία $g=(v,u)$ και $\widetilde{f}=(u,-v)$ είναι αστρόβιλα. Αν επί πλέον το D είναι απλά συνεκτικό τότε η f είναι ολόμορφη αν και μόνο αν τα g και $\widetilde{f}$ είναι συντηρητικά.

(ιι) Συμπεράνατε από το (ι) ότι τα διανυσματικά πεδία $F(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$ και $G(x,y)=\left(\frac{x}{x^2+y^2},-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ είναι αστρόβιλα στο $D=R^2-\{(0,0)\}$.

(ιιι) Αν η f είναι ολόμορφη τότε οι u και v είναι αρμονικές στο D.

11) Έστω D απλό πολύγωνο του επιπέδου, δηλαδή το εσωτερικό μιας απλής κλειστής πολυγωνικής γραμμής. Αποδείξτε ότι το D μπορεί να χωρισθεί σε τρίγωνα χρησιμοποιώντας τις διαγωνίους του.

[Υπόδειξη Έστω ότι το D έχει n κορυφές $(n \geq 4)$. Αν το D είναι κυρτό θεωρούμε μια κορυφή P του D και φέρουμε $n-3$ διαγωνίους από το P, μια σε κάθε κορυφή η οποία είναι διαφορετική και μη διαδοχική με την P. Αν το D είναι μη κυρτό, προχωρούμε με επαγωγή στο n. Θεωρούμε μια κορυφή P του D ώστε η γωνία του D με κορυφή το P να είναι μη κυρτή (δηλαδή μεγαλύτερη του π). Δείξτε ότι υπάρχει κορυφή Q του D ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[P,Q]$ (εκτός των άκρων P,Q) να περιέχεται στο D. Έτσι το D χωρίζεται με την διαγώνιο $[P,Q]$ σε δύο απλά πολύγωνα D_1, D_2 με λιγότερες κορυφές από το D. Τα πολύγωνα D_1, D_2 μπορούν να χωρισθούν σε τρίγωνα από την επαγωγική υπόθεση.]