Υπολογισμός τριπλών ολοκληρωμάτων με διαδοχική ολοκλήρωση

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα Fubini για τον υπολογισμό τριπλών ολοκληρωμάτων. Ξεκινούμε με την διατύπωση του θεωρήματος Fubini για τριπλά ολοκληρώματα.

19-1 Θεώρημα Έστω $\Re = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ κλειστό ορθογώνιο στον R^3 και $f : \Re \to R$ φραγμένη συνάρτηση, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1)Αν η f είναι συνεχής τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο R και αν $\mathrm{I} = \int_{\Re} f dx$, τότε τα έξι διαδοχικά ολοκληρώματα που παίρνουμε μεταθέτοντας τα dx, dy, dz π.χ. $\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx$, $\int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z) dz \right) dx \right) dy$ κτλ είναι <u>όλα ίσα</u> με τον αριθμό Ι.

2)Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\Re$, αν το ολοκλήρωμα $\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z) dz$ υπάρχει για κάθε $(x,y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ τότε (η συνάρτηση $(x,y) \in [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z) dz$ ολοκληρώνεται στο $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ και)

ισχύει $$\int_{\Re} f dx = \int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z) dz \right) dx dy .$$

Ανάλογα, αν το ολοκλήρωμα $\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x,y,z) dx dy$ υπάρχει για κάθε $z \in [a_3, b_3]$

έπεται ότι, $$\int_{\Re} f dx = \int_{a_3}^{b_3} \left(\int_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x,y,z) dx dy \right) dz .$$

Στην συνέχεια θα δούμε πως τριπλά ολοκληρώματα μπορούν να υπολογισθούν πάνω από στερεά χωρία που <u>δεν</u> είναι ορθογώνια. Θα υποθέσουμε ότι το στερεό χωρίο ολοκλήρωσης είναι ένα <u>Jordan μετρήσιμο</u> υποσύνολο του R^3 <u>ειδικού τύπου</u> (πού είναι ανάλογος με τα επίπεδα χωρία ολοκλήρωσης που εξετάσαμε σε προηγούμενες παραγράφους).

Με περισσότερη ακρίβεια, θα υποθέσουμε ότι το χωρίο ολοκλήρωσης D φράσσεται από <u>πάνω</u> από μια επιφάνεια $z = u(x,y)$ και από <u>κάτω</u> από μια επιφάνεια $z = v(x,y)$ και ακόμα ότι προβάλλεται στο xy επίπεδο σε ένα χωρίο Α είτε του <u>τύπου</u> **1** είτε του <u>τύπου</u> **2.** Έτσι το D περιγράφεται ως εξής:

$$D = \{(x,y,z) : (x,y) \in \mathrm{A} \text{ και } v(x,y) \le z \le u(x,y)\} .$$

Αν π.χ. το Α είναι του <u>τύπου</u> **1** και $\mathrm{A} = \{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b \text{ και } \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ όπου $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to R$ συνεχείς συναρτήσεις με $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ τότε, $D = \{(x,y,z) : a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \text{ και } v(x,y) \le z \le u(x,y)\}$.

19.2 Θεώρημα Έστω D στερεό χωρίο, $D \subseteq R^3$, το οποίο φράσσεται από πάνω από μια επιφάνεια $z = u(x,y)$, από κάτω από μια επιφάνεια $z = v(x,y)$ και προβάλλεται στο xy επίπεδο σε ένα χωρίο A. Αν το A είναι είτε του τύπου **1** είτε του τύπου **2**, και η $f : D \to R$ συνεχής (ή φραγμένη με αριθμήσιμο το πολύ πλήθος ασυνεχειών) συνάρτηση τότε η f είναι ολοκληρώσιμη επί του D και

$\int_D f dx = \int_A \left(\int_{v(x,y)}^{u(x,y)} f(x,y,z) dz \right) d(x,y)$, ($x = (x,y,z)$ στο πρώτο ολοκλήρωμα)

Ειδικότερα: (ι) Αν το A είναι του τύπου 1 και,

$A = \{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b$ και $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ τότε

$\int_D f dx = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \int_{v(x,y)}^{u(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx$, ($x = (x,y,z)$ στο πρώτο ολοκλήρωμα)

(ιι) Αν το A είναι του τύπου 2 και $A = \{(x,y) \in R^2 : c \le y \le d$ και $g_1(y) \le x \le g_2(y)\}$

τότε $\int_D f dx = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \int_{v(x,y)}^{u(x,y)} f(x,y,z) dz dx dy$, ($x = (x,y,z)$ στο πρώτο ολοκλήρωμα)

Παρατηρήσεις: 1) Το προηγούμενο θεώρημα αποδεικνύεται (όπως και το ανάλογό του για διπλά ολοκληρώματα) με την βοήθεια του θεωρήματος Fubini (αφού επεκτείνουμε την f σε ένα κλειστό ορθογώνιο $\mathfrak{R}$ που περιέχει το D) και τον χαρακτηρισμό των Riemann ολοκληρωσίμων συναρτήσεων. Απλώς παρατηρούμε ότι οι ασυνέχειες της f είναι μέτρου μηδέν αφού βρίσκονται στο σύνορο του D, το οποίο είναι πεπερασμένη ένωση γραφημάτων συνεχών συναρτήσεων (δύο μεταβλητών) και άρα μέτρου μηδέν, δηλαδή D Jordan μετρήσιμο.

2)Τα υποσύνολα D του R^3 που εμφανίζονται στην διατύπωση του προηγουμένου θεωρήματος ονομάζονται στερεά (ή τρισδιάστατα) χωρία τύπου **1**. Ανάλογα ορίζονται τα στερεά χωρία τύπου 2 με προβολή του D στο yz επίπεδο και τα στερεά χωρία τύπου 3 με προβολή του D στο xz επίπεδο. Ένα χωρίο που είναι του τύπου 1,2 και 3 ονομάζεται χωρίο τύπου 4. Ένα παράδειγμα τέτοιου χωρίου είναι η μοναδιαία σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3)Αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι η σταθερά ίση με 1, δηλαδή $f(x,y,z) = 1$

τότε $\int_D dx = V(D) =$ο όγκος του D (1)

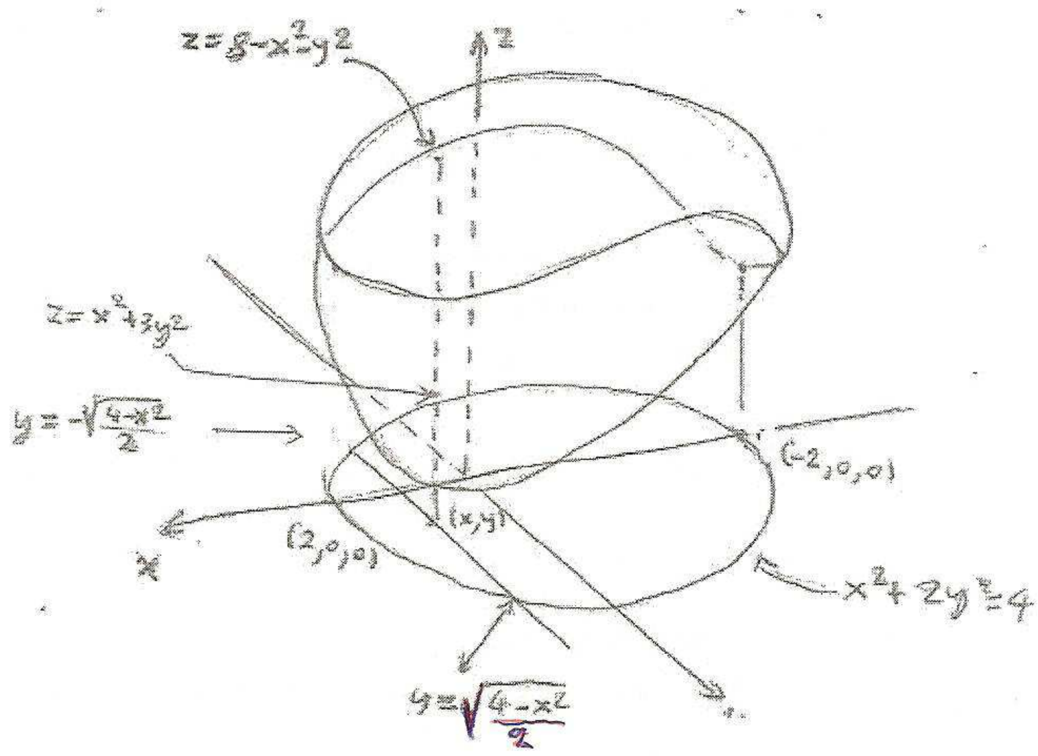
Πράγματι, $\int_D f dx = \int_A \left(\int_{v(x,y)}^{u(x,y)} dz \right) d(x,y) = \int_A (u(x,y) - v(x,y)) d(x,y) =$

$\int_A u(x,y) d(x,y) - \int_A v(x,y) d(x,y) =$ο όγκος του D, (αφού $u(x,y) \ge v(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in D$ και το διπλό ολοκλήρωμα παριστάνει τον όγκο κάτω από το γράφημα της ολοκληρωτέας συνάρτησης). Εξάλλου ο τύπος (1) έχει δοθεί και ως ο ορισμός του όγκου Jordan μετρήσιμου συνόλου $D \subseteq R^3$.

Παραδείγματα υπολογισμού τριπλών ολοκληρωμάτων.

1)Να βρεθεί ο όγκος του στερεού D που περικλείεται από τις επιφάνειες $z=x^2+3y^2$ και $z=8-x^2-y^2$.

Λύση Ο όγκος $V(D)$ δίδεται από το ολοκλήρωμα $V(D)=\iiint_D dzdydx$, ($V(D)=\int_D dx$) δηλαδή το τριπλό ολοκλήρωμα της $F(x,y,z)=1$ επί του D. Για να βρούμε τα όρια ολοκλήρωσης σχεδιάζουμε το D.



Οι επιφάνειες $S_1=\{(x,y,z): z=x^2+3y^2\}$ και $S_2=\{(x,y,z): z=8-x^2-y^2\}$ τέμνονται στην καμπύλη $S=S_1\bigcap S_2=\{(x,y,z): x^2+2y^2=4 \text{ και } z=x^2+3y^2\}$ ($x^2+3y^2=8-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+2y^2=4$). Η προβολή του S στο xy επίπεδο είναι η έλλειψη: $x^2+2y^2=4$. Παρατηρούμε ότι το εσωτερικό αυτής της έλλειψης είναι $\Re=\{(x,y): x^2+2y^2<4\}$. Επίσης ότι,

$(x,y)\in\Re \Leftrightarrow x^2+2y^2<4 \Leftrightarrow x^2+3y^2<8-x^2-y^2$.

Το χωρίο $\overline{\Re}=\{(x,y): x^2+2y^2\le 4\}$ είναι του τύπου 1, πράγματι,

$\overline{\Re}=\left\{(x,y): -2\le x\le 2 \text{ και } -\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\le y\le\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\right\}$.

Έπεται ότι,

$$D=\left\{(x,y,z):-2\le x\le 2,\ \ -\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\le y\le\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\text{και } x^2+3y^2\le z\le 8-x^2-y^2\right\}\ \text{ και}$$

$$V(D)=\iiint\limits_D dzdydx=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}\left[\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2}dz\right]dydx=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}\left(8-2x^2-4y^2\right)dydx=$$

$$\int_{-2}^{2}\left[\left(8-2x^2\right)y-\frac{4}{3}y^3\right]_{y=-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{y=\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}dx=\int_{-2}^{2}\left(2\left(8-2x^2\right)\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}-\frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right)dx=$$

$$\int_{-2}^{2}\left[8\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]dx=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}dx=8\pi\sqrt{2}$$ (κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x=2\sin u\Rightarrow\dfrac{dx}{du}=-2\cos u\Rightarrow dx=2\cos u du$).

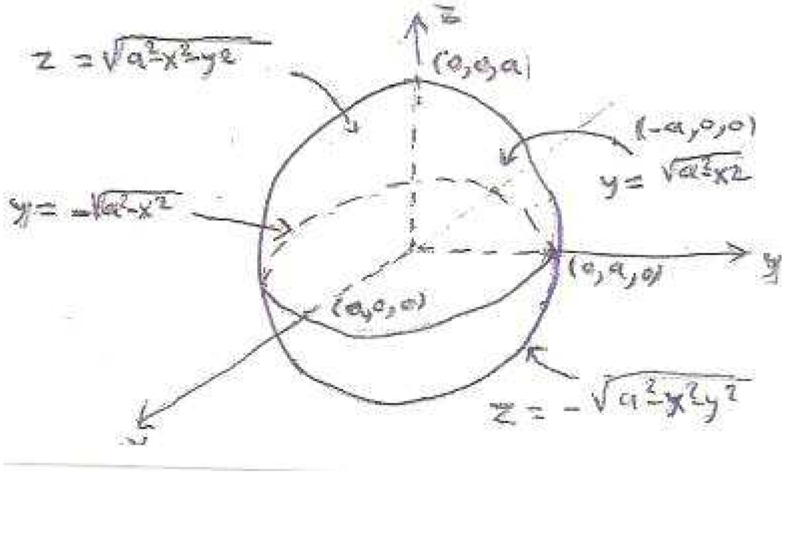
Σημείωση Το προηγούμενο ολοκλήρωμα θα μπορούσε να υπολογιστεί και ως η διαφορά των διπλών ολοκληρωμάτων επί του $\overline{\Re}$, $V(\mathrm{A})=\int\limits_{\Re}F_1(x,y)\,dxdy-\int\limits_{\Re}F_2(x,y)\,dxdy$, όπου $F_1(x,y)=8-x^2-y^2$ και $F_2(x,y)=x^2+3y^2$, όπου $\overline{\Re}=\left\{(x,y):-2\le x\le 2 \text{ και } -\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\le y\le\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\right\}=$ το εσωτερικό της έλλειψης μαζί με το σύνορο

2)Να βρεθούν τα όρια της ολοκλήρωσης για τον υπολογισμό του τριπλού ολοκληρώματος: $\iiint\limits_D f(x,y,z)dzdydx$, όπου $f:D\to R$ συνεχής συνάρτηση και:

(α) $D=\left\{(x,y,z)\in R^3: x^2+y^2+z^2\le a^2\right\}$, $(a>0)$.

(β) $D=$ το τετράεδρο με κορυφές $(0,0,0),(1,1,0),(0,1,0)$ και $(0,1,1)$.

Λύση (α) Η κλειστή σφαίρα κέντρου $(0,0,0)$ και ακτίνας $a>0$ περιγράφεται ως το σύνολο D των $(x,y,z)\in R^3$ ώστε: $-a\le x\le a$, $-\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\sqrt{a^2-x^2}$ και $-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{a^2-x^2-y^2}$



Η σφαίρα είναι χωρίο τύπου (4) μπορεί να περιγραφεί (λόγω συμμετρίας) με προβολές σε όλα τα επίπεδα. Έτσι π.χ. έχουμε: $-a \le y \le a, \sqrt{a^2-y^2} \le x \le \sqrt{a^2-y^2}$ και $-\sqrt{a^2-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

Έπεται από την πρώτη περιγραφή ότι,

$\iiint\limits_D f(x,y,z)dzdydx = \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dzdydx$ και από την δεύτερη

$\iiint\limits_D f(x,y,z)dzdxdy = \int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)dzdxdy$.

Αν $f(x,y,z)=1$ η σταθερά συνάρτηση ίση με 1, βρίσκουμε τον όγκο της σφαίρας D, έτσι από την πρώτη περιγραφή έχουμε $V = \iiint\limits_D f(x,y,z)dzdydx = \iiint\limits_D dzdydx =$

$\int\limits_{-a}^{a} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dzdydx$. Κρατώντας τα x και y σταθερά και ολοκληρώνοντας ως προς z παίρνουμε ,

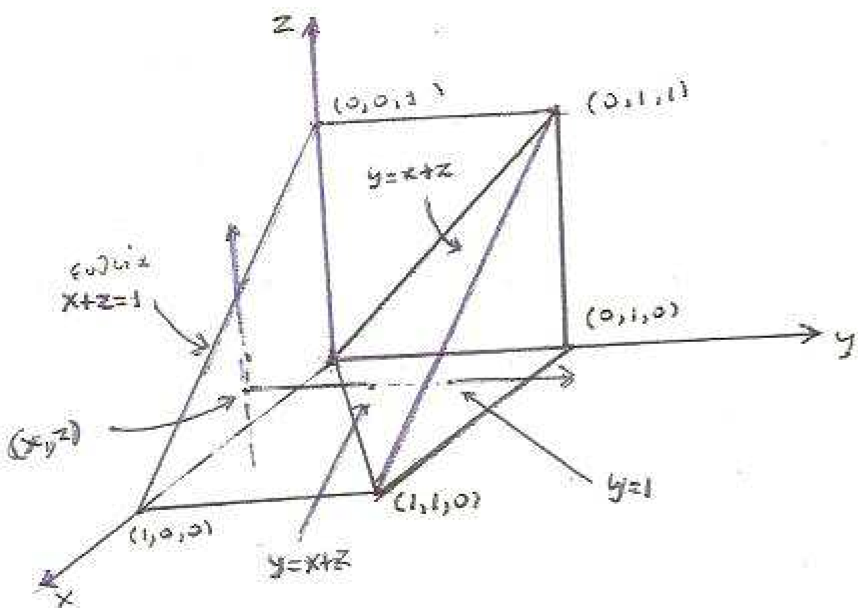
$$V = 2\int\limits_{-a}^{a}\left(\int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\right)dx .$$

Επειδή το x είναι σταθερό στο ολοκλήρωμα ως προς dy, αυτό το ολοκλήρωμα είναι της μορφής $\int\limits_{-\beta}^{\beta} \sqrt{\beta^2-y^2}\,dy$ με $\beta = \sqrt{a^2-x^2}$. Αυτό το ολοκλήρωμα παραστάνει το εμβαδόν ενός ημικυκλίου ακτίνας β, οπότε $\int\limits_{-\beta}^{\beta} \sqrt{\beta^2-y^2}\,dy = \frac{\beta^2\pi}{2} = \frac{a^2-x^2}{2}\cdot\pi$

Έπεται ότι, $V = 2\int\limits_{-a}^{a} \pi\cdot\frac{a^2-x^2}{2}dx = \pi\int\limits_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx = \pi\left[a^2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a^3$.

Δηλαδή βρίσκουμε τον γνωστό μας από την Γεωμετρία τύπο για τον όγκο της σφαίρας.

(β)



Η προβολή του δοθέντος τετραέδρου στο xy επίπεδο είναι το (κλειστό) ορθογώνιο (στο $(0,1,0)$) τρίγωνο με κορυφές τα $(0,0,0),(0,1,0),(1,1,0)$, το οποίο είναι ένα χωρίο τύπου 1 στο xy επίπεδο και περιγράφεται ως τα $(x,y)\in R^2$: $0\le x\le 1$ και $x\le y\le 1$, δηλαδή $\Re=\{(x,y)\in R^2 : 0\le x\le 1 \text{ και } x\le y\le 1\}$.

Η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα $(0,0,0),(1,1,0)$ και $(0,1,1)$ είναι η $y=x+z$ και επειδή το τρίγωνο με κορυφές $(0,0,0),(1,1,0)$ και $(0,1,1)$ προβάλλεται στο $\Re$, έχουμε ότι $0\le z\le y-x$. Έτσι το τετράεδρο έχει την ακόλουθη περιγραφή: $0\le x\le 1, x\le y\le 1$ και $0\le z\le y-x$.

Έπεται ότι: $\iiint\limits_D f(x,y,z)dzdydx=\int\limits_0^1\int\limits_x^1\int\limits_0^{y-x} f(x,y,z)dzdydx$.

Ιδιαίτερα αν $f(x,y,z)=1$ (η σταθερά συνάρτηση ίση με 1) θα υπολογίσουμε τον όγκο $V(D)$ του D :

$$V(D)=\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^1\left(\int\limits_0^{y-x} dz\right)dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(\int\limits_x^1(y-x)\,dy\right)dx=\int\limits_0^1\left[\frac{y^2}{2}-xy\right]_{y=x}^{y=1}dx=\int\limits_0^1\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_0^1=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Αν προβάλλουμε το τετράεδρο στο xz επίπεδο τότε η προβολή του είναι το ορθογώνιο στο $(0,0,0)$ τρίγωνο με κορυφές τα $(0,0,0),(0,0,1),(1,0,0)$ το οποίο περιγράφεται ως τα $(x,z)\in R^2 : 0\le x\le 1$ και $0\le z\le 1-x$, δηλαδή $\mathrm{T}=\{(x,y)\in R^2 : 0\le x\le 1 \text{ και } 0\le z\le 1-x\}$.

Αν $(x,z)\in \mathrm{T}$ τότε το $(x,y,z)\in D$ αν και μόνο αν (βλέπε σχήμα), $x+z\le y\le 1$. Έπεται ότι το τετράεδρο έχει και την ακόλουθη περιγραφή: $D=\{(x,y,z)\in R^3 : 0\le x\le 1, 0\le z\le 1-x \text{ και } x+z\le y\le 1\}$

Έπεται ότι, $\iiint\limits_D f(x,y,z)dydzdx=\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x}\int\limits_{x+z}^1 f(x,y,z)dydzdx$.

Αν $f(x,y,z)=1$, βρίσκουμε πάλι $V(D)=\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x}\int\limits_{x+z}^1 dydzdx=\dfrac{1}{6}$

Σημείωση Ο όγκος του τετραέδρου $V(D)=\iiint\limits_D dxdydz$ μπορεί να υπολογισθεί και ως διπλό ολοκλήρωμα. Αφού το D μπορεί να θεωρηθεί ως το στερεό που φράσσεται από πάνω από το επίπεδο $z=y-x$ και από κάτω στο xy επίπεδο από το τρίγωνο $\Re=\{(x,y)\in R^2 : 0\le x\le 1 \text{ και } x\le y\le 1\}$.

Έτσι έχουμε $\iint_{\Re}(y-x)dxdy=\int_0^1\left(\int_x^1(y-x)\,dy\right)dx=\ldots=\frac{1}{6}$. Ανάλογη παρατήρηση και για τον όγκο της σφαίρας $x^2+y^2+z^2\le a^2,(a>0)$. Έτσι έχουμε, $V=2\int_A f(x,y)dxdy$, όπου $A=\left\{(x,y):-a\le x\le a,-\sqrt{a^2-x^2}\le y\le\sqrt{a^2-x^2}\right\}$ και $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2},(x,y)\in A$.