Απόκλιση και στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου

Έστω F ένα C^1 διανυσματικό πεδίο του R^3, δηλαδή $F : D \subseteq R^3 \to R^3$ C^1 συνάρτηση με D ανοικτό στο R^3 και $F = (F_1, F_2, F_3)$.

Στο διανυσματικό πεδίο F αντιστοιχούμε ένα άλλο διανυσματικό πεδίο που ονομάζεται στροβιλισμός του F και συμβολίζεται με $curlF$ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$curlF = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) k$$

(όπου $i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$).

Με τον συμβολισμό των τελεστών έχουμε ότι το σύμβολο, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τελεστής που δρα πάνω σε βαθμωτές (διαφορίσιμες) συναρτήσεις

Έτσι με χρήση του εξωτερικού γινομένου μπορούμε να γράψουμε:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) k .$$

Συνεπώς $\quad curlF = \nabla \times F$

Παρατήρηση Αν το διανυσματικό πεδίο F είναι της κλάσης $C^k \ (k \geq 1)$ τότε το διανυσματικό πεδίο $curlF$ είναι της κλάσης $C^{(k-1)}$ (όπου C^0 είναι η κλάση των συνεχών συναρτήσεων).

Παράδειγμα: Έστω $\mathrm{T}(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, ο μετασχηματισμός σε κυλινδρικές συντεταγμένες τότε έχουμε:

$$\nabla \times \mathrm{T} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{r}\cos\theta & \mathrm{r}\sin\theta & \mathrm{z} \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \theta} - \frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial r} \right) j + \left(\frac{\partial (r\sin\theta)}{\partial r} - \frac{\partial (r\cos\theta)}{\partial \theta} \right) k =$$

$$(0-0)i + (0-0)j + (\sin\theta - (-r\sin\theta))k = (\sin\theta + r\sin\theta)k = (1+r)\sin\theta k .$$

24.1 Θεώρημα Για κάθε C^2 συνάρτηση $f : U \subseteq R^3 \to R$ $\quad (U \subseteq R^3$ ανοικτό) ισχύει ότι:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

Δηλαδή ο στροβιλισμός ενός C^1 πεδίου κλίσεων είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Απόδειξη: Έστω $F=\nabla f \Leftrightarrow F=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$. Έπεται ότι:

$$\nabla\times F=\nabla\times\nabla f==\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\right)i+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)j+$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)k\,.$$

Επειδή η f είναι C^2 συνάρτηση οι μεικτές παράγωγοι είναι ανά δύο ίσες $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\right)$ συνεπώς όλες οι συνιστώσες του διανύσματος $curl(\nabla f)$ μηδενίζονται και έτσι έχουμε το αποτέλεσμα.

24.2 Ορισμός Ένα διανυσματικό πεδίο $F:U\subseteq R^3\to R^3$ λέγεται <u>αστρόβιλο</u> αν $curlF=0$ επί του U.
Ο όρος αστρόβιλο διανυσματικό πεδίο <u>προέρχεται από τη Φυσική</u>. Για παράδειγμα αν το F είναι <u>πεδίο ταχυτήτων</u> ενός υγρού μέσα σε ένα σωλήνα με <u>σταθερή ροή</u>, τότε η φυσική σημασία του ότι $curlF=0$ στο σημείο P είναι πως το υγρό δεν περιστρέφεται, είναι δηλαδή <u>αστρόβιλο</u> στο P.

Παρατηρήσεις. 1) έπεται από το προηγούμενο θεώρημα ότι αν ένα διανυσματικό πεδίο $F:U\subseteq R^3\to R^3$ είναι <u>πεδίο κλίσεων</u> μιας C^2 συνάρτησης $f:U\subseteq R^3\to R$, δηλαδή αν $F=\nabla f$, τότε το F είναι ένα <u>αστρόβιλο</u> διανυσματικό πεδίο. Με διαφορετικά λόγια αν ένα C^1 διανυσματικό πεδίο $F:U\subseteq R^3\to R^3$ είναι <u>συντηρητικό</u> τότε είναι και <u>αστρόβιλο</u>.Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.

2) Έστω $F:U\subseteq R^2\to R^2$, $F=(F_1,F_2)$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο στον R^2, τότε το F μπορεί να θεωρηθεί και ως διανυσματικό πεδίο στον R^3 με τον ακόλουθο τρόπο: θέτομε $\overline{F}:U\times R\subseteq R^3\to R^3$ όπου $\overline{F}(x,y,z)=(F(x,y),0)=(F_1(x,y),F_2(x,y),0)$, $(x,y)\in U, z\in R$. Δηλαδή $\overline{F}=(F_1,F_2,F_3)$ όπου $F_3=0$ στο $U\times R$.
Είναι τότε σαφές ότι $\overline{F}$ είναι C^1 (δηλαδή της ίδιας κλάσης με την F) διανυσματικό πεδίο στο R^3.
Ο στροβιλισμός του F ορίζεται τότε ως ο στροβιλισμός του $\overline{F}$

$$curlF \underset{o\rho}{=} curl\overline{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) k =$$

$0i + 0j + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) k = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) k$. Παρατηρούμε ότι (αν $U \subseteq R^2$ ανοικτό συνεκτικό και) και $F : U \to R^2$, $F = (F_1, F_2), C^1$ διανυσματικό πεδίο τότε το F (δηλαδή το $\overline{F}$) είναι αστρόβιλο αν και μόνο αν $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$. Έπεται ιδιαίτερα από το θεώρημα 23.3 (κατεύθυνση (ι) $\Rightarrow$(ιι)) ή το Θεώρημα 24.1 ότι αν F συντηρητικό τότε (το $\overline{F}$ και άρα) το F είναι αστρόβιλο.

Παραδείγματα 1) Έστω $V(x, y) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2}\right), (x, y) \neq (0, 0)$. Αποδείξτε ότι το V είναι ένα αστρόβιλο διανυσματικό πεδίο στο $U = R^2 - \{(0,0)\}$.

Λύση Σύμφωνα με την προηγούμενη παρατήρηση, θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο $F : U \times R \to R^3 : F(x, y, z) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2}, 0\right)$, $(x, y) \in R^2 - \{(0,0)\}$ και $z \in R$. Έχουμε τότε:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{y}{x^2 + y^2} & -\dfrac{x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2 + y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\right] k =$$

$\left[\frac{-(-x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{(-y^2 + x^2)}{(x^2 + y^2)^2}\right] k = 0 \cdot k = 0$, ($\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$ και $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 + y^2}\right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$).

2) Έστω $V(x, y, z) = (y, -x, 0), (x, y, z) \in R^3$. Αποδείξτε ότι το V <u>δεν</u> είναι πεδίο κλίσεων.

Λύση Αν το V ήταν πεδίο κλίσεων κάποιας $f : R^3 \to R$ η οποία είναι C^2 συνάρτηση τότε θα είχαμε ότι (σύμφωνα με το θεώρημα 24.1) curlV=0.

Όμως, $curlV = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial(y)}{\partial y}\right) k = (-1 - 1) k = -2k \neq 0$.

Έπεται ότι το V <u>δεν</u> μπορεί να είναι το πεδίο κλίσεων κάποιας C^2 συνάρτησης $f : R^3 \to R$ αφού ο στροβιλισμός του V <u>δεν</u> είναι μηδέν.

3) Έστω $U \subseteq R^2$ και $f: U \to R^2, f=(u,v)$ ολόμορφη συνάρτηση τότε τα διανυσματικά πεδία $g=(v,u)$ και $\tilde{g}=(u,-v)$ είναι αστρόβιλα (Πρβλ την προηγούμενη παρατήρηση και το παράδειγμα (4) μετά το θεώρημα 23.3)

Παρατήρηση24.2.1 Έστω $U \subseteq R^2$ <u>απλά συνεκτικό</u> σύνολο και $F: U \subseteq R^2 \to R^2$ C^1 διανυσματικό πεδίο. Έπεται από το θεώρημα 23.3 και την παρατήρηση (2) μετά τον ορισμό 24.2 ότι το F είναι συντηρητικό αν και μόνο αν το F είναι αστρόβιλο, δηλαδή το επαγόμενο διανυσματικό πεδίο $\tilde{F}: U \times R \subseteq R^3 \to R^3$ με $\tilde{F}(x,y,z)=(F(x,y),0)$ είναι αστρόβιλο. Έτσι το γεγονός ότι το $V(x,y,z)=(y,-x,0),(x,y,z)\in R^3$ <u>δεν</u> είναι αστρόβιλο προκύπτει από το ότι το πεδίο $F(x,y)=(y,-x)$ <u>δεν</u> είναι συντηρητικό.

Από την άλλη μεριά το διανυσματικό πεδίο $V(x,y)=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2},-\dfrac{x}{x^2+y^2}\right),(x,y)\in U=R^2-\{(0,0)\}$ <u>είναι</u> αστρόβιλο και βέβαια ικανοποιεί την συνθήκη (ιι) του θεωρήματος 23.3 , όμως <u>δεν</u> είναι συντηρητικό.

Πράγματι, αν ήταν τότε για κάθε κλειστή καμπύλη $\sigma:[a,b]\to U$ θα είχαμε $\int_\sigma V\cdot ds=0$. Έστω $\sigma(t)=(\cos t,\sin t)=(x(t),y(t)),\ t\in[0,2\pi]$ ο μοναδιαίος κύκλος με την συνήθη παραμέτρηση. Τότε έχουμε,

$$\int_\sigma V\cdot ds=\int_0^{2\pi} V(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt=$$

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{y(t)}{(x(t))^2+(y(t))^2},-\frac{x(t)}{(x(t))^2+(y(t))^2}\right)\cdot(x'(t),y'(t))dt=$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{y(t)\cdot x'(t)-x(t)\cdot y'(t)}{(x(t))^2+(y(t))^2}dt=\int_0^{2\pi}\frac{(\sin t)(-\sin t)-(\cos t)(\cos t)}{\cos^2 t+\sin^2 t}dt=$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-\sin^2 t-\cos^2 t\right)dt=-\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=-\int_0^{2\pi}dt=-2\pi\neq 0 .$$

Έπεται ότι το πεδίο V είναι αστρόβιλο αλλά όχι συντηρητικό. Παρατηρούμε ότι το θεώρημα 23.3 δεν μπορεί να εφαρμοσθεί (αν και ικανοποιείται η συνθήκη (ιι) του θεωρήματος) αφού το πεδίο ορισμού του V <u>δεν</u> είναι απλά συνεκτικό. (Το ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο $U=R^2-\{(0,0)\}$ του R^2 <u>δεν</u> είναι απλά συνεκτικό). Για περαιτέρω ιδιότητες του διανυσματικού πεδίου $V(x,y)=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2},-\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$, δες τις παρατηρήσεις στο τέλος αυτής της παραγράφου.

<u>Απόκλιση διανυσματικού πεδίου</u>. Έστω $F: U\subseteq R^3\to R^3$ C^1 διανυσματικό πεδίο, με $F=(F_1,F_2,F_3)$. Η <u>απόκλιση</u> του F ορίζεται ως εξής:

$$divF=\nabla\cdot F=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Δηλαδή η $divF$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των ∇ και F. Παρατηρούμε ότι η απόκλιση ενός διανυσματικού πεδίου είναι βαθμωτό πεδίο. Σημειώνουμε ότι η έννοια της απόκλισης έχει φυσική σημασία που σχετίζεται με την διαστολή ή συστολή ενός ρευστού.

Το επόμενο θεώρημα συνδέει τις πράξεις του στροβιλισμού και της απόκλισης.

24.3 Θεώρημα Αν $F:U\subseteq R^3\to R^3$ με $F=\left(F_1,F_2,F_3\right)$ είναι C^2 διανυσματικό πεδίο, τότε

$$divcurlF=\nabla\cdot\left(\nabla\times F\right)=0$$

δηλαδή η απόκλιση κάθε στροβιλισμού είναι μηδέν.

Απόδειξη: Όπως και στο θεώρημα 24.1 , η απόδειξη στηρίζεται στην ισότητα των μεικτών παραγώγων μιας C^2 συνάρτησης, έτσι παραλείπεται.

24.4 Ορισμός. Αν $divF=\nabla\cdot F=0$, τότε λέμε ότι το πεδίο είναι ασυμπίεστο.

Παρατηρούμε ότι ο στροβιλισμός ενός C^2 διανυσματικού πεδίου είναι ασυμπίεστο πεδίο.

Παράδειγμα. Να βρεθεί η απόκλιση των διανυσματικών πεδίων.

(α) $F\left(x,y\right)=xy^2i+\sin xj$

(β) $F\left(x,y,z\right)=2xi+y^2j+xz^2k$, (γ) $F\left(x,y,z\right)=xi+yj-2zk$.

Λύση (α) $divF=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(xy^2\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\sin x\right)=y^2+0=y^2$.

(β) $divF=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(2x\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(xz^2\right)=2+2y+2xz$

(γ) $divF=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(y\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(-2z\right)=1+1-2=0$ και το πεδίο είναι ασυμπίεστο.

Παρατήρηση. Όσον αφορά το (γ) παρατηρούμε ότι

$$curlF=\nabla\times F=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & -2z \end{vmatrix}=$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(-2z\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(y\right)\right)i+\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(x\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(-2z\right)\right)j+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(y\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(x\right)\right)k=0i+0j+0k=0$$

και το πεδίο είναι αστρόβιλο. Το πεδίο αυτό είναι και συντηρητικό, μια συνάρτηση δυναμικού για το F είναι η $f\left(x,y,z\right)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}-z^2$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι: $divF=0$ και $curlF=0$, παρόλα αυτά το F δεν είναι σταθερό. Πρέπει βέβαια να είναι σαφές ότι για ένα σταθερό διανυσματικό πεδίο $F=\left(c_1,c_2,c_3\right)$ ισχύει ότι $divF=0$ και $curlF=0$.

(*) Παρατηρήσεις.1) Έστω $\sigma:[a,b]\to R^2$ κλειστή καμπύλη με $0\notin[\sigma]$ και $g(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$.

Τότε , $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma} g\cdot ds=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma}\frac{d\zeta}{\zeta}=\delta_\sigma(0)$. Δηλαδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β΄ είδους της g κατά μήκος της σ διαιρεμένο με 2π, ισούται με τον δείκτη στροφής της σ ως προς το 0.

Απόδειξη:_Από τον ορισμό του ο δείκτης στροφής της σ ως προς το σημείο 0 είναι το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\delta_\sigma(0)\underset{o\rho}{=}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma}\frac{d\zeta}{\zeta}$. Όμως

$$\int\limits_{\sigma}\frac{d\zeta}{\zeta}=\int\limits_a^b\frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}dt=\int\limits_a^b\frac{(x'(t)+iy'(t))}{x(t)+iy(t)}dt=$$

$$\int\limits_a^b\frac{(x'(t)\cdot x(t)+y'(t)\cdot y(t))+i(x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t))}{(x(t))^2+(y(t))^2}dt=$$

$$\int\limits_a^b\frac{x'(t)\cdot x(t)+y'(t)\cdot y(t)}{(x(t))^2+(y(t))^2}dt+i\int\limits_a^b\frac{x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t)}{(x(t))^2+(y(t))^2}dt=$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_a^b\frac{\left((x(t))^2+(y(t))^2\right)'}{(x(t))^2+(y(t))^2}dt+i\int\limits_a^b\frac{x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t)}{(x(t))^2+(y(t))^2}dt \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι, $\int\limits_a^b\frac{\left((x(t))^2+(y(t))^2\right)'}{(x(t))^2+(y(t))^2}dt=\int\limits_{u(a)}^{u(b)}\frac{du}{u}$ όπου $u(t)=(x(t))^2+(y(t))^2$, $t\in[a,b]$. Επειδή η καμπύλη σ είναι κλειστή ισχύει ότι $u(b)=u(a)$ και συνεπώς

$$\int\limits_{u(a)}^{u(b)}\frac{du}{u}=0 \quad (2)$$

Έπεται από τις (1) και (2) ότι,

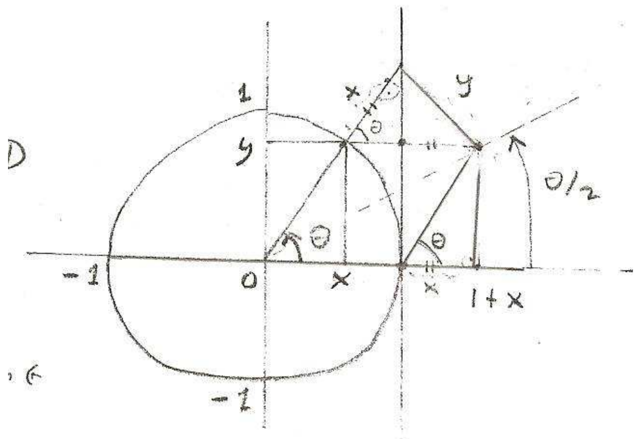
$$\delta_\sigma(0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma}\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\cdot i\int\limits_a^b\frac{x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t)}{(x(t))^2+(y(t))^2}dt=$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_a^b\frac{x(t)\cdot y'(t)-x'(t)\cdot y(t)}{(x(t))^2+(y(t))^2}dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma} g\cdot ds.$$

Παρατηρούμε ότι η g είναι η συνάρτηση $-V$ του παραδείγματος 1, $g(x,y)=-V(x,y)=\left(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $(x,y)\neq(0,0)$.

Η g σε μιγαδικό συμβολισμό γράφεται $g(z)=\frac{iz}{|z|^2}, z=x+iy\neq 0$. Επίσης ότι η g προκύπτει ως σύνθεση της ολόμορφης συνάρτησης $h(z)=\frac{1}{z}, z\neq 0$ με τον μετασχηματισμό $\mathrm{T}(x,y)=(y,x)$, δηλαδή $g=\mathrm{T}oh$ (Πρβλ. και τα παραδείγματα (4) μετα το θεωρημα 23.3 και (3) μετα τον Ορισμό 24.2 .)

2) Το διανυσματικό πεδίο $V(x,y)=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2},-\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$, (ή το $-V$) είναι <u>συντηρητικό</u> στο $D=R^2-\{(-\infty,0]\times\{0\}\}$ (ή στο $W=R^2-\{[0,+\infty)\times\{0\}\}$) Πράγματι μια συνάρτηση δυναμικού για το $f(x,y)=-V(x,y)=\left(-\dfrac{y}{x^2+y^2},\dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$ στο D είναι η συνάρτηση $\arg(x,y)=$ <u>πρωτεύον</u> <u>όρισμα</u> του (x,y), δηλαδή $\arg(x,y)=\theta\Leftrightarrow(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\,(\cos\theta,\sin\theta)$ και $\theta\in(-\pi,\pi)\Leftrightarrow x=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\cos\theta$, $y=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\sin\theta$ και $\theta\in(-\pi,\pi)$



θα χρειασθούμε το ακόλουθο:

24.5Λήμμα

$$\arg(x,y)=2\tau o\xi\varepsilon\varphi\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},$$

$(x,y)\in D$

Απόδειξη Έστω $(x,y)\in D$ τότε $x=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\cos\theta$ και $y=\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\sin\theta$ και $\theta\in(-\pi,\pi)$.

$$\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}+x}$$

Έπεται ότι: $\arg(x,y)=\theta=2\tau o\xi\varepsilon\varphi\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\in D$.

[Υπενθυμίζουμε ότι: η συνάρτηση $\tau o\xi\varepsilon\varphi:R\to\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ ορίζεται ως εξής: $\tau o\xi\varepsilon\varphi x=\theta\Leftrightarrow\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ και $\varepsilon\varphi\theta=x$].

Η συνάρτηση arg είναι C^1 στο D (στην πραγματικότητα C^∞ στο D) και με απευθείας υπολογισμό βρίσκουμε ότι: $\dfrac{\partial\arg}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$ και $\dfrac{\partial\arg}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}\Leftrightarrow\nabla\arg=-V$.

Η ύπαρξη μιας συνάρτησης δυναμικού για την V ή την $f = -V$ στο D έπεται από το γεγονός ότι το D είναι <u>απλά συνεκτικό</u> και ότι ικανοποιείται η συνθήκη (ιι) του θεωρήματος 23.3 για την V (ή την $f = -V$). Στην προκειμένη περίπτωση βρίσκουμε με απευθείας υπολογισμό μια συνάρτηση δυναμικού για την $f = -V$ στο D.