Το θεώρημα του Green

Υπενθυμίζουμε ότι μια απλή κλειστή καμπύλη $\sigma:[a,b]\to R^2$ είναι μια κλειστή καμπύλη ($\sigma(a)=\sigma(b)$) ώστε ο περιορισμός $\sigma|[a,b)$ να είναι $1-1$ απεικόνιση.

Μια απλή κλειστή καμπύλη του επιπέδου ονομάζεται και καμπύλη Jordan.

Είναι ένα βαθύ τοπολογικό θεώρημα που ανήκει στον Jordan ότι:

Κάθε απλή κλειστή καμπύλη σ του επιπέδου αποσυνδέει το επίπεδο, δηλαδή το σύνολο $R^2-[\sigma]$ είναι ένωση δύο ξένων ανοικτών και συνεκτικών συνόλων A και B ώστε το ένα είναι φραγμένο και το άλλο μη φραγμένο. Το φραγμένο σύνολο ονομάζεται και εσωτερικό και το μη φραγμένο εξωτερικό της καμπύλης.

Ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του R^2 ονομάζεται και χωρίο Jordan αν είναι το εσωτερικό μιας καμπύλης Jordan του επιπέδου. Είναι βέβαια σαφές ότι ένα χωρίο Jordan είναι απλά συνεκτικό (δηλαδή δεν έχει τρύπες).

Υπενθυμίζουμε ότι όλες οι καμπύλες που θεωρούμε (ειδικότερα σε σχέση με επικαμπύλια ολοκληρώματα) είναι κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμες.

Ένα ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο $D\subseteq R^2$ θα λέμε ότι έχει κατά τμήματα ομαλό σύνορο, αν το σύνορο του ∂D αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος απλές κλειστές καμπύλες οι οποίες είναι ξένες ανά δύο. Στην περίπτωση που το D είναι επί πλέον συνεκτικό το σύνορο του D αποτελείται από μια εξωτερική καμπύλη c_0 και κάποιες εσωτερικές καμπύλες $c_1,c_2,...,c_N$ ($\partial D=c_0\cup c_1\cup...\cup c_N$). Όταν ολοκληρώνουμε μια συνάρτηση πάνω στο σύνορο ∂D του D οι εσωτερικές καμπύλες $c_1,c_2,...,c_N$ προσανατολίζονται αρνητικά και η εξωτερική καμπύλη c_0 προσανατολίζεται θετικά (αντιωρολογιακά), δηλαδή ούτως ώστε να αφήνουν το σύνολο D στα αριστερά των.

Η σύμβαση αυτή δηλώνεται συμβολικά γράφοντας $\partial D=c_0-c_1-c_2-...-c_N$ υπονοώντας με τον τρόπο αυτό τον τρόπο που γίνεται η ολοκλήρωση επί του ∂D.

Παρατήρηση Με διαφορετική ορολογία ένα φραγμένο ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του επιπέδου με κατά τμήματα ομαλό σύνορο είναι ένα ανοικτό και συνεκτικό πολλαπλά συνεκτικό υποσύνολο του R^2 του οποίου το σύνορο αποτελείται από ένα πεπερασμένο σύνολο καμπύλων Jordan. Δηλαδή ένα ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο του R^2 που φράσσεται από ένα πεπερασμένο σύνολο καμπύλων Jordan.

Διαισθητικά ένας τόπος του R^2 (ανοικτό και συνεκτικό σύνολο) είναι πολλαπλά συνεκτικός αν έχει ένα πεπερασμένο αριθμό από τρύπες. Έτσι διακρίνουμε τους πολλαπλά συνεκτικούς τόπους σε τόπους συνεκτικότητας n, $n\geq 1$, αν έχουν $n-1$ αριθμό από τρύπες

Τόπος συνεκτικότητας 4

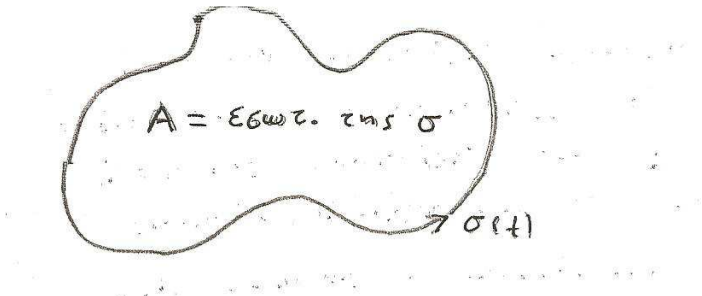
Τόπος συνεκτικότητας 5

Τόπος συνεκτικότητας 1

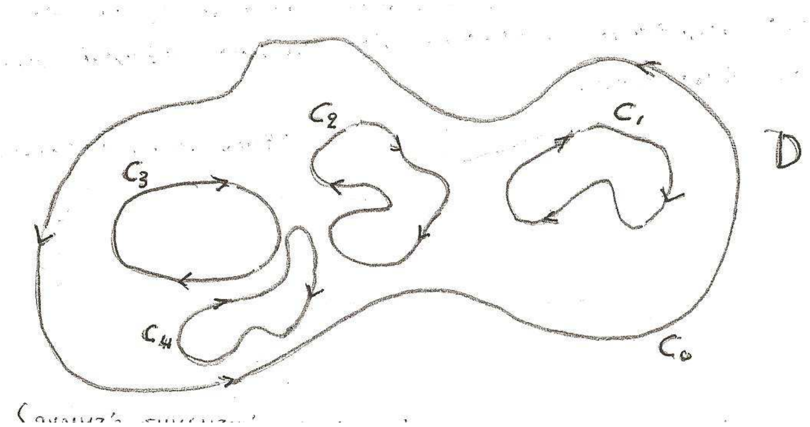
δηλ. απλά συνεκτικός

Παραδείγματα

$\sigma(a)=\sigma(b)$ B= εξωτερικό της σ



$\sigma:[a,b]\to R^2$ καμπύλη Jordan



Ένα ανοικτό συνεκτικό και φραγμένο σύνολο με κατά τμήματα ομαλό σύνορο

Με τις παραπάνω συμβάσεις το θεώρημα του Green διατυπώνεται ως ακολούθως.

25.1 Θεώρημα (του Green). Έστω $D\subseteq R^2$ ένα ανοικτό συνεκτικό και φραγμένο σύνολο του οποίου το σύνορο ∂D είναι κατά τμήματα ομαλό.
Αν p και q είναι πραγματικές συναρτήσεις οι οποίες είναι ορισμένες και C^1 σε μια περιοχή του $\overline{D}$, τότε ισχύει ο τύπος:

$$\int_{\partial D}(pdx+qdy)=\int_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy\,.$$

Όπου, αν $\partial D=c_0-c_1-...-c_N$, τότε το αριστερό μέλος της παραπάνω ισότητας ισούται με $\int_{\partial D}(pdx+qdy)=\int_{c_0}(pdx+qdy)-\sum_{k=1}^{N}\int_{c_k}(pdx+qdy)$.

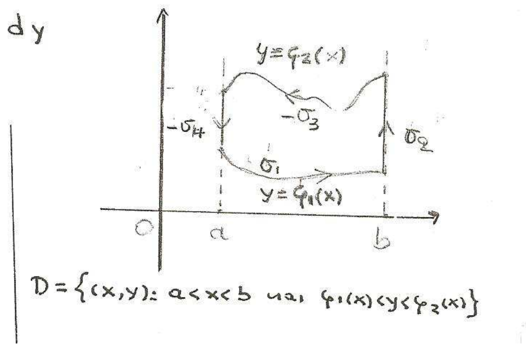
Δεν θα δώσουμε πλήρη απόδειξη του θεωρήματος του Green. Θα αποδείξουμε όμως τον αναλυτικό πυρήνα αυτού του σημαντικού αποτελέσματος ο οποίος εντοπίζεται στην περίπτωση που το D είναι ένα ανοικτό στοιχειώδες χωρίο . Ένα ανοικτό στοιχειώδες χωρίο είναι βέβαια απλά συνεκτικός τόπος που φράσσεται από μια καμπύλη Jordan.

25.2 Λήμμα Έστω $D \subseteq R^2$ ένα ανοικτό χωρίο τύπου 1 και ∂D το σύνορό του. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση p είναι C^1 σε μια περιοχή του $\overline{D}$. Τότε

$$\int_{\partial D} p dx = -\int_{D} \frac{\partial p}{\partial y} dxdy$$

(όπου $\int_{\partial D} p dx = \int_{\partial D} p dx + q dy$ με $q = 0$).

Απόδειξη:



Υποθέτουμε ότι το $\overline{D}$ περιγράφεται από τις σχέσεις $a \le x \le b$, $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, όπου $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to R$ είναι <u>C^1 συναρτήσεις</u> με $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ για κάθε $x \in (a,b)$.

Το σύνορο ∂D του D είναι μια θετικά προσανατολισμένη καμπύλη η οποία σύμφωνα με το σχήμα γράφεται ως $\partial D = \sigma_1 + \sigma_2 + (-\sigma_3) + (-\sigma_4)$ (το πρόσημο $-$ δηλώνει την αντίθετη καμπύλη) , όπου $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ είναι οι καμπύλες: $\sigma_1(t) = (t, \varphi_1(t))$, $t \in [a,b]$, $\sigma_2(t) = (b,t)$, $t \in [\varphi_1(b), \varphi_2(b)]$, $\sigma_3(t) = (t, \varphi_2(t))$, $t \in [a,b]$, $\sigma_4(t) = (a,t)$, $t \in [\varphi_1(a), \varphi_2(a)]$.

Από το θεώρημα του Fubini μπορούμε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα ως ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα και μετά να χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού:

$$(1) \quad \int_D \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial p}{\partial y}(x,y) dy \right) dx = \int_a^b \left[p(x, \varphi_2(x)) - p(x, \varphi_1(x)) \right] dx$$

Από την άλλη μεριά θα έχουμε: $\int_{\partial D} p dx = \int_{\sigma_1} p dx + \int_{\sigma_2} p dx - \int_{\sigma_3} p dx - \int_{\sigma_4} p dx$

Αφού το x είναι σταθερό πάνω στα ίχνη των καμπύλων σ_2 και σ_4 θα έχουμε $\int_{\sigma_2} p dx = \int_{\sigma_4} p dx = 0$.

Πράγματι, $\int_{\sigma_2} p dx = \int_{\varphi_1(b)}^{\varphi_2(b)} (p(b,t), 0) \cdot (0,1) dt = 0$, ομοίως $\int_{\sigma_4} p dx = 0$ (Η φυσική ερμηνεία του μηδενισμού αυτών των ολοκληρωμάτων είναι ότι αν π.χ. η $(p(x,y), 0)$ θεωρηθεί ως δύναμη που μετακινεί το σημείο εφαρμογής της κατά μήκος του κατακόρυφου ευθύγραμμου τμήματος $[(b, \varphi_1(b)), (b, \varphi_2(b))]$ τότε δεν παράγει έργο αφού είναι κάθετη σε αυτό.)

Επίσης θα έχουμε: $\int_{\sigma_1} p dx = \int_a^b (p(t, \varphi_1(t)), 0) \cdot (1, \varphi_1'(t)) dt = \int_a^b p(t, \varphi_1(t)) dt =$

$$\int_a^b p(x,\varphi_1(x))dx$$

$$\int_{\sigma_3} pdx = \int_a^b \left(p(t,\varphi_2(t)),0\right)\cdot\left(1,\varphi_2'(t)\right)dt = \int_a^b p(t,\varphi_2(t))dt = \int_a^b p(x,\varphi_2(x))dx\,.$$

Επομένως, (2)

$$\int_{\partial D} pdx = \int_a^b p(x,\varphi_1(x))dx - \int_a^b p(x,\varphi_2(x))dx = \int_a^b \left[p(x,\varphi_1(x)) - p(x,\varphi_2(x))\right]dx\,.$$

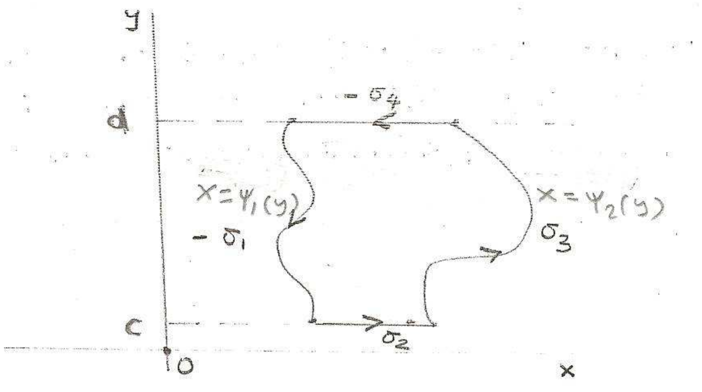
Έπεται από τις (1) και (2) ότι $\int_{\partial D} pdx = -\int_D \frac{\partial p}{\partial y}dxdy$.

Σημειώνουμε ότι μπορεί να αποδειχθεί και το ανάλογο του παραπάνω Λήμματος με τους ρόλους των x και y αντεστραμμένους.

25.3 Λήμμα Έστω D ένα ανοικτό χωρίο τύπου 2 με σύνορο το ∂D. Αν η συνάρτηση q είναι C^1 σε μια περιοχή του $\overline{D}$, τότε $\int_{\partial D} qdy = \int_D \frac{\partial q}{\partial x}dxdy$.

Η απόδειξη αυτού του Λήμματος είναι όμοια με την προηγούμενη και έτσι παραλείπεται. Σημειώνουμε μόνο ότι το αρνητικό πρόσημο απουσιάζει στην περίπτωση αυτή, εφόσον η αντιστροφή των ρόλων των x και y σημαίνει και αλλαγή του προσανατολισμού του επιπέδου.

Ένα παράδειγμα χωρίου τύπου 2 και η διάσπαση του θετικά προσανατολισμένου συνόρου του σε προσανατολισμένες επί μέρους καμπύλες.



$$D = \{(x,y): c < y < d \text{ και } \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$$

$$\sigma_1(t) = (\psi_1(t),t),\ t\in[c,d],\ \sigma_2(t) = (t,c),\ t\in[\psi_1(c),\psi_2(c)]$$

$$\sigma_3(t) = (\psi_2(t),t),\ t\in[c,d],\ \sigma_4(t) = (t,d),\ t\in[\psi_1(d),\psi_2(d)]$$

$$\partial D = -\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4$$

Από τα προηγούμενα 2 λήμματα λαμβάνομε αμέσως την ακόλουθη ειδική αλλά σημαντική περίπτωση του θεωρήματος του Green.

25.4 Πρόταση (Green) Έστω D ένα ανοικτό χωρίο <u>τύπου 3</u> και ∂D το σύνορό του. Υποθέτουμε ότι οι πραγματικές συναρτήσεις p και q είναι C^1 σε μια περιοχή του $\overline{D}$. Τότε $\int_{\partial D} pdx + qdy = \int_D \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dxdy$.

Παρατηρήσεις 1) Ο παραπάνω τύπος αποδεικνύεται με λίγο περισσότερη δουλειά και για στοιχειώδη χωρία που είναι είτε του τύπου 1 ή του τύπου 2. Περαιτέρω αποδεικνύεται – με μη τετριμμένα γεωμετρικά επιχειρήματα – ότι ένα ανοικτό συνεκτικό και φραγμένο σύνολο με κατά τμήματα ομαλό σύνορο (που είναι για εμάς η γενική περίπτωση του θεωρήματος του Green) διασπάται σε ένα πεπερασμένο πλήθος από στοιχειώδη χωρία $D_1, ..., D_m$, που το καθένα είναι είτε τύπου 1 είτε τύπου2 κατά τέτοιο τρόπο ώστε,

$$\left(\int_D = \sum_{k=1}^{m} \int_{D_k} \quad \text{και} \quad \int_{\partial D} = \sum_{k=1}^{m} \int_{\partial D_k} \right)$$

Το θεώρημα του Green εφαρμόζεται στο καθένα από τα D_k, $1 \le k \le m$ και ο τύπος του Green έπεται στην γενική περίπτωση προσθέτοντας τα αποτελέσματα. Σύμφωνα με την παρατήρηση 3 παρακάτω η διάσπαση του D αρκεί να γίνει στην περίπτωση που το D είναι χωρίο Jordan.

Οι παραπάνω δύο εξισώσεις αποδεικνύονται εύκολα (στην περίπτωση της διάσπασης του D σε στοιχειώδη χωρία $D_1, ..., D_m$).

Αρκεί να παρατηρήσουμε αν τα D_k και D_λ με $1 \le k < \lambda \le m$ έχουν ένα κοινό τμήμα στο σύνορό τους (τα εσωτερικά τους είναι βέβαια ξένα) τότε το τμήμα αυτό εμφανίζεται με διαφορετικό προσανατολισμό και απλοποιείται στο άθροισμα $\sum_{k=1}^{m} \int_{\partial D_k}$ (πρβλ και την παρατήρηση (3)).

2) Το θεώρημα του Green είναι πολύ σημαντικό εφόσον <u>συνδέει</u> ένα <u>επικαμπύλιο</u> ολοκλήρωμα (β΄ είδους) πάνω στο σύνορο ενός χωρίου του επιπέδου με ένα <u>διπλό ολοκλήρωμα</u> στο εσωτερικό του χωρίου. Σε πολλές περιπτώσεις είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα απ' ότι το διπλό ολοκλήρωμα.

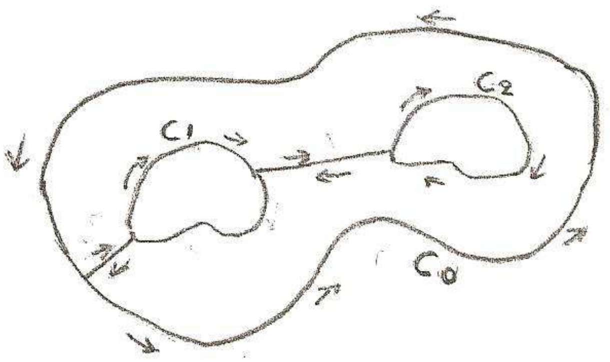
Το θεώρημα του Green θεωρείται και αυτό όπως και το θεώρημα 22.5 της σελίδας 227 ένα <u>ανάλογο</u> του <u>θεμελιώδους θεωρήματος</u> του Απειροστικού Λογισμού. Πράγματι αν $\mathrm{I} \subseteq R$ διάστημα, $a, b \in R$ με $a < b$ και $F : \mathrm{I} \to R$ C^1 συνάρτηση τότε όπως γνωρίζουμε $\int_a^b F'(t)dt = F(b) - F(a)$.

Εδώ το σύνορο του $D = [a, b]$ είναι το δισύνολο $\{a, b\}$.

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι αν και αποδείξαμε το θεώρημα του Green στην ειδική περίπτωση ενός στοιχειώδους χωρίου (τύπου 3), τα χωρία τα οποία εμφανίζονται στην πράξη είναι στις περισσότερες περιπτώσεις εύκολο να χωρισθούν σε στοιχειώδη χωρία ούτως ώστε να εφαρμόζεται η παρατήρηση (1).

3) Ιδιαίτερα το θεώρημα του Green ισχύει για ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο $D \subseteq R^2$ που φράσσεται από μια καμπύλη Jordan c_0, δηλαδή D είναι <u>χωρίο Jordan</u> και άρα απλά συνεκτικός τόπος.

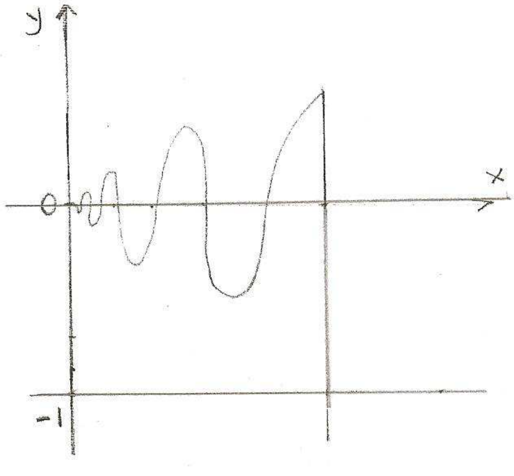
Αξίζει να σημειωθεί ότι η γενικότερη περίπτωση που το D είναι πολλαπλά συνεκτικός τόπος (που φράσσεται από πεπερασμένο πλήθος καμπύλων Jordan) <u>ανάγεται </u>στην περίπτωση του <u>απλά συνεκτικού</u> τόπου (που φράσσεται από μια καμπύλη Jordan).
Έτσι αν ο D είναι τόπος συνεκτικότητας n (με $n \geq 1$) τότε μπορούμε με $n-1$ «κοψίματα» (crosscuts) να το μετατρέψουμε σε απλά συνεκτικό τόπο. Τα κοψίματα αυτά μπορούν να επιλεγούν να είναι C^1 απλές καμπύλες . Το σχήμα εξηγεί γεωμετρικά πως μπορεί να γίνει αυτό.



Ένας τόπος συνεκτικότητας 3

Επειδή το πρόσημο του επικαμπυλίου ολοκληρώματος δευτέρου είδους αλλάζει όταν η κατεύθυνση της ολοκλήρωσης αλλάζει, έπεται ότι τα επικαμπύλια ολοκληρώματα πάνω στις καμπύλες που «κόβουν» το D αλληλοαναιρούνται. Έτσι τα μόνα ολοκληρώματα που «επιβιώνουν» είναι αυτά πάνω στο σύνορο του D, που στο σχήμα μας είναι το $\partial D = c_0 - c_1 - c_2$.
Είναι σαφές ότι αν εξαιρέσουμε από το D τα ίχνη των καμπύλων γ, δ, που «κόβουν» το D, τότε το $D - [\gamma] \cup [\delta]$ είναι απλά συνεκτικός τόπος .(Με n κοψίματα αναγόμαστε στην περίπτωση όπου το D χωρίζεται σε δυο απλά συνεκτικούς τόπους που φράσσονται από καμπύλες Jordan.) Σημειώνουμε ότι οι παρατηρήσεις αυτές μπορεί να οδηγήσουν σε μια απόδειξη του θεωρήματος του Green (θεώρημα 25.1), βασισμένη στην πρόταση 25.4, προσεγγίζοντας τον απλά συνεκτικό τόπο D(που φράσσεται από μια καμπύλη Jordan) με απλά συνεκτικούς τόπους που φράσσονται από απλές κλειστές πολυγωνικές γραμμές (πρβλ την άσκηση 11)

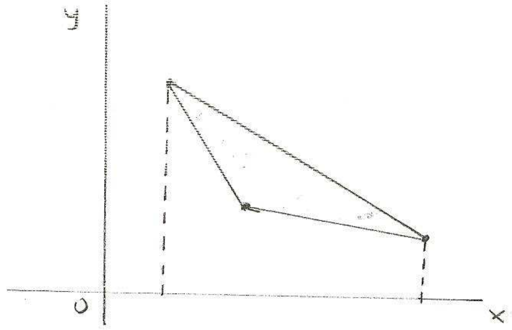
4) Ένα φραγμένο ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο του R^2 με κατά τμήματα ομαλό σύνορο <u>δεν</u> διασπάται αναγκαία σε ένα πεπερασμένο πλήθος από στοιχειώδη χωρία τύπου 3.
Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το ακόλουθο.

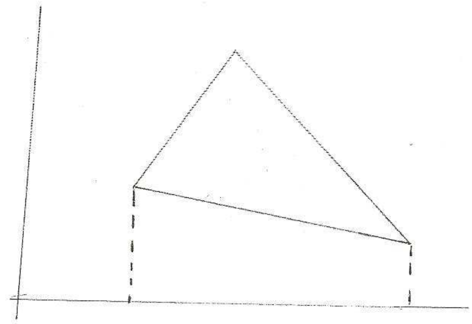


$\overline{D} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ και } -1 \leq y \leq \varphi(x)\}$
, όπου $\varphi(x) = x^3 \cdot \sin\frac{1}{x}, x \neq 0,\ \varphi(0) = 0$.
Η φ είναι βέβαια συνεχώς διαφορίσιμη στο R.
Το D είναι τύπου 1, αλλά δεν μπορεί να διαμερισθεί σε ένα πεπερασμένο πλήθος χωρίων τύπου 2 (συνεπώς ούτε και

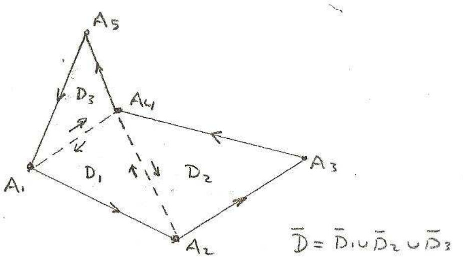
τύπου 3). Η παρατήρηση αυτή αφήνεται ως άσκηση.

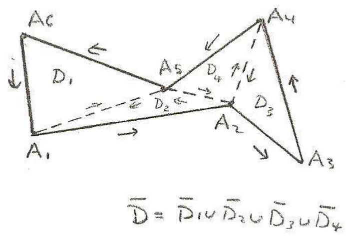
Παραδείγματα φραγμένων συνόλων με κατά τμήματα ομαλό σύνορο



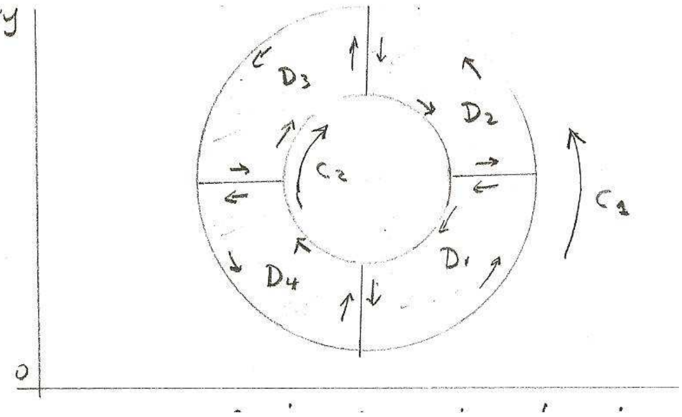


1)Το εσωτερικό ενός τριγώνου στο xy επίπεδο είναι ένα στοιχειώδες σύνολο τύπου 3.





2)Ένα απλό πολύγωνο του επιπέδου χωρίζεται σε τρίγωνα τα οποία είναι στοιχειώδη σύνολα τύπου 3. Οι προσανατολισμοί είναι σημειωμένοι στα σχήματα. (Πρβλ την άσκηση 11)



Το καθένα από τα χωρία D_1, D_2, D_3, D_4 που χωρίζεται ο δακτύλιος είναι τύπου 3.

3)Το χωρίο D είναι εδώ ένας (ανοικτός) δακτύλιος το σύνορο του οποίου αποτελείται από τους κύκλους C_1 και C_2, $\partial D = C_1 \bigcup C_2$. Ο χωρισμός του D σε στοιχειώδη χωρία γίνεται με δύο κάθετες ευθείες που διέρχονται από το κέντρο. Το θεώρημα Green εφαρμόζεται στο καθένα από τα D_1, D_2, D_3, D_4 και προσθέτουμε τα αποτελέσματα.

25.5 Πρόταση Έστω c μια απλή κλειστή καμπύλη του επιπέδου με εσωτερικό το

(απλά συνεκτικό) σύνολο D. Τότε το εμβαδόν του D(που έχει σύνορο την c) δίδεται από τον τύπο

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx$$

(δηλαδή $\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_{\partial D} F \cdot ds$, όπου $F(x,y) = (-y,x), \quad (x,y) \in R^2$).

Απόδειξη Θέτομε $F(x,y) = (-y,x) = \big(p(x,y), q(x,y)\big)$ δηλαδή θέτομε $p(x,y) = -y$ και $q(x,y) = x$. (Το F δεν είναι συντηρητικό πεδίο αφού $\frac{\partial p}{\partial y} = -1$ και $\frac{\partial q}{\partial x} = 1$)

Το θεώρημα του Green εφαρμόζεται γιατί το D είναι ένα φραγμένο ανοικτό απλά συνεκτικό σύνολο με σύνορο το οποίο υποτίθεται ότι είναι μια κατά τμήματα C^1 καμπύλη.

Έτσι έχουμε, $\frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{D}\left[\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right]dxdy = \frac{1}{2}\int_{D}(1+1)dxdy = \int_{D} dxdy = \mathrm{A}$.

Παρατήρηση. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $\mathrm{A} = \frac{1}{2i}\int_{\gamma} \bar{z}dz$, όπου με $\int_{\gamma} f(z)dz$ συμβολίζουμε το <u>μιγαδικό επικαμπύλιο</u> ολοκλήρωμα της $f : [\gamma] \to C$ κατά μήκος της γ. (Το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα χρησιμοποιείται στην Μιγαδική Ανάλυση).

Παράδειγμα (1) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την υποκυκλοειδή καμπύλη $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$, χρησιμοποιώντας την παραμέτρηση $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

<u>Λύση</u> Η καμπύλη μας είναι η $\sigma(\theta) = \left(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta\right), \theta \in [0, 2\pi]$ και είναι απλή και κλειστή όπως εύκολα διαπιστώνεται αναλυτικά αλλά και από το σχήμα. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\int_{\sigma} xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[a\cos^3\theta\left(3a\sin^2\theta\cos\theta\right) - a\sin^3\theta\left(-3a\cos^2\theta\sin\theta\right)\right]d\theta =$$

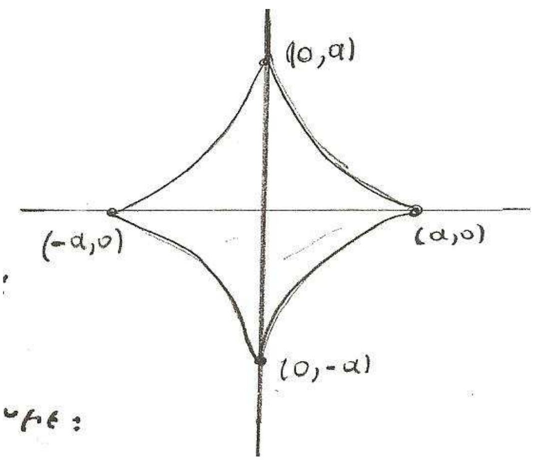
$$\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\left(\sin^2\theta\cos^4\theta + \cos^2\theta\sin^4\theta\right)d\theta =$$

$$\frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2\theta d\theta =$$

$$\frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 4\theta}{2}\right)d\theta$$

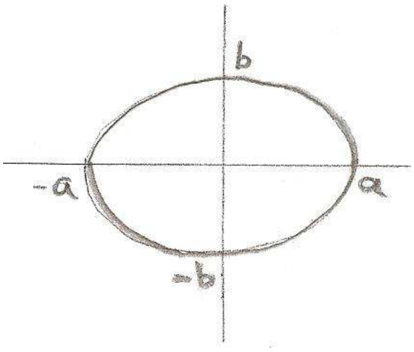
$$= \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi} d\theta - \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}\cos 4\theta d\theta$$

$$= \frac{3}{16}a^2 \cdot 2\pi - \frac{3}{16}a^2 \cdot 0 = \frac{3}{8}\pi a^2.$$



Παράδειγμα 2 Αποδείξτε ότι η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ έχει εμβαδόν πab ($a>0$ και $b>0$).

Λύση Η έλλειψη παραμετρικοποιείται ως, $\sigma(\theta)=(a\cos\theta, b\sin\theta), \theta\in[0,2\pi]$, δηλαδή $x(\theta)=a\cos\theta$ και $y(\theta)=b\sin\theta$. Επομένως



$$\mathrm{A}=\frac{1}{2}\int_\sigma(-ydx+xdy)=$$

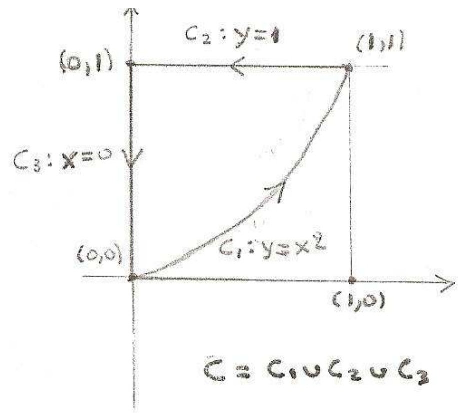
$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[-b\sin\theta(-a\sin\theta)+a\cos\theta(b\cos\theta)\right]d\theta=$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}abd\theta=\pi ab.$$

Σημειώνουμε ότι η $\sigma(\theta)=(a\cos\theta, b\sin\theta), \theta\in[0,2\pi]$ είναι C^1 απλή κλειστή καμπύλη.

Παράδειγμα 3 Υπολογίστε το έργο που παράγεται από το πεδίο δυνάμεων $F(x,y)=\left(x+xy^2, 2\left(x^2y-y^2\sin y\right)\right)$ κατά μήκος της κλειστής απλής καμπύλης c του σχήματος.

Λύση Το διανυσματικό πεδίο (δυνάμεων) $F=(p,q)$ είναι βέβαια C^1 στο R^2. Αν το D συμβολίζει το χωρίο (Jordan) που περιβάλλει η θετικά προσανατολισμένη καμπύλη Jordan c τότε από το θεώρημα του Green θα έχουμε ότι το έργο που μας ζητείται ισούται με:



$$W=\int_c F\cdot ds=\int_c pdx+qdy=\int_D\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=$$

$$\int_D\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y-2y^2\sin y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x+xy^2\right)\right]dxdy=$$

$$\int_D(4xy-2xy)\,dxdy=$$

$$2\int_0^1\left(\int_{x^2}^1 xydy\right)dx=2\int_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=x^2}^{y=1}dx$$

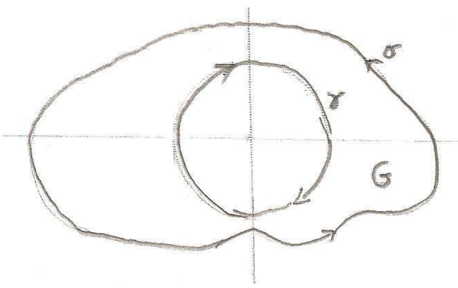
$$=\int_0^1\left(x-x^5\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^6\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

Σημειώνουμε ότι το χωρίο είναι τύπου 3 και μπορεί να περιγραφεί ως τύπου 1 ως εξής: $D=\left\{(x,y):0<x<1 \text{ και } x^2<y<1\right\}$.

Έχουμε αποδείξει για το διανυσματικό πεδίο $F(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\neq(0,0)$, ότι $\int_\sigma F\cdot ds=2\pi$, όπου $\sigma(t)=(\cos t,\sin t),t\in[0,2\pi]$, ο μοναδιαίος κύκλος με την συνήθη παραμέτρηση που τον καθιστά καμπύλη Jordan. Το επόμενο παράδειγμα γενικεύει αυτό το αποτέλεσμα. (Σύγκρινε αυτό το παράδειγμα και με την παρατήρηση της σελίδας 256)

Παράδειγμα 4 Έστω $\sigma:[a,b]\to R^2$ καμπύλη Jordan στο εσωτερικό της οποίας περιέχεται το $(0,0)$. Αν $F(x,y)=\left(\dfrac{-y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\neq(0,0)$ τότε ισχύει $$\int_\sigma F\cdot ds=2\pi .$$

Λύση



Έστω C_r ένας κύκλος κέντρου $(0,0)$ και αρκετά μικρή ακτίνα $r>0$, ώστε $C_r\subseteq D$, όπου D το εσωτερικό της καμπύλης σ. Θεωρούμε το χωρίο G του επιπέδου το οποίο περιβάλλεται (έχει ως σύνορο $\partial G=[\sigma]\cup C_r$) από τις καμπύλες $[\sigma]$ και C_r. Ο κύκλος C_r θεωρείται με την συνήθη παραμέτρηση $\gamma(t)=r(\cos t,\sin t),t\in[0,2\pi]$.

Επειδή το πεδίο F είναι όπως έχουμε αποδείξει αστρόβιλο ισχύει ότι: $\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\partial p}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)=\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}-\dfrac{y^2-x^2}{x^2+y^2}=0$ (όπου, $p(x,y)=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$ και $q(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$).

Έπεται από το θεώρημα του Green για τον τόπο G ότι: $\int_{\partial G}F\cdot ds=\int_{\partial G}pdx+qdy=\int_G\left(\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)dxdy=\int_G 0dxdy=0$ ή $\int_\sigma F\cdot ds+\int_{-\gamma}F\cdot ds=0$ ή $\int_\sigma F\cdot ds-\int_\gamma F\cdot ds=0$ ή $\int_\sigma F\cdot ds=\int_\gamma F\cdot ds=2\pi$.

<u>Σημείωση</u>. Ένα υποσύνολο D του R^n λέγεται <u>αστρόμορφο</u> αν υπάρχει $a\in D$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[a,z]\subseteq D,\forall z\in D$.

(ι) Κάθε αστρόμορφο σύνολο είναι συνεκτικό (πρβλ την απόδειξη της πρότασης 3.24 (ιι)).

(ιι) Κάθε κυρτό σύνολο είναι αστρόμορφο (προφανές).

(ιιι) Κάθε ανοικτό και αστρόμορφο υποσύνολο του R^2 είναι απλά συνεκτικό. (Διαισθητικά προφανές.)

(ιν) Παραδείγματα ανοικτών και αστρόμορφων (άρα απλά συνεκτικών) υποσυνόλων του R^2 που <u>δεν</u> είναι κυρτά είναι και τα ακόλουθα:

(α) Έστω L= $[z,\infty)$ κλειστή ημιευθεία του R^2 τότε το $D=R^2-[z,\infty)$ έχει την ιδιότητα.

(β) Έστω $\mathrm{B}(a,r)$ ανοικτός δίσκος του R^2. Αν $z \in \mathrm{B}(a,r)$ και L είναι κλειστή ημιευθεία του επιπεδου με αρχή το z , τότε το D=B(α,r)-L εχει επισης την ιδιοτητα.

Θα αποδείξουμε στην συνέχεια- ως εφαρμογή του θεωρήματος του Green- την κατεύθυνση (ιι) $\Rightarrow$(ι) του θεωρήματος που χαρακτηρίζει τα συντηρητικά πεδία $F: D \subseteq R^2 \to R^2$, όπου D απλά συνεκτικός τόπος του R^2. (Θεώρημα 23.3)

Αν $D \subseteq R^2$ είναι απλά συνεκτικός τόπος και $F: D \subseteq R^2 \to R^2$ C^1 διανυσματικό πεδίο, $F = (p, q)$ ώστε $\dfrac{\partial p}{\partial y} = \dfrac{\partial q}{\partial x}$ στο D τότε το F είναι συντηρητικό (υπάρχει $f: D \to R$ C^1 συνάρτηση ώστε $F = \nabla f$).

Απόδειξη Ας σταθεροποιήσουμε ένα τυχόν σημείο $(a,b) \in D$. Για κάθε $(x,y) \in D$ θεωρούμε μια πολυγωνική γραμμή $\Gamma_{(x,y)} \subseteq D$ με αρχικό σημείο το (a,b) και τελικό το (x,y) (το D είναι συνεκτικό και ανοικτό σύνολο, πρβλ.θεώρημα 3.25).

Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση $f: D \to R$ ως ακολούθως:

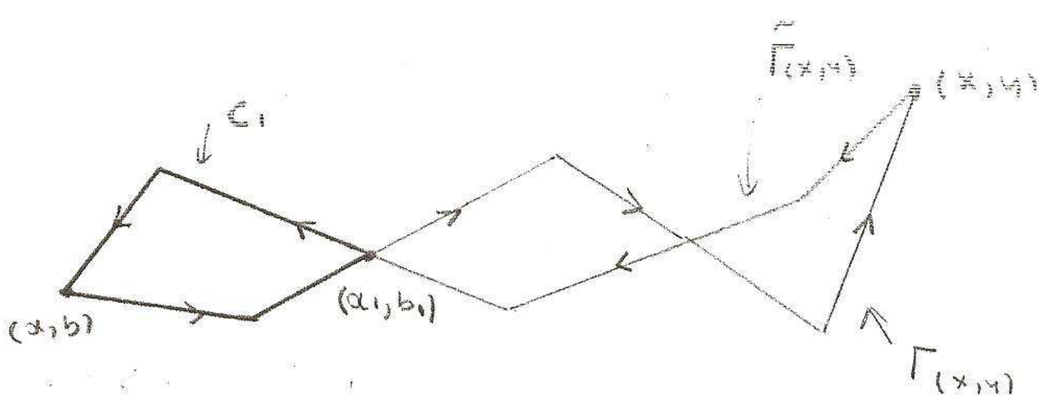
$$f(x,y) = \int_{\Gamma_{(x,y)}} F \cdot ds = \int_{\Gamma_{(x,y)}} pdx + qdy .$$

Ισχυριζόμαστε ότι η f είναι καλά ορισμένη, δηλαδή αν $\tilde{\Gamma}_{(x,y)}$ είναι μια άλλη πολυγωνική γραμμή με $\tilde{\Gamma}_{(x,y)} \subseteq D$ που ξεκινά από το (a,b)και καταλήγει στο (x,y) τότε (1) $\displaystyle\int_{\Gamma_{(x,y)}} pdx + qdy = \int_{\tilde{\Gamma}_{(x,y)}} pdx + qdy$.

Για να δείξουμε την (1) είναι αρκετό να δείξουμε την

(2) $$\int_{\Gamma_{(x,y)} - \tilde{\Gamma}_{(x,y)}} pdx + qdy = \int_{\Gamma_{(x,y)}} pdx + qdy - \int_{\tilde{\Gamma}_{(x,y)}} pdx + qdy = 0 .$$

Οι πολυγωνικές γραμμές $\Gamma_{(x,y)}$ και $\tilde{\Gamma}_{(x,y)}$ ξεκινούν από το σημείο (a,b) και έστω

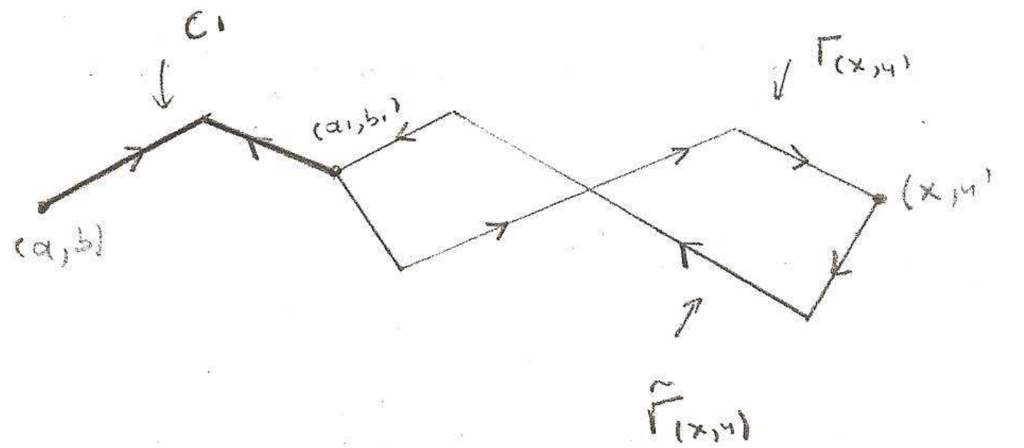


(a_1, b_1) το πρώτο σημείο που συναντώνται μετά το (a,b). Τότε η πολυγωνική γραμμή c_1 που ξεκινά από το (a,b) πηγαίνει στο (a_1,b_1) μέσω της $\Gamma_{(x,y)}$ και επιστρέφει στο (a,b) μέσω της $\tilde{\Gamma}_{(x,y)}$ είναι μια <u>απλή κλειστή καμπύλη</u> του απλά συνεκτικού τόπου D και επομένως είναι το σύνορο ενός ανοικτού απλά συνεκτικού

συνόλου $G \subseteq D$. Από το θεώρημα του Green και την υπόθεσή μας έπεται ότι
$\int\limits_{\partial G = c_1} pdx + qdy = \iint\limits_{G} \left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right) dxdy = 0$.

Επομένως $\int\limits_{c_1} pdx + qdy = 0$

Οφείλουμε να παρατηρήσουμε ότι, ενδέχεται οι δύο πολυγωνικές $\Gamma_{(x,y)}$ και $\widetilde{\Gamma}_{(x,y)}$ να



ταυτίζονται σε ένα αρχικό κομμάτι τους. Στην περίπτωση αυτή αν (a_1, b_1) είναι το πρώτο σημείο στο οποίο ξεχωρίζουν, τότε η πολυγωνική γραμμή που ξεκινά από το (a,b) πηγαίνει στο (a_1, b_1) μέσω της $\Gamma_{(x,y)}$ και επιστρέφει στο (a,b) μέσω της $\widetilde{\Gamma}_{(x,y)}$ - είναι βέβαια κλειστή, και – λόγω αντιθέτων προσήμων των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων (αφού ολοκληρώνουμε σε αντίθετες καμπύλες) ικανοποιεί προφανώς την σχέση $\int\limits_{c_1} pdx + qdy = 0$.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή δουλεύοντας τώρα με το (a_1, b_1) στην θέση του (a,b), μετά από πεπερασμένα βήματα (αφού αν Γ είναι κλειστή πολυγωνική γραμμή του επιπέδου, το ανοικτό σύνολο $R^2 - \Gamma$ του R^2 έχει πεπερασμένο πλήθος συνεκτικών συνιστωσών) καταλήγουμε στο ότι $\Gamma_{(x,y)} - \widetilde{\Gamma}_{(x,y)} = c_1 + c_2 + \ldots + c_N$ όπου οι $c_k, k = 1, 2, \ldots, N$ είναι (κλειστές) πολυγωνικές γραμμές του R^2 που ικανοποιούν τη σχέση (3) $\int\limits_{c_k} pdx + qdy = 0$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots, N$.

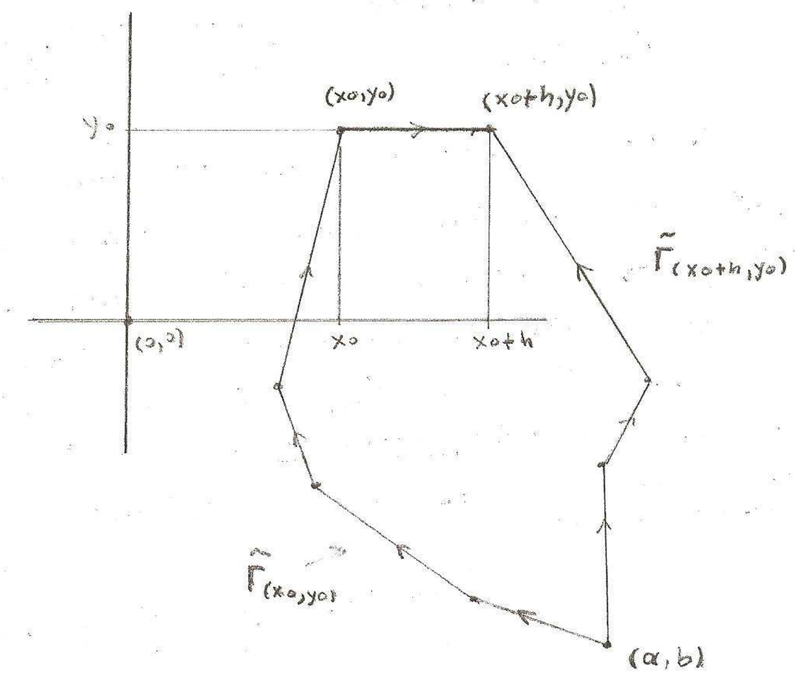
Η σχέση (3) έπεται την (2) και άρα την (1).

Απομένει να δείξουμε ότι: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = p(x,y)$ και $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = q(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in D$.

Σταθεροποιούμε ένα σημείο $(x_0, y_0) \in D$ και σχηματίζουμε τις διαφορές $f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = \int\limits_{\Gamma_{(x_0+h, y_0)}} pdx + qdy - \int\limits_{\Gamma(x_0, y_0)} pdx + qdy$ για h αρκετά μικρό (έστω $h > 0$) ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[(x_0, y_0), (x_0 + h, y_0)]$ να περιέχεται στο D.

Έπεται αμέσως ότι $\int\limits_{\Gamma_{(x_0+h,y_0)}} pdx+qdy - \int\limits_{\Gamma(x_0,y_0)} pdx+qdy = \int\limits_{[(x_0,y_0),(x_0+h,y_0)]} pdx+qdy$ και συνεπώς (4) $f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)=\int\limits_{[(x_0,y_0),(x_0+h,y_0)]} pdx+qdy$.

Παραμετρικοποιούμε το ευθύγραμμο τμήμα $[(x_0,y_0),(x_0+h,y_0)]$ ως $\sigma(t)=(x_0,y_0)+t((x_0+h,y_0)-(x_0,y_0))=(x_0+th,y_0)$, $t\in[0,1]$. Συνεπώς $\sigma'(t)=0,\ t\in[0,1]$



Οπότε από την (4) υπολογίζουμε,

$$f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)=\int_0^1 p(x_0+th,y_0)hdt = h\int_0^1 p(x_0+th,y_0)dt .$$

Έπεται ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\int_0^1 p(x_0+th,y_0)dt =$ $\int_0^1 p(x_0,y_0)dt = p(x_0,y_0)$ δηλαδή $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=p(x_0,y_0)$.

Σημειώνουμε ότι αν $h_n\to 0$, τότε η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\geq 1}$ με $f_n(t)=p(x_0+th_n,y_0), n\geq 1, t\in[0,1]$ συγκλίνει (από την συνέχεια της p στο (x_0,y_0)) ομοιόμορφα στην σταθερά $p(x_0,y_0)$ και αυτό δικαιολογεί την ισότητα $\lim\limits_{h\to 0}\int_0^1 p(x_0+th,y_0)dt=\int_0^1 p(x_0,y_0)dt$.

Αναλόγως αποδεικνύεται ότι, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=q(x_0,y_0)$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

Σημειώνουμε ότι (σε ένα ανοικτό και συνεκτικό $D\subseteq R^2$) η πολυγωνική γραμμή που συνδέει τα σημεία (a,b) και (x,y) του D μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι απλή (να μην τέμνει τον εαυτό της) και επί πλέον τα ευθύγραμμα τμήματά της να είναι παράλληλα είτε προς τον άξονα των x ή προς τον άξονα των y. Περαιτέρω σημειώνουμε ότι η απόδειξη απλοποιείται σε κάποιο βαθμό, υποθέτοντας ότι το D είναι αστρόμορφο. Πράγματι αν το D είναι αστρόμορφο ως προς το σημείο $(a,b)\in D$, τότε ορίζουμε την $f:D\to R$ ως εξής: $f(x,y)=\int\limits_{\Gamma(x,y)} pdx+qdy$, όπου $\Gamma(x,y)=[(a,b),(x,y)]$ το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα από το (a,b) στο (x,y).

25.5.1 Παρατήρηση. Το θεώρημα που αποδείξαμε μας λέει σε διαφορετική αλλά <u>ισοδύναμη</u> διατύπωση ότι: Ένα C^1 διανυσματικό πεδίο $F:U\subseteq R^2\to R^2$, όπου U απλά συνεκτικός τόπος είναι συντηρητικό αν και μόνο αν είναι αστρόβιλο. (Δες και την παρατήρηση 24.2.1). Σημειώνουμε ότι ένας ανάλογος χαρακτηρισμός ισχύει και για διανυσματικά πεδία $F:U\subseteq R^3\to R^3$ υποθέτοντας ότι το U είναι ανοικτό και <u>απλά συνεκτικό</u> υποσύνολο του R^3. Επειδή δεν θα δώσουμε τον ακριβή ορισμό της απλής συνεκτικότητας στον R^3, σημειώνουμε απλώς ότι παραδείγματα ανοικτών και απλά συνεκτικών συνόλων στον R^3 είναι τα ανοικτά και κυρτά σύνολα, (άρα οι ανοικτές σφαίρες ο ίδιος ο R^3, και τα ανοικτά ορθογώνια) το $R^3-\mathrm{K}$, όπου K πεπερασμένο σύνολο επίσης τα ανοικτά και αστρόμορφα υποσύνολα του R^3 κτλ. Αν L είναι ευθεία του R^3 τότε το ανοικτό σύνολο R^3-L είναι συνεκτικό αλλά όχι απλά συνεκτικό. Έτσι αποδεικνύεται ότι αν $F:U\subseteq R^3\to R^3$ είναι C^1 διανυσματικό πεδίο και το U απλά συνεκτικό σύνολο, τότε το F είναι συντηρητικό ακριβώς τότε αν το F είναι αστρόβιλο.

Το θεώρημα του Green στην γλώσσα των διανυσματικών πεδίων έχει τις ακόλουθες μορφές (διατυπώσεις).

25.6 Θεώρημα (Διανυσματική μορφή του θεωρήματος του Green).Έστω D φραγμένος τόπος του R^2 με κατά τμήματα ομαλό σύνορο και $F:D\to R^2$, $F=pi+qj$, ένα C^1 διανυσματικό πεδίο ορισμένο σε μια περιοχή του $\overline{D}$. Τότε

$$\int\limits_{\partial D} F\cdot ds=\int\limits_{D}(curlF)\cdot kd\mathrm{A}, \text{ (όπου } k=(0,0,1) \text{).}$$

Απόδειξη: Θέτομε $\widetilde{F}:D\times R\to R^3:\widetilde{F}(x,y,z)=(F(x,y),0),(x,y)\in D,z\in R$, τότε – όπως γνωρίζουμε – ορίζουμε ως $curlF$ τον στροβιλισμό του πεδίου $\widetilde{F}$, δηλαδή $$curlF\underset{o\rho}{=}=curl\widetilde{F}.$$

Έχουμε υπολογίσει ότι $curl\widetilde{F}=\left(\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)k$ όπου $k=(0,0,1)\in R^3$. (Παρατήρηση 2 της σελίδας 239).

Επειδή προφανώς $(curlF)\cdot k=curl\widetilde{F}\cdot k=\left(\dfrac{\partial q}{\partial x}-\dfrac{\partial p}{\partial y}\right)$ με αντικατάσταση έχουμε το συμπέρασμα.

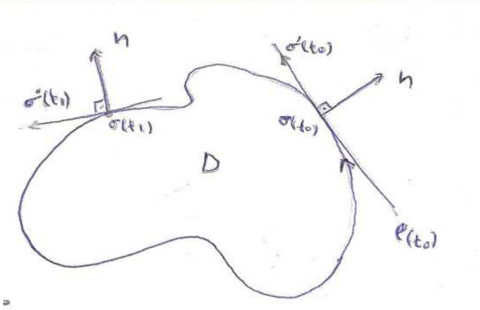
Σημείωση. Υπενθυμίζουμε ότι με τον όρο <u>τόπος</u> εννοούμε ένα ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του R^2.

25.7 Θεώρημα (της απόκλισης στο επίπεδο). Έστω D απλά συνεκτικός τόπος στο επίπεδο που φράσσεται από την απλή κλειστή καμπύλη $\sigma:[a,b]\to R^2$ για την οποία υποθέτομε ότι $\sigma'(t)\neq 0$ για κάθε $t\in[a,b]$. Αν n συμβολίζει το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο $\partial D=[\sigma]$ και $F=(p,q)$ είναι ένα C^1 διανυσματικό πεδίο σε μια περιοχή του $\overline{D}$ τότε

$$(1)\ \int_{\partial D} F\cdot n ds=\int_D divFd\mathrm{A}.$$

Όπου το αριστερό μέλος της (1) συμβολίζει το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα <u>πρώτου είδους</u> της βαθμωτής συνάρτησης, $t\in[a,b]\to F(\sigma(t))\cdot\dfrac{(y'(t),-x(t))}{\|\sigma'(t)\|}$, όπου $\sigma(t)=(x(t),y(t)),t\in[a,b]$.

Απόδειξη Το εφαπτόμενο διάνυσμα στο $\sigma(t_0)$ είναι το $\sigma'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0))$ και η εφαπτόμενη ευθεία στο $\sigma(t_0)$ έχει εξίσωση $\ell(t)=\sigma(t_0)+\sigma'(t_0)(t-t_0),t\in R$



Το διάνυσμα n είναι κάθετο στην ευθεία $\ell(t)$ στο σημείο $\sigma(t_0)$ και το πρόσημό του επιλέγεται ώστε να αντιστοιχεί προς την εξωτερική κατεύθυνση. Έτσι το n στο σημείο $\sigma(t_0)$ του ∂D δίνεται από τον τύπο, $n=\dfrac{(y'(t_0),-x'(t_0))}{\|\sigma'(t_0)\|}$. Το $n\perp\ell(t_0)$, αφού $n\cdot\sigma'(t_0)=0$. Έπεται ότι $\int_{\partial D} F\cdot n ds=$

$$\int_a^b \frac{p(x(t),y(t))\cdot y'(t)-q(x(t),y(t))\cdot x'(t)}{\|\sigma'(t)\|}\cdot\|\sigma'(t)\|dt=$$

$$\int_a^b\left[p(x(t),y(t))\cdot y'(t)-q(x(t),y(t))\cdot x'(t)\right]dt=\int_{\partial D} pdy-qdx\quad(2)$$

Επίσης $$\int_D divFd\mathrm{A}=\int_D\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}\right)dxdy\quad(3)$$

Από το θεώρημα του Green και τις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\partial D} F\cdot n ds=\int_D divFd\mathrm{A}.$$

Παρατήρηση Το γεγονός ότι το πρόσημο του διανύσματος επελέγη ώστε να αντιστοιχεί στην εξωτερική κατεύθυνση μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής: Η γραμμική απεικόνιση $\varphi:(x,y)\in R^2\to(y,-x)\in R^2$, στρέφει κατά την αρνητική φορά το διάνυσμα (x,y) κατά $-\frac{\pi}{2}$. Αυτό φαίνεται καλύτερα αν χρησιμοποιήσουμε μιγαδικό συμβολισμό, αφού τότε $\varphi(z)=-iz$ ($z=x+yi$) και το πρωτεύον όρισμα του $-i$ στο $(-\pi,\pi)$ είναι το $-\frac{\pi}{2}$. Έτσι το εφαπτόμενο διάνυσμα $\sigma'(t)=(x'(t),y'(t))$ της καμπύλης σ, στρέφεται κατά την αρνητική φορά κατά $\frac{\pi}{2}$ και συνεπώς γίνεται $(y'(t),-x'(t))$. Με κανονικοποίηση παίρνουμε το η.

Παραδείγματα 1) Έστω $F=(xy^2,y+x)$. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_D (curlF)\cdot k dA$, πάνω στο χωρίο D του πρώτου τεταρτημόριου που φράσσεται από τις $y=x^2$ και $y=x$.

Λύση Πρώτα υπολογίζουμε τον στροβιλισμό του F, ισοδύναμα, του $\widetilde{F}(x,y,z)=(xy^2,y+x,0)$, που είναι ,

$$curl\widetilde{F}=\nabla\times\widetilde{F}=\left(0,0,\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)=(0,0,1-2xy)=(1-2xy)k.$$

Άρα $curlF=curl\widetilde{F}=(1-2xy)k$.

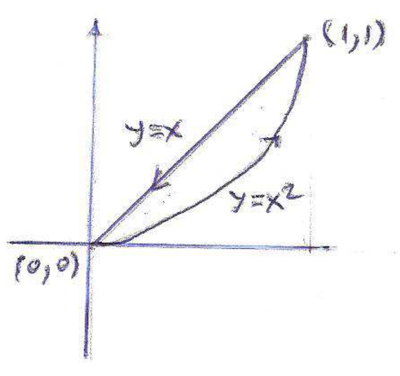
Έπεται ότι, $(curlF)\cdot k=1-2xy$. Η συνάρτηση αυτή ολοκληρώνεται πάνω στο D που είναι χωρίο τύπου 3 με την χρήση ενός διαδοχικού ολοκληρώματος.

$$\int_D (1-2xy)dxdy=\int_0^1\left(\int_{x^2}^{x}(1-2xy)\,dy\right)dx=\int_0^1\left[y-xy^2\right]_{x^2}^{x}dx=$$

$$\int_0^1\left[x-x^3-x^2+x^5\right]dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{12}.$$

(Εδώ θεωρούμε το D ως χωρίο τύπου 1, $D=\{(x,y):0\le x\le 1 \text{ και } x^2\le y\le x\}$).

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε πρώτα το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\partial D} F\cdot ds$, όπου ∂D είναι το σύνορο του χωρίου D (δες το σχήμα) και κατόπιν χρησιμοποιώντας την διανυσματική μορφή του θεωρήματος του Green να έχουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα



Το θετικά προσανατολισμένο σύνορο ∂D του D είναι το «άθροισμα» των καμπυλών σ_1 και σ_2, $\partial D=\sigma_1+(-\sigma_2)$, όπου $\sigma_1(t)=(t,t^2), t\in[0,1]$ και $\sigma_2(t)=(t,t), t\in[0,1]$.

Έτσι έχουμε: $\int_{\partial D} F\cdot ds=\int_{\sigma_1} F\cdot ds-\int_{\sigma_2} F\cdot ds$,

$$\int_{\sigma_1} F\cdot ds=\int_0^1 F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt=$$

$$\int_0^1 F\left(x_1(t), y_1(t)\right)\cdot\left(x_1'(t), y_1'(t)\right)dt = \int_0^1 F\left(t, t^2\right)\cdot(1,2t)\,dt = \int_0^1\left(t\cdot t^4, t^2+t\right)\cdot(1,2t)\,dt$$

$$=\int_0^1\left(t^5+2t^3+2t^2\right)dt = \frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{4}{3}$$

$$\int_{\sigma_2} F\cdot ds = \int_0^1 F\left(\sigma_2(t)\right)\cdot\sigma_2'(t)\,dt = \int_0^1 F\left(x_2(t), y_2(t)\right)\cdot\left(x_2'(t), y_2'(t)\right)dt = \int_0^1 F(t,t)\cdot(1,1)\,dt$$

$$=\int_0^1\left(t^3, 2t\right)\cdot(1,1)dt = \int_0^1\left(t^3+2t\right)dt = \frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}.$$

Επομένως, $\int_{\partial D} F\cdot ds = \frac{4}{3}-\frac{5}{4}=\frac{1}{12}$ και από την διανυσματική μορφή του θεωρήματος Green $\int_D (curlF)\cdot k\,d\mathrm{A} = \int_{\partial D} F\cdot ds = \frac{1}{12}$.

2) Έστω $F=\left(y^3, x^5\right)$. Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (πρώτου είδους) $\int_{\partial D} F\cdot n\,ds$ στο σύνορο του μοναδιαίου τετραγώνου D.

Λύση Από το θεώρημα της απόκλισης έχουμε: $\int_{\partial D} F\cdot n\,ds = \int_D divF\cdot d\mathrm{A}$

Επειδή , $divF = \frac{\partial\left(y^3\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(x^5\right)}{\partial y}=0$, άρα το ζητούμενο ολοκλήρωμα ισούται με μηδέν.