Υπολογισμός διπλών ολοκληρωμάτων με διαδοχική ολοκλήρωση

Υπάρχουν δύο θεμελιώδη αποτελέσματα που μας βοηθούν να υπολογίζουμε πολλαπλά ολοκληρώματα.
Το πρώτο αποτέλεσμα σχετίζεται με τον υπολογισμό ενός πολλαπλού ολοκληρώματος με διαδοχική ολοκλήρωση και είναι το θεώρημα Fubini και το δεύτερο που θα εξετάσουμε αργότερα με την αλλαγή μεταβλητής.
Διατυπώνουμε το θεώρημα Fubini προς το παρόν για συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

18.1 Θεώρημα (Fubini) Έστω $\Re=[a,b]\times[c,d]\subseteq R^2$ κλειστό ορθογώνιο στον R^2 και $f:\Re\to R$ φραγμένη συνάρτηση.

(ι) Αν η f είναι συνεχής στο $\Re$ τότε $\int\limits_{\Re} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$ όπου το σύμβολο $\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx$, σημαίνει ότι η συνάρτηση $x\in[a,b]\to\int\limits_c^d f(x,y)dy$ ολοκληρώνεται στο $[a,b]$.

(ιι) Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\Re$. Αν επιπλέον τα ολοκληρώματα $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ υπάρχουν για κάθε $x\in[a,b]$ τότε (η $x\in[a,b]\to\int\limits_c^d f(x,y)dy$ ολοκληρώνεται στο $[a,b]$ και) ισχύει $\int\limits_{\Re} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx$.

Ανάλογα αν τα ολοκληρώματα $\int\limits_a^b f(x,y)dx$ υπάρχουν για κάθε $y\in[c,d]$ τότε $\int\limits_{\Re} f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$.

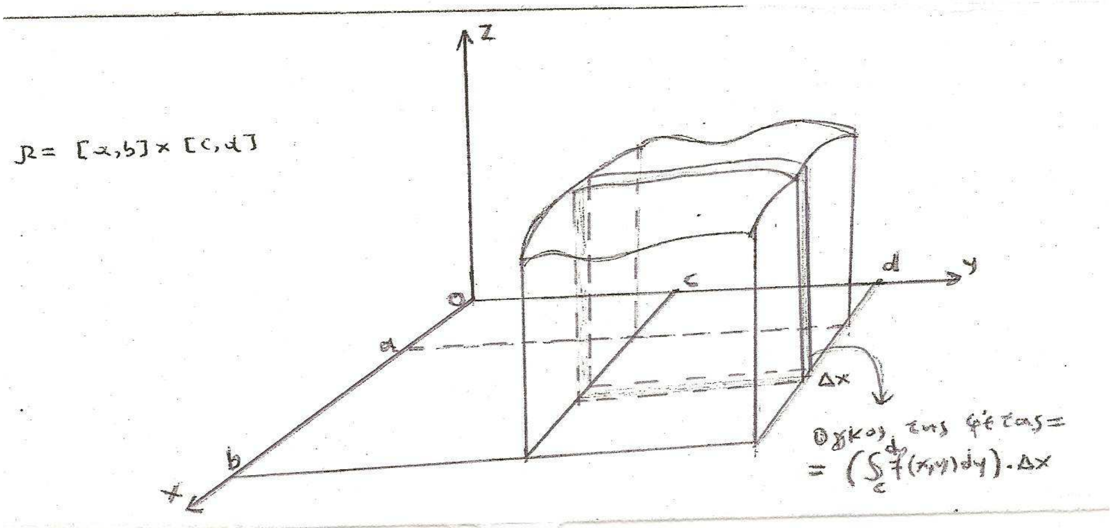
Συνεπώς αν όλες αυτές οι συνθήκες ισχύουν ταυτόχρονα τότε $\int\limits_{\Re} f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f(x,y)dx\right)dy$.

Παρατηρήσεις. 1) Οι υποθέσεις που κάναμε στον ισχυρισμό (ιι) του θεωρήματος είναι περισσότερες απ' ότι στον (ι). Είναι όμως αναγκαίες γιατί αν η f δεν είναι παντού συνεχής δεν έπεται αναγκαία ότι το ολοκλήρωμα $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ θα υπάρχει για κάθε $x\in[a,b]$.

2) Ένα ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει και για συναρτήσεις $n-$μεταβλητών με $n\geq 2$. Αν π.χ. η $f:[a,b]\times[c,d]\times[u,v]\to R$ είναι συνεχής και $\mathrm{I}=\int\limits_{\Re} f(x,y,z)dxdydz$ είναι η τιμή του τριπλού ολοκληρώματος, τότε υπάρχουν $3!=6$ διαδοχικά ολοκληρώματα

της συνάρτησης $f(x,y,z)$ όλα μεταξύ τους ίσα. Π.χ.
$$\mathrm{I}=\int_a^b\left(\int_c^d\left(\int_u^v f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_u^v\left(\int_a^b f(x,y,z)dx\right)dz\right)dy$$

<u>Ποιοτική εξήγηση του θεωρήματος Fubini</u>



Έστω $f:[a,b]\times[c,d]\to R$ συνεχής με $f\geq 0$. Αν τεμαχίσουμε τον όγκο κάτω από το γράφημα της f σε λεπτές φέτες π.χ. παράλληλες με το yz επίπεδο, τότε προσεγγιστικά ο όγκος αυτός ισούται με το άθροισμα των ποσοτήτων $\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]\cdot\Delta x$, αφού $\int_c^d f(x,y)dy$ είναι το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της $f_x : y\in[c,d]\to f(x,y)\in R$.

Έπεται προφανώς ότι: $\int_{\Re} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$ (1).

Με ανάλογη διαδικασία τεμαχισμού σε φέτες παράλληλες με το xz επίπεδο καταλήγουμε στον τύπο $\int_{\Re} f(x,y)dxdy=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$ (2)

Τελικά από τις (1) και (2) λαμβάνουμε τον τύπο του Fubini: $\int_{\Re} f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$.

Ως ένα αλγεβρικό ανάλογο του θεωρήματος Fubini αναφέρουμε και την γνωστή ταυτότητα: $\sum_{\kappa,\lambda=1}^{n} a_{\kappa\lambda}=\sum_{\kappa=1}^{n}\left(\sum_{\lambda=1}^{n} a_{\kappa\lambda}\right)$

Το θεώρημα Fubini μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων συναρτήσεων που δεν είναι ορισμένες αναγκαία σε ορθογώνια του R^2. Αυτό μπορεί να γίνει αν το συνδυάσουμε με τα αποτελέσματα των προηγουμένων παραγράφων.

Στην πράξη έχουμε το ακόλουθο πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα που είναι συνέπεια του θεωρήματος Fubini.

18.2 Θεώρημα Έστω $\varphi,\psi:[a,b]\to R$ συνεχείς συναρτήσεις ώστε $\varphi(x)\le\psi(x)$ για κάθε $x\in[a,b]$. Θέτομε $D=\{(x,y)\in R^2 : a\le x\le b \text{ και } \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$.

Έστω $f:D\to R$ συνεχής. Τότε $\int\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx$.

Απόδειξη: Παρατηρούμε ότι το D είναι συμπαγές υποσύνολο του R^2 (γιατί;) και η f ως συνεχής στο D είναι φραγμένη. Έστω $\mathfrak{R}=[a,b]\times[c,d]$ κλειστό ορθογώνιο ώστε $D\subseteq\mathfrak{R}$ (μπορούμε να πάρουμε ως $c=\min\{\varphi(x):x\in[a,b]\}$ και $d=\max\{\psi(x):x\in[c,d]\}$ αφού οι φ,ψ είναι συνεχείς). Ορίζουμε την συνάρτηση

$g:\mathfrak{R}\to R$ ώστε $g(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & \text{αν } (x,y)\in D\\ 0, & \text{αν } (x,y)\in\mathfrak{R}-D\end{cases}$

Τα σημεία ασυνέχειας της g είναι όλα στο σύνορο του D, το οποίο είναι ένωση των γραφημάτων των συναρτήσεων φ,ψ και δύο κατακόρυφων ευθυγράμμων τμημάτων του R^2, έτσι το ∂D έχει διδιάστατο μέτρο μηδέν και η g από το θεώρημα 17.9 της σελίδας 176 (ή το πόρισμα 17.10 της σελίδας 176) είναι ολοκληρώσιμη.

Έπεται ότι $\int\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_{\mathfrak{R}} g(x,y)dxdy$ (1)

Από το θεώρημα Fubini έχουμε $\int\limits_{\mathfrak{R}} g(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d g(x,y)dy\right)dx$ (2), αφού τα ολοκληρώματα $\int\limits_c^d g(x,y)dy$ υπάρχουν για κάθε $x\in[a,b]$ και μάλιστα, $\int\limits_c^d g(x,y)dy=\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$ (3).

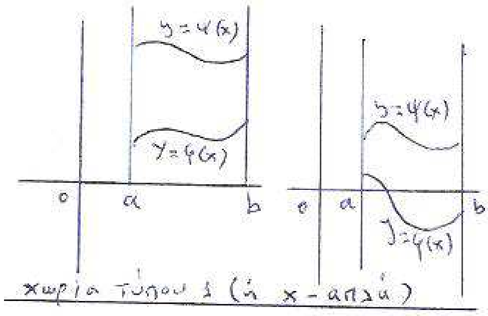
(Η συνάρτηση $y\in[c,d]\to g(x,y)$ είναι ολοκληρώσιμη για κάθε $x\in[a,b]$ αφού είναι φραγμένη και ενδεχομένως ασυνεχής μόνο στα σημεία $\varphi(x)$ και $\psi(x)$).

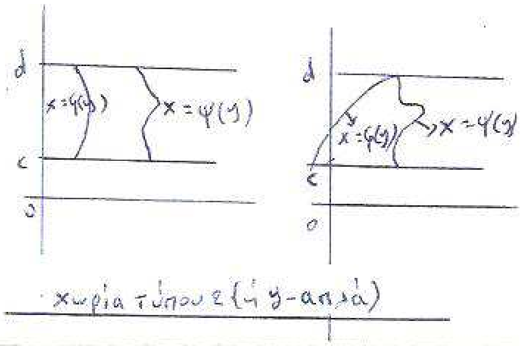
Από τις εξισώσεις (1),(2) και (3) έπεται το συμπέρασμα.

Παρατηρήσεις 1) Ένας ανάλογος τύπος ισχύει και για σύνολα της μορφής, $D=\{(x,y)\in R^2 : y\in[c,d] \text{ και } \varphi(y)\le x\le\psi(y)\}$ όπου $\varphi,\psi:[c,d]\to R$ συνεχείς συναρτήσεις και $\varphi(y)\le\psi(y)$ για κάθε $y\in[c,d]$. Αν $f:D\to R$ συνεχής συνάρτηση τότε: $\int\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d\left(\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx\right)dy$.

Σημειώνουμε ακόμη ότι το θεώρημα 18.2 ισχύει και με την υπόθεση ότι η f είναι ορισμένη στο εσωτερικό $\operatorname{int}(D)$ του D και είναι συνεχής και φραγμένη εκεί (γιατί;). Δες επίσης και την άσκηση 5(β) αυτής της παραγράφου.

2) Τα υποσύνολα του R^2 που εμφανίζονται στην διατύπωση του θεωρήματος 18.2 καθώς και στην παρατήρηση (1) ονομάζονται <u>χωρία</u> του <u>τύπου 1</u> και του <u>τύπου 2</u>. Μερικές φορές ονομάζονται και $x-$απλά αντίστοιχα $y-$απλά σύνολα.





<u>Χωρία τύπου 3</u> ονομάζονται αυτά που μπορούν να έχουν ταυτόχρονα και τις δύο περιγραφές, δηλαδή να είναι του τύπου 1 αλλά και του τύπου 2. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι ο μοναδιαίος δίσκος. Συνήθως τα χωρία τύπου 1,2 και 3, αναφέρονται και ως <u>στοιχειώδη χωρία</u>. Παρατηρούμε ότι ένα <u>στοιχειώδες χωρίο</u> είναι <u>συμπαγές</u> υποσύνολο του R^2.

3) Στην περίπτωση που στο θεώρημα 18.2 (πόρισμα του Fubini) έχουμε $f(x,y)=1$ για $(x,y)\in D$ τότε ,

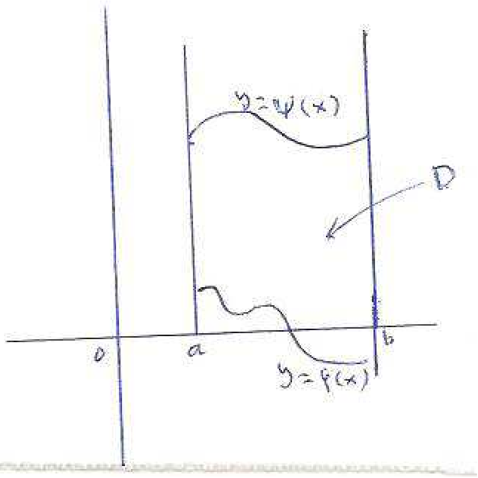
$$\int_D dxdy = \mathrm{A}(D) = \text{το εμβαδό του } D.$$

Πράγματι,

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx = \int_a^b\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy\right)dx = \int_a^b\left(\psi(x)-\varphi(x)\right)dx = \text{το εμβαδόν}$$

του χωρίου D, όπως γνωρίζουμε και από το Λογισμό της μιας μεταβλητής (πρβλ και με τον ορισμό 17.8 του όγκου ενός Jordan μετρήσιμου συνόλου στην σελίδα 174).

$$A(D)=\int_D dxdy$$



Το θεώρημα μέσης τιμής για πολλαπλά ολοκληρώματα

Όπως και στον Λογισμό της μιας μεταβλητής τα πολλαπλά ολοκληρώματα ικανοποιούν μια ιδιότητα μέσης τιμής.

18.3 Λήμμα Έστω $\mathrm{A} \subseteq R^n$ Jordan μετρήσιμο και $f, g : \mathrm{A} \to R$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύουν

(ι) Αν $f \le g$ (δηλαδή $f(x) \le g(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$) τότε $\int_{\mathrm{A}} f(x)dx \le \int_{\mathrm{A}} g(x)dx$.

(ιι) Αν $|f(x)| \le \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$ τότε $\left|\int_{\mathrm{A}} f(x)dx\right| \le \mathrm{M} \cdot V(\mathrm{A})$.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε την ανισότητα όταν A είναι κλειστό ορθογώνιο του R^n. Από τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann έπεται ότι $\int_{\mathrm{A}} (g - f)dx \ge 0$ και συνεπώς έπεται η ζητούμενη ανισότητα.

(ιι) Η $|f(x)| \le \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$ ισοδυναμεί με την $-\mathrm{M} \le f(x) \le \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$ (1)

Επειδή οι σταθερές(όταν είναι ορισμένες σε Jordan μετρήσιμα σύνολα) είναι ολοκληρώσιμες και $\int_{\mathrm{A}} \mathrm{M}dx = \mathrm{M} \cdot V(\mathrm{A})$ (Πρβλ το παράδειγμα 1 μετά την Προτ. 16.7).

Έπεται από την (1) ότι, $-\mathrm{M} \cdot V(\mathrm{A}) \le \int_{\mathrm{A}} f(x)dx \le \mathrm{M} \cdot V(\mathrm{A})$ και άρα η προς απόδειξη ανισότητα.

18.4 Θεώρημα (μέσης τιμής για ολοκληρώματα). Αν η $f : \mathrm{A} \to R$ είναι συνεχής και το A Jordan μετρήσιμο συμπαγές και συνεκτικό, τότε υπάρχει $x_0 \in \mathrm{A}$ ώστε

$$\int_{\mathrm{A}} f(x)\,dx = f(x_0) \cdot V(\mathrm{A}).$$

Αν $V(\mathrm{A}) \ne 0$, η ποσότητα $\frac{1}{V(\mathrm{A})} \cdot \int_{\mathrm{A}} f(x)dx$ ονομάζεται η <u>μέση τιμή</u> της f επί του A.

Απόδειξη: Έστω $\lambda = \frac{1}{V(\mathrm{A})} \cdot \int_{\mathrm{A}} f(x)dx$. (Αν $V(\mathrm{A}) = 0$ τότε το αποτέλεσμα έπεται προφανώς από τον ισχυρισμό (ιι) του Λήμματος 18.3). Θέτομε $m = \min\{f(x) : x \in \mathrm{A}\}$ και $\mathrm{M} = \max\{f(x) : x \in \mathrm{A}\}$ (επειδή f συνεχής και A συμπαγές η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο A). Συνεπώς $m \le f(x) \le \mathrm{M}$ για κάθε $x \in \mathrm{A}$.

Άρα από το Λήμμα 18.3 έπεται ότι $m \cdot V(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} m dx \le \int_{\mathrm{A}} f(x)dx \le \int_{\mathrm{A}} \mathrm{M}dx = \mathrm{M} \cdot V(\mathrm{A})$,

ή
$$m \le \frac{1}{V(\mathrm{A})} \int_{\mathrm{A}} f(x)\,dx \le \mathrm{M}$$

Επειδή το Α είναι συνεκτικό και η f συνεχής, η f ικανοποιεί το θεώρημα ενδιαμέσου τιμής , και άρα υπάρχει $x_0 \in \mathrm{A}$ ώστε $f\left(x_0\right) = \dfrac{1}{V\left(\mathrm{A}\right)} \cdot \int\limits_{\mathrm{A}} f\left(x\right) dx$.

Παρατήρηση. Μια πιο προσεκτική εξέταση της απόδειξης μας δείχνει ότι η υπόθεση της συμπάγειας δεν είναι απαραίτητη αρκεί βέβαια η f να υποτεθεί φραγμένη.

Ένα υποσύνολο Α του R^n λέγεται <u>κατά τόξα συνεκτικό</u>, αν για κάθε $z, \omega \in \mathrm{A}$ υπάρχει καμπύλη γ του Α που συνδέει το z με το ω, δηλαδή υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\gamma : \left[a, b\right] \to \mathrm{A}$ ώστε $\gamma\left(a\right) = z$ και $\gamma\left(b\right) = \omega$. Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι κάθε κατά τόξα συνεκτικό σύνολο είναι και συνεκτικό. Η απόδειξη έπεται όπως και για τα κυρτά σύνολα με χρήση του Λήμματος 3.20. Όπως έπεται από τα αποτελέσματα της σχετικής παραγράφου (για τα συνεκτικά σύνολα) παραδείγματα κατά τόξα συνεκτικών συνόλων είναι βέβαια τα κυρτά σύνολα καθώς και τα ανοικτά και συνεκτικά σύνολα. Επίσης δεν είναι δύσκολο να αποδειχθεί το ακόλουθο αποτέλεσμα η απόδειξη του οποίου αφήνεται ως άσκηση:

18.5 Πρόταση Κάθε στοιχειώδες χωρίο D του επιπέδου είναι κατά τόξα συνεκτικό και άρα συνεκτικό σύνολο.

Από το αποτέλεσμα αυτό και το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα έπεται αμέσως το ακόλουθο.

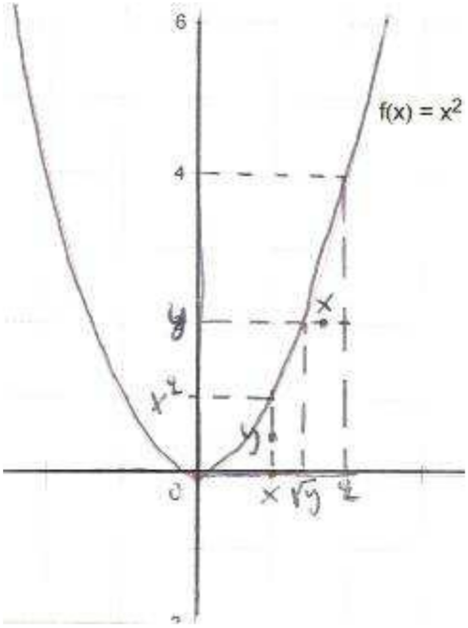
18.6 Θεώρημα. Έστω $D \subseteq R^2$ στοιχειώδες χωρίο και $f : D \to R$ συνεχής. Τότε για κάποιο $\left(x_0, y_0\right) \in D$ ισχύει ότι $\int\limits_D f\left(x, y\right) dxdy = f\left(x_0, y_0\right) \cdot V\left(D\right)$.

Απόδειξη Υπενθυμίζουμε ότι ένα στοιχειώδες χωρίο είναι συμπαγές σύνολο, επειδή είναι και συνεκτικό το συμπέρασμα είναι προφανής συνέπεια του θεωρήματος 18.4.

Παραδείγματα (1)Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\int\limits_D xydxdy$, όπου D είναι το επίπεδο χωρίο μεταξύ της παραβολής $y = x^2$ και των ευθειών $y = 0$ και $x = 2$.

Λύση $D=\{(x,y)\in R^2 : 0\le x\le 2 \text{ και } 0\le y\le x^2\}$

$=\{(x,y): 0\le y\le 4 \text{ και } \sqrt{y}\le x\le 2\}$.



Το D είναι χωρίο του τύπου 3 έτσι έχουμε

$$\int_D xydxdy=\int_0^2\left(\int_0^{x^2} xydy\right)dx=\int_0^2\left[\frac{xy^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x^2}dx$$

$=\int_0^2 \frac{x^5}{2}dx=\frac{16}{3}$, επειδή D είναι του τύπου 1.

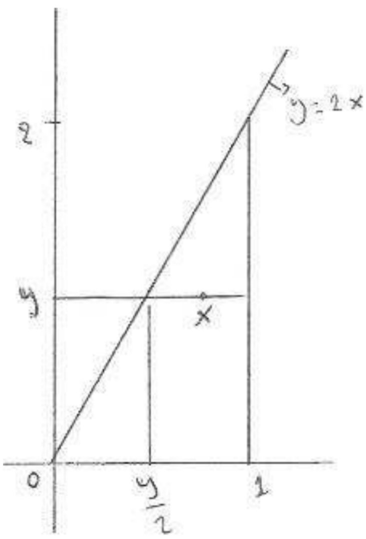
Επίσης επειδή D είναι και του τύπου 2, υπολογίζουμε

$$\int_D xydxdy=\int_0^4\left(\int_{\sqrt{y}}^{2} xydx\right)dy=\int_0^4\left[\frac{x^2y}{2}\right]_{x=\sqrt{y}}^{x=2}dy=$$

$$\int_0^4\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)dy=\frac{16}{3}.$$

2)Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\int_D (x+y)dxdy$, όπου το D το τρίγωνο που καθορίζεται από τις ευθείες $y=0$, $y=2x$ και $x=1$.

Λύση $D=\{(x,y): 0\le x\le 1 \text{ και } 0\le y\le 2x\}=\left\{(x,y): 0\le y\le 2, \frac{y}{2}\le x\le 1\right\}$



Το D είναι χωρίο τύπου 3

Επειδή το D είναι τύπου 1 υπολογίζουμε:

$$\int_D (x+y)dxdy=\int_0^1\left(\int_0^{2x}(x+y)dy\right)dx=\int_0^1\left[xy+\frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2x}dx=$$

$$\int_0^1\left[x(2x)+\frac{1}{2}(2x)^2-\left(x(0)+\frac{1}{2}(0)^2\right)\right]dx$$

$$=\int_0^1 4x^2dx=\left[\frac{4}{3}x^3\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

Επειδή το D είναι και <u>τύπου 2</u> υπολογίζουμε:

$$\int_D (x+y)dxdy = \int_0^2 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{1} (x+y)dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2}x^2 + xy \right]_{x=\frac{y}{2}}^{x=1} dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{2} + y - \frac{y^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right] dy =$$

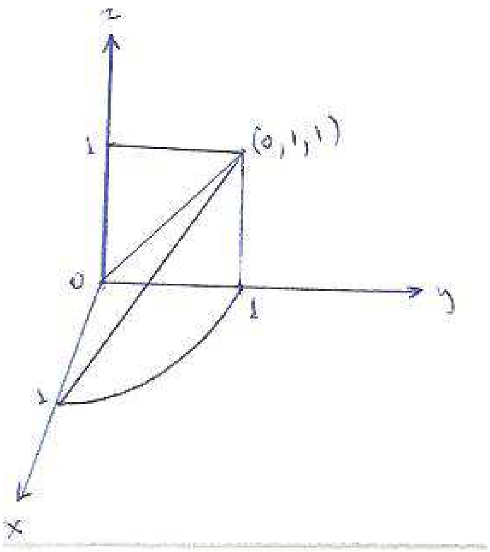
$$\left[\frac{y}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{5y^3}{24} \right]_{y=0}^{y=2} = \left[1 + 2 - \frac{5 \cdot 8}{24} \right] - 10 = \frac{4}{3}.$$

3) Υπολογισμός όγκου με χρήση διπλού ολοκληρώματος

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από πάνω από το επίπεδο $z = y$ και από κάτω στο xy επίπεδο από το πρώτο τεταρτημόριο D του μοναδιαίου δίσκου $x^2 + y^2 \le 1$.

Λύση Η συνάρτηση $z = f(x, y)$ που ολοκληρώνουμε στο D είναι η $z = f(x, y) = y$ (η δεύτερη προβολή $\pi_2 : R^2 \to R$)

Το D είναι χωρίο του <u>τύπου 3</u>. Επομένως ο ζητούμενος όγκος V υπολογίζεται με δύο τρόπους:



$$V = \int_D ydxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydy \right) dx =$$

$\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} ydx \right) dy$. Υπολογίζουμε το δεύτερο διαδοχικό ολοκλήρωμα και έτσι βρίσκουμε:

$$V = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-y^2}} ydx \right) dy = \int_0^1 y\left(\sqrt{1-y^2} \right) dy =$$

$\left[-\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$. Το D περιγράφεται ως:

$$D = \left\{ (x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \right\} \text{ (τύπου 1)}$$

$$= \left\{ (x, y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le \sqrt{1-y^2} \right\} \text{ (τύπου 2)}$$

Για τον υπολογισμό της παράγουσας, $\int y\sqrt{1-y^2}dy$, θέτομε $u = 1 - y^2$, συνεπώς $du = (-2y)dy$. Έπεται ότι,

$$\int y\sqrt{1-y^2}dy = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-y^2}\,(-2y)dy = -\frac{1}{2}\int \sqrt{u}du =$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] = -\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{u=1-y^2} = -\frac{1}{3}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης

Έστω $D \subseteq R^2$ <u>χωρίο τύπου 3</u> και $f : D \to R$ συνεχής συνάρτηση. Το D περιγράφεται με δύο τρόπους (ως τύπου 1 και 2) και άρα

$$D = \{(x,y) : a \le x \le b \text{ και } \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} =$$
$$= \{(x,y) : c \le y \le d \text{ και } \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}.$$

Έχουμε επομένως τους τύπους:

$$\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dx \right) dy .$$

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το ένα από τα δύο διαδοχικά ολοκληρώματα – και τελικά το διπλό ολοκλήρωμα $\int_D f(x,y)dxdy$ - μπορούμε να το κάνουμε υπολογίζοντας το άλλο (εκείνο που υπολογίζεται ευκολότερα). Αυτή η τεχνική λέγεται <u>αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης</u>

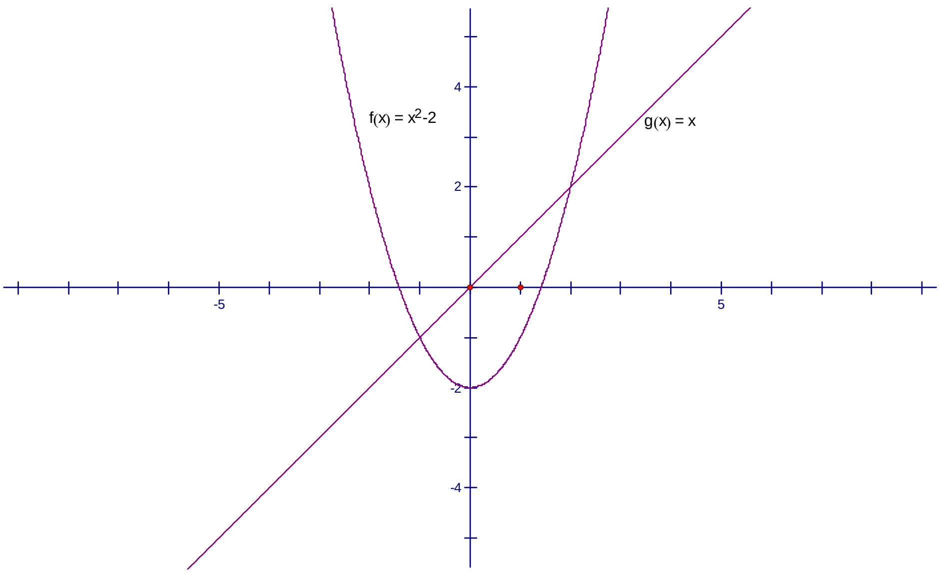
Παραδείγματα. 1)Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται (φράσσεται) από την παραβολή $y = x^2 - 2$ και την ευθεία $y = x$.

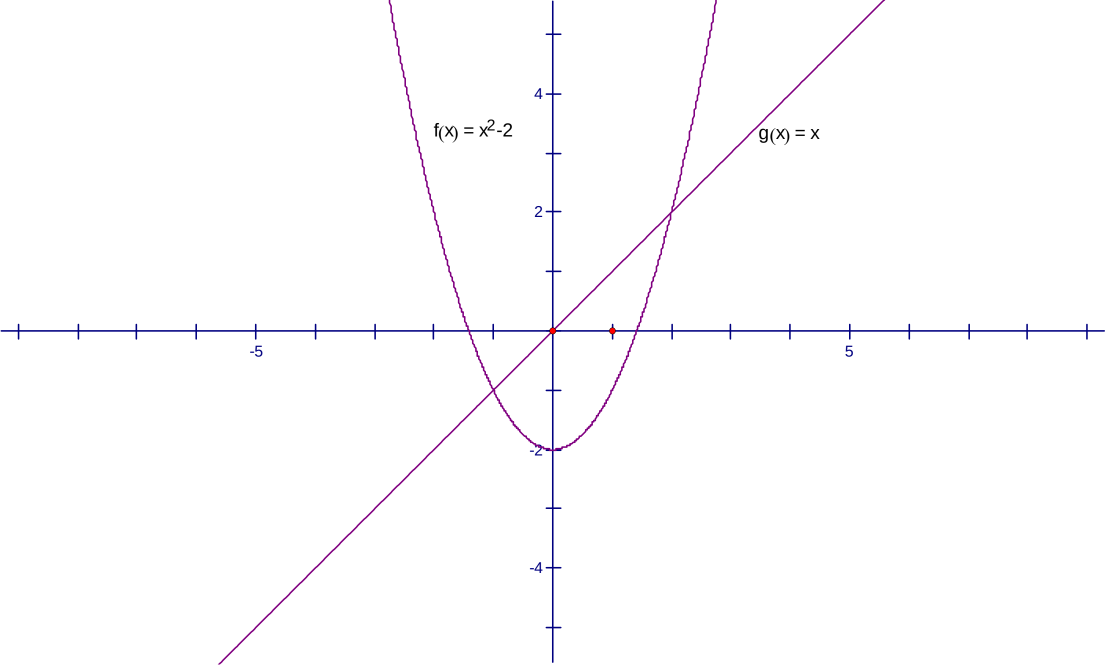
Λύση Το χωρίο D είναι του τύπου 1 και του τύπου 2, αφού

$$D = \{(x,y) : -1 \le x \le 2, x^2 - 2 \le y \le x\} = \overbrace{\{(x,y) : -2 \le y \le -1, -\sqrt{y+2} \le x \le \sqrt{y+2}\}}^{D_1} \cup$$
$$\overbrace{\{(x,y) : -1 \le y \le 2, y \le x \le \sqrt{y+2}\}}^{D_2}$$

<u>Σχήμα Ι</u>

Περιγραφή τύπου 1: $-1 \le x \le 2, x^2 - 2 \le y \le x$





Σχήμα ΙΙ

Περιγραφή τύπου 2:

Υπολογίζοντας το εμβαδόν του D ως χωρίο του τύπου 1, έχομε:
$$\mathrm{A}(D)=\int_D dxdy=\int_{-1}^{2}\left(\int_{x^2-2}^{x} dy\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(x-\left(x^2-2\right)\right)dx=\int_{-1}^{2}\left(x-x^2+2\right)dx=$$
$$\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+2x\right]_{-1}^{2}=\frac{9}{2}$$
Αν, όμως, θεωρηθεί ως χωρίο τύπου 2, είναι αναγκαίο να το διασπάσουμε σε δύο μέρη (χωρία) όπως στο Σχήμα ΙΙ.

Επομένως το εμβαδόν $\mathrm{A}(D)$ δίδεται από το άθροισμα των διαδοχικών ολοκληρωμάτων: $\mathrm{A}(D)=\int_{D_1} dxdy+\int_{D_2} dxdy=\int_{-2}^{-1}\left(\int_{-\sqrt{y+2}}^{\sqrt{y+2}} dx\right)dy+\int_{-1}^{2}\left(\int_{y}^{\sqrt{y+2}} dx\right)dy=\ldots=\frac{9}{2}$.

Είναι σαφές ότι ο υπολογισμός του εμβαδού $\mathrm{A}(D)$ θεωρώντας το D ως χωρίο τύπου 1 είναι συντομότερος.

Σημείωση Τα σημεία τομής της παραβολής $y=x^2-2$ και της ευθείας $y=x$ βρίσκονται λύνοντας την εξίσωση $x^2-2=x \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=-1$.

Άρα τα σημεία τομής είναι τα $(2,2)$, $(-1,-1)$.

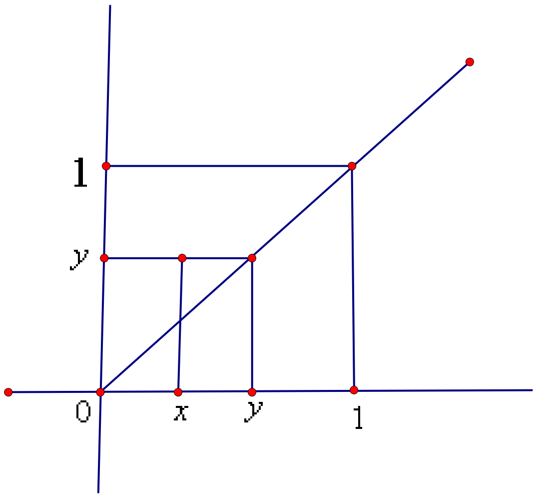
Από το προηγούμενο παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι η <u>μορφή</u> του χωρίου ολοκλήρωσης D μπορεί να <u>καθορίζει</u> ποια <u>διάταξη</u> (διαδοχικής) ολοκλήρωσης είναι περισσότερο κατάλληλη για τον υπολογισμό μας. Όπως θα δούμε όμως στο επόμενο παράδειγμα η προς <u>ολοκλήρωση συνάρτηση</u> παίζει και αυτή ρόλο στην επιλογή της <u>σειράς</u> ολοκλήρωσης.

2)Υπολογίστε το διαδοχικό ολοκλήρωμα $\int_0^1\left(\int_x^1 e^{y^2}dy\right)dx$.

Λύση Δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το δοσμένο ολοκλήρωμα με την διάταξη η οποία δίδεται καθώς η παράγουσα της συνάρτησης $y \in R \to e^{y^2} \in R$ <u>δεν</u> είναι στοιχειώδης συνάρτηση (<u>δεν</u> μπορεί να υπολογισθεί)
Έτσι το δοσμένο ολοκλήρωμα θα υπολογισθεί αντιστρέφοντας την σειρά ολοκλήρωσης. Το χωρίο ολοκλήρωσης δίδεται στο ακόλουθο σχήμα και είναι βέβαια τύπου 3.
Παρατηρούμε ότι,

$$\int_D e^{y^2}dxdy = \int_0^1\left(\int_x^1 e^{y^2}dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^y e^{y^2}dx\right)dy = \int_0^1 ye^{y^2}dy = \left[\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^1 - e^0\right) = \frac{1}{2}(e-1)$$
(1)

$$D = \{(x,y): 0 \le x \le 1, x \le y \le 1\} \text{(τύπου 1)}$$
$$= \{(x,y): 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y\} \text{(τύπου 2)}$$



(1) Για τον υπολογισμό της παραγούσης $\int ye^{y^2}dy$, θέτομε $u = y^2$ άρα $du = 2ydy$. Έπεται ότι, $\int ye^{y^2}dy = \frac{1}{2}\int e^{y^2}2ydy = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u\Big|_{u=y^2}$.

Παράδειγμα 3. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

(1) $\int_0^1\left(\int_y^1 \frac{dx}{(1+x^3)^5}\right)ydy$ και (2) $\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1 \frac{dx}{(1+x^5)^7}\right)ydy$.

Λύση (1) Πρόκειται για μία από τις δύο εκφράσεις του διπλού ολοκληρώματος $\int_D \frac{y}{(1+x^3)^5}dxdy$ στο ακόλουθο χωρίο D που είναι τύπου 3,

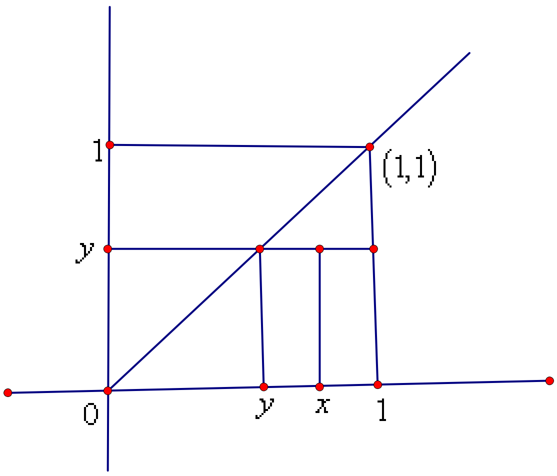
$$D = \overbrace{\{(x,y): 0 \le y \le 1 \text{ και } y \le x \le 1\}}^{\text{τύπου 2}} = \overbrace{\{(x,y): 0 \le x \le 1 \text{ και } 0 \le y \le x\}}^{\text{τύπου 1}}.$$

Ισχύει ότι,

$$\int_D \frac{y}{(1+x^3)^5}dxdy = \underbrace{\int_0^1\left(\int_y^1 \frac{y}{(1+x^3)^5}dx\right)dy}_{\text{τύπου 2}}$$

$$= \underbrace{\int_0^1\left(\int_0^x \frac{y}{(1+x^3)^5}dy\right)dx}_{\text{τύπου 1}}$$

Το δοσμένο διαδοχικό ολοκλήρωμα υπολογίζεται δύσκολα. Έτσι,



υπολογίζουμε το δεύτερο διαδοχικό ολοκλήρωμα που προκύπτει από την έκφραση του D ως χωρίο τύπου 1.

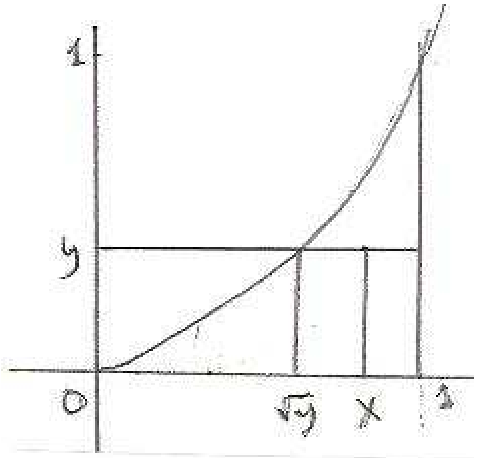
Έτσι έχουμε:

$$\int_0^1\left(\int_0^x \frac{y}{\left(1+x^3\right)^5}dy\right)dx = \int_0^1\left(\frac{1}{\left(1+x^3\right)^5}\cdot\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^1\frac{x^2}{\left(1+x^3\right)^5}dx =$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1\frac{d\left(x^3+1\right)}{\left(x^3+1\right)^5} \overset{*}{=} \frac{1}{6}\int_1^2\frac{du}{u^5} = \frac{1}{6}\left[\frac{u^{-4}}{-4}\right]_1^2 = -\frac{1}{6}\left[\frac{u^{-4}}{4}\right]_1^2 = -\frac{1}{6}\left[\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right]$$

* Εδώ χρησιμοποιούμε την αλλαγή μεταβλητής $u = 1+x^3 \Leftrightarrow du = 3x^2dx$

(2) Όσον αφορά το 2$^{\text{ο}}$ διαδοχικό ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{\sqrt{y}}^1\frac{dx}{\left(1+x^5\right)^7}\right)ydy$, παρατηρούμε ότι το χωρίο ολοκλήρωσης είναι το $D=\left\{(x,y):0\le y\le 1 \text{ και } \sqrt{y}\le x\le 1\right\}$ και είναι τύπου 2, αλλά και τύπου 1, αν γραφεί ως $D=\left\{(x,y):0\le x\le 1 \text{ και } 0\le y\le x^2\right\}$



Έτσι αντί του δοθέντος διαδοχικού ολοκληρώματος, που υπολογίζεται δύσκολα υπολογίζουμε το διαδοχικό ολοκλήρωμα που προκύπτει από την έκφραση του D ως χωρίο τύπου 1 .

$$\int_0^1\left(\int_0^{x^2}\frac{y}{\left(1+x^5\right)^7}dy\right)dx = \int_0^1\left(\frac{1}{\left(1+x^5\right)^7}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x^2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^4}{\left(1+x^5\right)^7}dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\int_0^1\frac{d\left(1+x^5\right)}{\left(1+x^5\right)^7} = \frac{1}{10}\int_1^2\frac{du}{u^7}$$

$$=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{6}\left[\frac{1}{u^6}\right]_1^2 = -\frac{1}{60}\left(\frac{1}{64}-1\right) = \frac{63}{60\cdot 64}$$ Το

Παρατηρηση.Το ολοκλήρωμα $\displaystyle \mathrm{I}=\int_0^1\left(\int_x^1 e^{y^2}dy\right)dx$ του παραδείγματος (2),

υπολογίζεται και με ολοκλήρωση κατά μέρη: Θέτομε $\displaystyle G(x)=\int_x^1 e^{y^2}dy,\ x\in[0,1]$ και

παρατηρούμε ότι $\displaystyle G(x)=\int_0^1 e^{y^2}dy-\int_0^x e^{y^2}dy \Rightarrow G'(x)=-e^{x^2},\ x\in[0,1]$.

Άρα,

$$\mathrm{I}=\int_0^1 G(x)dx = \int_0^1 x'G(x)dx = \left[xG(x)\right]_0^1-\int_0^1 xG'(x)dx =$$

$$G(1)-\int_0^1 x\left(-e^{x^2}\right)dx = \int_0^1 xe^{x^2}dx = \ldots = \frac{1}{2}(e-1).$$