ΙΙΙ Ολοκληρωτικός Λογισμός πολλών μεταβλητών

Βασικές έννοιες στη μια μεταβλητή

Έστω $f:[a,b]\to R$ φραγμένη συνάρτηση ($a,b\in R, a<b$). Αν $\mathrm{P}=\{t_0=a<...<t_n=b\}$ είναι διαμέριση του $[a,b]$ θέτομε, $U(f,\mathrm{P})=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{M}_k(t_k-t_{k-1})$, όπου $\mathrm{M}_k=\sup\{f(t):t\in[t_{k-1},t_k]\}, k=1,2,...,n$ το <u>άνω άθροισμα</u> της f ως προς P και $L(f,\mathrm{P})=\sum_{k=1}^{n}m_k(t_k-t_{k-1})$, όπου $m_k=\inf\{f(t):t\in[t_{k-1},t_k]\}$, $k=1,2,...,n$ το <u>κάτω άθροισμα</u> της f ως προς P.

Αποδεικνύονται εύκολα οι ακόλουθες ιδιότητες:

1) $L(f,\mathrm{P})\leq U(f,\mathrm{P})$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$.

2) Αν $\mathrm{P}\subseteq Q$ (η Q είναι λεπτότερη της P) τότε $L(f,\mathrm{P})\leq L(f,Q)$ και $U(f,Q)\leq U(f,\mathrm{P})$

3) Για κάθε ζεύγος P,Q διαμερίσεων του $[a,b]$ ισχύει $L(f,\mathrm{P})\leq U(f,Q)$

(Για την απόδειξη θεωρούμε την $\mathrm{P}\cup Q$ και χρησιμοποιούμε την (2)).

Έπεται ότι: $\sup\{L(f,\mathrm{P}):\mathrm{P}\text{ διαμέριση του }[a,b]\}\leq\inf\{U(f,\mathrm{P}):\mathrm{P}\text{ διαμέριση του }[a,b]\}$.

Οι αριθμοί

$\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup\{L(f,\mathrm{P}):\mathrm{P}\text{ διαμέριση του }[a,b]\}$,

$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\{U(f,\mathrm{P}):\mathrm{P}\text{ διαμέριση του }[a,b]\}$ ονομάζονται <u>κάτω</u> και <u>άνω</u> ολοκλήρωμα της f. Προφανώς $\underline{\int_a^b} f(x)dx\leq\overline{\int_a^b} f(x)dx$.

Η f λέγεται ότι είναι <u>ολοκληρώσιμη</u> κατά Riemann στο $[a,b]$ αν και μόνο αν : $\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx$. Η κοινή τιμή του άνω και κάτω ολοκληρώματος ονομάζεται <u>ολοκλήρωμα Riemann</u> της f στο $[a,b]$, και συμβολίζεται με $\int_a^b f(x)dx$ δηλαδή

$$\int_a^b f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Έστω $f:[a,b]\to R$ φραγμένη συνάρτηση και $\mathrm{P}=\{t_0=a<...<t_n=b\}$ διαμέριση του $[a,b]$ τότε κάθε άθροισμα της μορφής $\sum_{k=1}^{n}f(x_k)(t_k-t_{k-1})$, όπου $x_k\in[t_{k-1},t_k]$, $k=1,2,...,n$, είναι τυχούσα επιλογή ενδιάμεσων σημείων σχετικά με την διαμέριση P,

ονομάζεται ένα <u>άθροισμα Riemann ως προς P</u> και συνήθως συμβολίζεται με $S\left(f,\mathrm{P}\right)$ ή $S\left(f,\mathrm{P},\left(x_k\right)\right)$ αν θέλουμε να δώσουμε έμφαση στην επιλογή ενδιάμεσων σημείων $\left(x_k\right)$. Παρατηρούμε ότι αν P είναι διαμέριση του $\left[a,b\right]$ τότε ισχύει $L\left(f,\mathrm{P}\right)\le S\left(f,\mathrm{P}\right)\le U\left(f,\mathrm{P}\right)$ για κάθε άθροισμα Riemann $S\left(f,\mathrm{P}\right)$.
Ο αριθμός $\delta\left(\mathrm{P}\right)=\max\left\{t_k-t_{k-1}:1\le k\le n\right\}$ ονομάζεται <u>λεπτότητα</u> της διαμέρισης P.
Οι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις χαρακτηρίζονται με τον ακόλουθο τρόπο.

16.1 Θεώρημα Έστω $f:\left[a,b\right]\to R$ φραγμένη συνάρτηση τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
(ι) Η f είναι ολοκληρώσιμη
(ιι) Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση P του $\left[a,b\right]$ ώστε $U\left(f,\mathrm{P}\right)-L\left(f,\mathrm{P}\right)\le\varepsilon$
(ιιι) Υπάρχει $\mathrm{I}\in R$ ώστε, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε αν P διαμέριση του $\left[a,b\right]$ με $\delta\left(\mathrm{P}\right)\le\delta$ τότε, $\left|S\left(f,\mathrm{P}\right)-\mathrm{I}\right|\le\varepsilon$
για κάθε άθροισμα Riemann $S\left(f,\mathrm{P}\right)$. (Τότε, $\mathrm{I}=\int_a^b f\left(x\right)dx$.)

Σημειώνουμε ότι ο ισχυρισμός (ιι) του θεωρήματος ονομάζεται <u>κριτήριο του Riemann</u>.

Με την βοήθεια της ομοιόμορφης συνέχειας και του κριτηρίου Riemann αποδεικνύεται επίσης το ακόλουθο θεμελιώδες.

16.2 Θεώρημα Αν η $f:\left[a,b\right]\to R$ είναι συνεχής τότε είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann

Παρατηρούμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να αποδειχθεί (με λίγο περισσότερη προσπάθεια) και για μια <u>φραγμένη</u> συνάρτηση με <u>πεπερασμένο</u> πλήθος ασυνεχειών.

Οι βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann περιγράφονται στην
16.3 Πρόταση. Έστω $f,g:\left[a,b\right]\to R$ φραγμένες συναρτήσεις. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:
(ι) Αν οι f,g είναι ολοκληρώσιμες τότε και η $\lambda f+\mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει $\int_a^b\left(\lambda f+\mu g\right)\left(x\right)dx=\lambda\int_a^b f\left(x\right)dx+\mu\int_a^b g\left(x\right)dx$, για κάθε $\lambda,\mu\in R$.
(ιι) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε και η $\left|f\right|$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει η θεμελιώδης ανισότητα $\left|\int_a^b f\left(x\right)dx\right|\le\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|dx$.
(ιιι) Αν $a<c<b$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\left[a,b\right]$ αν και μόνο αν οι $f\left|\left[a,c\right]\right.$ και $f\left|\left[c,b\right]\right.$ είναι ολοκληρώσιμες. Ισχύει τότε

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\int_a^c f\left(x\right)dx+\int_c^b f\left(x\right)dx.$$

Παρατηρήσεις 1) Έστω $f:[a,b]\to R$ ολοκληρώσιμη (π.χ. συνεχής) συνάρτηση. Έπεται τότε από τον ισχυρισμό (ιιι) του χαρακτηρισμού των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (θεώρημα 16.1) ότι:
Αν (P_n) είναι ακολουθία διαμερίσεων του $[a,b]$ με $\delta(\mathrm{P}_n)\to 0$ τότε $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f,\mathrm{P}_n)=\int_a^b f(x)dx$, για κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann $S(f,\mathrm{P}_n), n\geq 1$.

Ιδιαίτερα έπεται ότι: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(x)dx$ (γιατί;)

Αντιστρόφως: Αν η $f:[a,b]\to R$ είναι φραγμένη συνάρτηση, (P_n) είναι ακολουθία διαμερίσεων του $[a,b]$ και $\mathrm{I}\in R$ ώστε $\lim\limits_{n\to+\infty} S(f,\mathrm{P}_n)=\mathrm{I}$, για κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann $S(f,\mathrm{P}_n), n\geq 1$ τότε αποδεικνύεται, πάλι με τον ισχυρισμό (ιιι) του θεωρήματος 16.1, ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και βέβαια

$$\mathrm{I}=\int_a^b f(x)dx.$$

2) Ακόμη είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε ότι αν $f,g:[a,b]\to R$ είναι ολοκληρώσιμες τότε και η $f\cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Ολοκλήρωση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

16.4 Ορισμός Με τον όρο <u>$n-$διάστατο ορθογώνιο</u> στον R^n θα εννοούμε ένα καρτεσιανό γινόμενο της μορφής $\Re=\mathrm{I}_1\times\mathrm{I}_2\times\ldots\times\mathrm{I}_n$ όπου $\mathrm{I}_1,\ldots,\mathrm{I}_n$ <u>διαστήματα</u> του R, οποιουδήποτε είδους (ανοικτά, κλειστά, ημιανοικτά, φραγμένα ή μη φραγμένα κτλ.) .
Αν όλα τα διαστήματα $\mathrm{I}_1,\ldots,\mathrm{I}_n$ είναι ανοικτά (αντίστοιχα κλειστά) στο R θα ονομάζουμε το ορθογώνιο $\Re$ ανοικτό (αντίστοιχα κλειστό).
Αν όλα τα διαστήματα $\mathrm{I}_1,\ldots,\mathrm{I}_n$ είναι <u>φραγμένα</u> ορίζουμε ως <u>$n-$διάστατο όγκο</u> η <u>μέτρο</u> του $\Re$ τον αριθμό $\mu(\Re)=\mu(\mathrm{I}_1)\cdot\ldots\cdot\mu(\mathrm{I}_n)$ όπου για ένα φραγμένο διάστημα $\mathrm{I}\subseteq R$ ο αριθμός $\mu(\mathrm{I})$ είναι το <u>μήκος</u> του. Έτσι αν τα άκρα του Ι είναι οι αριθμοί a και b με $a<b$ τότε $\mu(\mathrm{I})=b-a$, π.χ. αν $\mathrm{I}=(0,1]$ τότε $\mu(\mathrm{I})=1-0=1$.

Έχοντας ως οδηγό τις ιδέες από τον Ολοκληρωτικό Λογισμό της μιας μεταβλητής μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια του ολοκληρώματος στις πολλές μεταβλητές.

Δίνουμε τον ορισμό του ολοκληρώματος Riemann, για λόγους απλότητας, στην περίπτωση των δύο μεταβλητών. Η επέκταση του ορισμού στην περίπτωση των τριών ή περισσοτέρων μεταβλητών μπορεί να γίνει εύκολα από τον αναγνώστη.

Έστω $\Re=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ κλειστό ορθογώνιο του Ευκλειδείου επιπέδου R^2. Θεωρούμε μια φραγμένη συνάρτηση $f:\Re\to R$. Αν $\mathrm{P}_1=\{t_0=a_1<\ldots<t_n=b_1\}$ και

$\mathrm{P}_2 = \{x_0 = a_2 < ... < x_m = b_2\}$ είναι διαμερίσεις των διαστημάτων $[a_1, b_1]$ και $[a_2, b_2]$ αντίστοιχα, το καρτεσιανό γινόμενο $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2$ ονομάζεται διαμέριση του ορθογωνίου $\Re$. Είναι σαφές ότι η P υποδιαιρεί το $\Re$ σε $m \cdot n$ το πλήθος ορθογώνια τα οποία είναι τα

$$\Re_{k,\lambda} = [t_{k-1}, t_k] \times [x_{\lambda-1}, x_\lambda], 1 \le k \le n, 1 \le \lambda \le m.$$

Θέτουμε $U(f, \mathrm{P}) = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le \lambda \le m}} \mathrm{M}_{k,\lambda} \cdot \mu(\Re_{k,\lambda})$ όπου

$\mathrm{M}_{k,\lambda} = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in \Re_{k,\lambda}\}, 1 \le k \le n, 1 \le \lambda \le m$.

Επίσης θέτομε $L(f, \mathrm{P}) = \sum_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le \lambda \le m}} m_{k,\lambda} \cdot \mu(\Re_{k,\lambda})$ όπου

$m_{k,\lambda} = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in \Re_{k,\lambda}\}, 1 \le k \le n, 1 \le \lambda \le m$.

Οι ποσότητες $U(f, \mathrm{P})$ και $L(f, \mathrm{P})$ ονομάζονται <u>άνω</u> και <u>κάτω</u> αθροίσματα της f ως προς P και έχουν ιδιότητες ανάλογες με αυτές στην περίπτωση της μιας μεταβλητής. Έτσι έχουμε:

1) $L(f, \mathrm{P}) \le U(f, \mathrm{P})$ για κάθε διαμέριση P του $\Re$ (προφανές).

2) Αν $\mathrm{P} \subseteq Q \Rightarrow L(f, \mathrm{P}) \le L(f, Q)$ και $U(f, Q) \le U(f, \mathrm{P})$

3) $L(f, \mathrm{P}) \le U(f, Q)$ για κάθε ζεύγος διαμερίσεων P και Q του $\Re$.

Σημειώνουμε ότι, αν $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2, Q = Q_1 \times Q_2$ τότε:

$$\mathrm{P} \subseteq Q \Leftrightarrow \mathrm{P}_1 \subseteq Q_1 \text{ και } \mathrm{P}_2 \subseteq Q_2.$$

Επίσης, $\mathrm{P} \subseteq Q$ σημαίνει ότι κάθε κλειστό υποορθογώνιο της Q περιέχεται σε κάποιο κλειστό υποορθογώνιο της P.

Οι αριθμοί $\underline{\int_{\Re}} f(x,y) = \sup\{L(f, \mathrm{P}) : \mathrm{P} \text{ διαμέριση του } \Re\}$ και

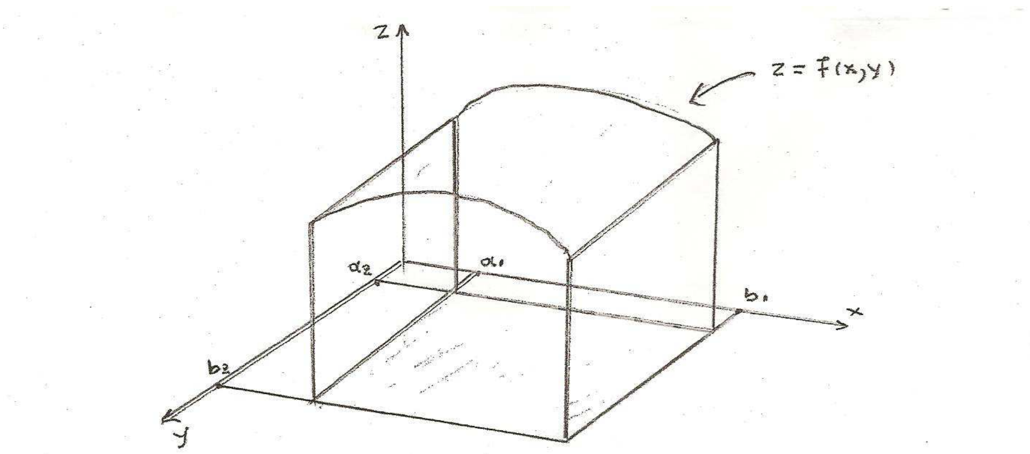
$\overline{\int_{\Re}} f(x,y)\,dxdy = \inf\{U(f, \mathrm{P}) : \mathrm{P} \text{ διαμέριση του } \Re\}$ ονομάζονται <u>κάτω</u> και <u>άνω</u> ολοκλήρωμα της f. Προφανώς $\underline{\int_{\Re}} f(x,y)\,dxdy \le \overline{\int_{\Re}} f(x,y)\,dxdy$. Αν οι αριθμοί αυτοί είναι ίσοι μεταξύ τους, λέμε ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη και θέτομε,

$$\int_{\Re} f(x,y)\,dxdy = \underline{\int_{\Re}} f(x,y)\,dxdy = \overline{\int_{\Re}} f(x,y)\,dxdy.$$

Έστω $\Re = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ κλειστό ορθογώνιο του R^2 και $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2$ διαμέριση του $\Re$, όπου $\mathrm{P}_1 = \{t_0 = a_1 < ... < t_n = b_1\}$ και $\mathrm{P}_2 = \{x_0 = a_2 < ... < x_m = b_2\}$ και $f : \Re \to R$ φραγμένη συνάρτηση.

Κάθε άθροισμα της μορφής, $\sum_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le \lambda \le m}} f(z_{k,\lambda}) \cdot \mu(\Re_{k,\lambda})$ όπου, $\Re_{k,\lambda} = [t_{k-1}, t_k] \times [x_{\lambda-1}, x_\lambda]$ και $z_{k,\lambda} \in \Re_{k,\lambda}$, $1 \le k \le n$, $1 \le \lambda \le m$ είναι επιλογή ενδιαμέσων σημείων των ορθογωνίων της διαμέρισης $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2$, ονομάζεται ένα <u>άθροισμα Riemann</u> σε σχέση με την P και συμβολίζεται με $S(f,\mathrm{P})$ ή $S\left(f,\mathrm{P},\left(z_{k,\lambda}\right)\right)$. Παρατηρούμε ότι αν P διαμέριση του $\Re$ τότε ισχύει, $L(f,\mathrm{P})\leq S(f,\mathrm{P})\leq U(f,\mathrm{P})$ για κάθε άθροισμα Riemann $S(f,\mathrm{P})$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το διπλό ολοκλήρωμα $\int_{\Re} f(x,y)dxdy$ ερμηνεύεται και ως <u>όγκος</u>. Αυτό φαίνεται καλύτερα αν υποθέσουμε ότι $f(x,y)\geq 0$ για κάθε $(x,y)\in\Re$



Σημείωση. Αν $\mathrm{P}=\mathrm{P}_1\times\mathrm{P}_2$ είναι διαμέριση του ορθογωνίου $\Re$ τότε (με τους παραπάνω συμβολισμούς) ο αριθμός $\delta(\mathrm{P})=\max\left\{diam\left(\Re_{k,\lambda}\right):1\leq k\leq n,1\leq\lambda\leq m\right\}$ ονομάζεται λεπτότητα της διαμέρισης P, όπου $diam\left(\Re_{k,\lambda}\right)$ είναι η διάμετρος, (δηλαδή το μήκος της διαγωνίου) του υποορθογωνίου $\Re_{k,\lambda}$.

Όλα τα βασικά αποτελέσματα του Λογισμού ολοκλήρωσης στην μια μεταβλητή ισχύουν και αποδεικνύονται με τις προφανείς τροποποιήσεις στην απόδειξή τους (η οποία αφήνεται ως άσκηση) και για διπλά ή πολλαπλά ολοκληρώματα.

16.5 Θεώρημα Έστω $f:\Re\to R$ φραγμένη συνάρτηση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(ι) Η f είναι ολοκληρώσιμη.

(ιι) <u>Κριτήριο Riemann</u>: Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει διαμέριση P του $\Re$ ώστε $U(f,\mathrm{P})-L(f,\mathrm{P})<\varepsilon$

(ιιι) Υπάρχει $\mathrm{I}\in R$ ώστε, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$: αν P διαμέριση του $\Re$ και $\delta(\mathrm{P})\leq\delta$ τότε $\left|S(f,\mathrm{P})-\mathrm{I}\right|\leq\varepsilon$, για κάθε άθροισμα Riemann $S(f,\mathrm{P})$. (Τότε $\mathrm{I}=\int_{\Re} f(x,y)dxdy$.)

16.6 Θεώρημα Αν η $f:\Re\to R$ είναι συνεχής (ή φραγμένη με πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών) τότε είναι ολοκληρώσιμη.

16.7 Πρόταση Έστω $f, g : \Re \to R$ φραγμένες συναρτήσεις στο κλειστό ορθογώνιο $\Re = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ τότε ισχύουν:

(ι) Αν οι f, g είναι ολοκληρώσιμες τότε και η $\lambda f + \mu g$ είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει, $\int_{\Re} (\lambda f + \mu g)\, dxdy = \lambda \int_{\Re} f dxdy + \mu \int_{\Re} g dxdy$ για κάθε $\lambda, \mu \in R$.

(ιι) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε και η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και

$$\left| \int_{\Re} f(x,y)\, dxdy \right| \le \int_{\Re} |f(x,y)| dxdy$$

(ιιι) Αν $\Re = \Re_1 \cup \ldots \cup \Re_N$ είναι διαμέριση του $\Re$ σε κλειστά υποορθογώνια τότε η (φραγμένη) συνάρτηση $f : \Re \to R$ είναι ολοκληρώσιμη στο $\Re$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στο καθένα από τα $\Re_1, \ldots, \Re_N$. Ισχύει τότε $\int_{\Re} f(x,y) dxdy = \int_{\Re_1} f(x,y) dxdy + \ldots + \int_{\Re_N} f(x,y) dxdy$. (Εννοείται ότι τα εσωτερικά $\operatorname{int}(\Re_k)$ των $\Re_k, 1 \le k \le N$ είναι ανά δύο ξένα σύνολα.)

Παρατηρήσεις. 1)Έστω $f : \Re \to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $(\mathrm{P}_n)_{n\ge1}$, ακολουθία διαμερίσεων του $\Re$ με $\delta(\mathrm{P}_n) \to 0$ τότε $\lim_{n\to\infty} S(f, \mathrm{P}_n) = \int_{\Re} f(x,y) dxdy$ για κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann $S(f, \mathrm{P}_n), n \ge 1$.

Αντιστρόφως: Αν η $f : \Re \to R$ είναι φραγμένη συνάρτηση, (P_n) είναι ακολουθία διαμερίσεων του $\Re$ και $\mathrm{I} \in R$ ώστε $\lim_{n\to\infty} S(f, \mathrm{P}_n) = \mathrm{I}$ για κάθε ακολουθία αθροισμάτων Riemann $S(f, \mathrm{P}_n), n \ge 1$, τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και $\int_{\Re} f(x,y) dxdy = \mathrm{I}$

2)Αν οι $f, g : \Re \to R$ είναι ολοκληρώσιμες τότε και η $f \cdot g$ είναι ολοκληρώσιμη.

Έπεται από την προηγούμενη παρατήρηση, το ακόλουθο αποτέλεσμα:

16.8 Πρόταση Έστω $f : \Re = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to R$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση (π.χ. f συνεχής) τότε:

(1) $$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \left[\frac{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}{m \cdot n} \sum_{\substack{1\le k\le n \\ 1\le \lambda\le m}} f\left(a_1 + k\frac{b_1 - a_1}{n}, a_2 + \lambda \frac{b_2 - a_2}{m} \right) \right] = \int_{\Re} f(x,y) dxdy$$

($z_{k,\lambda} = \left(a_1 + k\frac{b_1 - a_1}{n}, a_2 + \lambda\frac{b_2 - a_2}{m} \right), 1 \le k \le n, 1 \le \lambda \le m$).

(2) $$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)}{n^2} \cdot \sum_{1\le k,\lambda\le n} f\left(a_1 + k\frac{b_1 - a_1}{n}, a_2 + \lambda \frac{b_2 - a_2}{n} \right) \right] = \int_{\Re} f(x,y) dxdy$$

($z_{k,\lambda} = \left(a_1 + k\frac{b_1 - a_1}{n}, a_2 + \lambda\frac{b_2 - a_2}{n} \right), 1 \le k, \lambda \le n$).

Σημείωση Οι παραπάνω ορισμοί καθώς και τα αποτελέσματα διατυπώνονται και αποδεικνύονται με τις προφανείς τροποποιήσεις για κάθε διάσταση $n \geq 2$, δηλαδή για μια φραγμένη συνάρτηση $f:\Re \to R$, όπου $\Re$ το κλειστό ορθογώνιο $[a_1,b_1]\times...\times[a_n,b_n]$ του Ευκλειδείου χώρου R^n. Έτσι θεωρούμε διαμερίσεις $\mathrm{P}=\mathrm{P}_1\times...\times\mathrm{P}_n$ του $\Re$ (όπου P_i διαμέριση του $[a_i,b_i], 1\leq i\leq n$) σε κλειστά υποορθογώνια και κατόπιν τα άνω και κάτω αθροίσματα $U(f,\mathrm{P})$ και $L(f,\mathrm{P})$, καθώς και τα αθροίσματα Riemann $S(f,\mathrm{P})$ κτλ. Ο λόγος για τον οποίο περιοριστήκαμε στην διάσταση $n=2$, είναι αφενός γιατί στο επίπεδο xy οι έννοιες είναι γεωμετρικά πιο οικείες και ξεκάθαρες και αφετέρου για να αποφύγουμε τις τεχνικές δυσκολίες με την εμφάνιση πολλών δεικτών.

Καθόσον αφορά την ορολογία και το συμβολισμό παρατηρούμε τα ακόλουθα: Για $n\geq 2$ το ολοκλήρωμα ονομάζεται <u>πολλαπλό</u> ολοκλήρωμα.

Όταν $n=2$ ή $n=3$ χρησιμοποιούνται οι όροι <u>διπλό</u> και <u>τριπλό</u> ολοκλήρωμα. Ένα πολλαπλό ολοκλήρωμα συμβολίζεται συνήθως με $\int_\Re fdx, \int_\Re f(x)dx$ ή $\int_\Re f(x_1,...,x_n)d(x_1,...,x_n)$.

Επίσης χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\int_\Re f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n$ αντί του $\int_\Re f(x_1,...,x_n)d(x_1,...,x_n)$. Ειδικότερα για τα διπλά και τριπλά ολοκληρώματα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς:

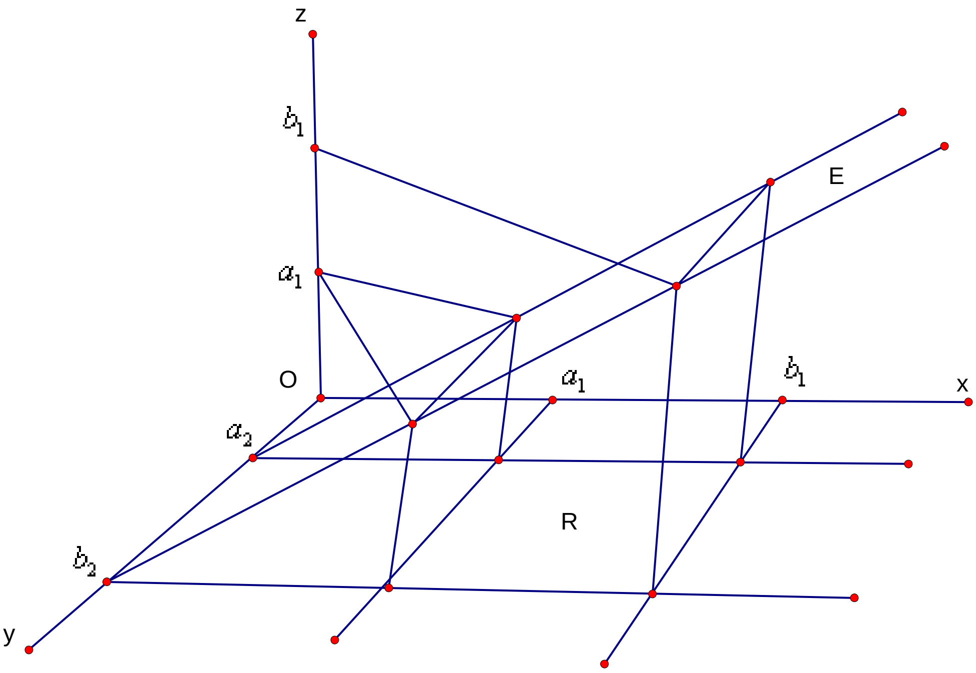
$$\iint_\Re f(x,y)dxdy \text{ και } \iiint_\Re f(x,y,z)dxdydz.$$

Παραδείγματα: 1)Έστω $\Re$ κλειστό ορθογώνιο στον R^2 και $f:\Re\to R$ μια συνάρτηση με <u>σταθερή</u> τιμή έστω $c\in R$. Πρέπει να είναι σαφές ότι από τον ορισμό του διπλού ολοκληρώματος έχουμε: $\int_\Re cdxdy = c\cdot\mu(\Re)$.

Γενικότερα, $\int_\Re cd(x_1,...,x_n) = c\cdot\mu(\Re) = c\cdot(b_1-a_1)\cdot...\cdot(b_n-a_n)$ αν $\Re=[a_1,b_1]\times...\times[a_n,b_n]$ κλειστό ορθογώνιο του R^n.

2) Έστω $\pi_1 : R^2\to R$ η <u>πρώτη προβολή</u>, δηλαδή $\pi_1(x,y)=x$ για κάθε $(x,y)\in R^2$. Το γράφημα της (γραμμικής) συνάρτησης π_1 είναι το επίπεδο $z=x$, το οποίο συμβολίζουμε με Ε. Ζητούμε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα $\int_\Re xdxdy$ στο κλειστό ορθογώνιο $\Re=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ του πρώτου τεταρτημόριου του xy επιπέδου,

με χρήση μόνο του ορισμού του ολοκληρώματος.



Είναι βέβαια σαφές ότι το ολοκλήρωμα αυτό είναι ο όγκος του στερεού κάτω από το γράφημα της π_1 (δηλαδή το επίπεδο Ε) και πάνω από το ορθογώνιο $\Re=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$. Ο όγκος αυτός υπολογίζεται εύκολα <u>γεωμετρικά</u>, έτσι βρίσκουμε $V=\mu(\Re)\cdot\left(\frac{b_1+a_1}{2}\right)=(b_1-a_1)\cdot(b_2-a_2)\cdot\frac{(b_1+a_1)}{2}$.

Θα υπολογίσουμε αυτό τον όγκο, δηλαδή το διπλό ολοκλήρωμα $\int_{\Re} xdxdy$ χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ολοκληρώματος.

Έστω $\varepsilon>0$, επιλέγουμε $N\in\mathbb{N}$ ώστε $\frac{(b_1-a_1)^2\cdot(b_2-a_2)}{N}\le\varepsilon$.

Θεωρούμε την διαμέριση $\mathrm{P}=\mathrm{P}_1\times\mathrm{P}_2$ του $\Re$, $\Re=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$, όπου, $\mathrm{P}_1=\{t_0=a_1<t_1<\ldots<t_N=b_1\}$, $\mathrm{P}_2=\{x_0=a_2<\ldots<x_N=b_2\}$ και $t_k=a_1+k\frac{b_1-a_1}{N}$, $x_k=a_2+k\frac{b_2-a_2}{N}$, $k=0,1,\ldots,N$. Συνεπώς $\Re_{k,\lambda}=[t_{k-1},t_k]\times[x_{\lambda-1},x_\lambda]$ και $\mu(\Re_{k,\lambda})=\frac{(b_1-a_1)}{N}\cdot\frac{(b_2-a_2)}{N}$.

Παρατηρούμε ότι,

$$U(f,\mathrm{P})-L(f,\mathrm{P})=\sum_{1\le k,\lambda\le N}(\mathrm{M}_{k,\lambda}-m_{k,\lambda})\mu(\Re_{k,\lambda})=\sum_{1\le k,\lambda\le N}(t_k-t_{k-1})\cdot\mu(\Re_{k,\lambda})=$$

$$\sum_{1\le k,\lambda\le N}\frac{(b_1-a_1)}{N}\left[\frac{(b_1-a_1)}{N}\cdot\frac{(b_2-a_2)}{N}\right]=N^2\cdot\frac{(b_1-a_1)^2\cdot(b_2-a_2)}{N^3}=\frac{(b_1-a_1)^2\cdot(b_2-a_2)}{N}$$

$\le\varepsilon$

Έπεται από το κριτήριο του Riemann ότι η π_1 είναι ολοκληρώσιμη.

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της π_1 στο $\Re$. Παρατηρούμε ότι αν για μια φραγμένη πραγματική συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό ορθογώνιο $\Re$ του R^2 (ή του R^n) υπάρχει ακολουθία διαμερίσεων $\mathrm{P}_n, n \geq 1$ του $\Re$ ώστε $U(f, \mathrm{P}_n) - L(f, \mathrm{P}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ τότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\Re$ και αν $\mathrm{I} = \int_{\Re} f(x)dx$ τότε, $\lim\limits_{n\to\infty} U(f, \mathrm{P}_n) = \lim\limits_{n\to\infty} L(f, \mathrm{P}_n) = \mathrm{I}$.

Η παρατήρηση αυτή έπεται εύκολα από τον ορισμό του ολοκληρώματος και το κριτήριο Riemann (Δες επίσης την παρατήρηση1, καθώς και την πρόταση 16.8).

Είναι σαφές ότι τα παραπάνω βρίσκουν εφαρμογή στην $\pi_1 | \Re$ αν για τον θετικό ακέραιο N ορίσουμε ως P_N την διαμέριση $\mathrm{P}_1 \times \mathrm{P}_2$ του $\Re$ που ορίσαμε προηγουμένως. Έτσι είναι αρκετό να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{N\to\infty} U(f, \mathrm{P}_N) = \lim_{N\to\infty} \sum_{1\leq k,\lambda\leq N} t_k \cdot \mu(\Re_{k,\lambda}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{1\leq k,\lambda\leq N} t_k \cdot \frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{N^2} =$$

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{N^2} \sum_{1\leq k,\lambda\leq N} t_k\right] = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{N^2} \cdot \left(N \cdot \sum_{k=1}^{N} t_k\right)\right] \quad (1)$$

Το άθροισμα $\sum_{k=1}^{N} t_k = \sum_{k=1}^{N}\left(a_1 + k\frac{b_1-a_1}{N}\right) = Na_1 + \frac{b_1-a_1}{N}\sum_{k=1}^{N} k =$

$= Na_1 + \frac{b_1-a_1}{N} \cdot \frac{N(N+1)}{2} = \frac{N(b_1+a_1)+(b_1-a_1)}{2}$ (2) (άθροισμα των $N-$πρώτων όρων αριθμητικής προόδου).

Αντικαθιστώντας στο όριο (1) το άθροισμα (2) βρίσκουμε

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(b_1-a_1)(b_2-a_2)}{N^2} \cdot N \cdot \left[\frac{N(b_1+a_1)+b_1-a_1}{2}\right] = (b_1-a_1)(b_2-a_2)\frac{(b_1+a_1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(b_1^2 - a_1^2\right)(b_2-a_2).$$

Σημείωση. Το στερεό τον όγκο του οποίου υπολογίσαμε είναι ένα ορθό πρίσμα με βάση τραπέζιο (το επίπεδο του οποίου είναι παράλληλο με το zx επίπεδο) με βάσεις μήκους a_1, b_1 και ύψος $b_1 - a_1$, άρα το εμβαδόν του τραπεζίου είναι $\mathrm{E} = \frac{1}{2}(a_1+b_1)\cdot(b_1-a_1)$. Το ύψος του πρίσματος ισούται με $b_2 - a_2$, συνεπώς ο όγκος του είναι, $V = E\cdot(b_2-a_2) = \frac{1}{2}\left(b_1^2-a_1^2\right)\cdot(b_2-a_2)$.