Ασκήσεις

1)Αποδείξτε ότι η εξίσωση $xy+z+3xz^5=4$ λύνεται ως προς z σαν συνάρτηση του (x,y) κοντά στο $(1,0,1)$. Υπολογίστε τις $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$ στο $(1,0)$.

2)Ελέγξτε απ' ευθείας (χωρίς την χρήση του θεωρήματος πεπλεγμένης συνάρτησης) σε ποια σημεία μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση, $F(x,y)=y^2+y+3x+1=0$ ως προς y συναρτήσει του x. Στην συνέχεια επαληθεύστε την απάντηση σας με την απάντηση που δίνει το θεώρημα πεπλεγμένης συνάρτησης.
Υπολογίστε την $\frac{dy}{dx}$.

3) Δείξτε ότι το σύστημα των εξισώσεων $\begin{cases} 3x+y-z+u^2=0 \\ x-y+2z+u=0 \\ 2x+2y-3z+2u=0 \end{cases}$ μπορεί να επιλυθεί ως προς x,y,u συναρτήσει του z, ως προς x,z,u συναρτήσει του y, ως προς y,z,u συναρτήσει του x, αλλά όχι ως προς x,y,z συναρτήσει του u.

4)Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση $f(x,y)=2x^3-3x^2+2y^3+3y^2$.
(α) Βρείτε τα (τέσσερα) σημεία (x,y) του R^2 στα οποία ισχύει $\nabla f(x,y)=0$. Αποδείξτε ότι η f έχει ακριβώς ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο στο R^2.
(β) Έστω S η καμπύλη του R^2 που ορίζεται από την εξίσωση $f(x,y)=0$. Να βρεθούν εκείνα τα σημεία (x_0,y_0) της S που δεν έχουν καμία περιοχή U στην οποία η εξίσωση $f(x,y)=0$ να μπορεί να επιλυθεί ως προς y συναρτήσει του x (ή ως προς x συναρτήσει του y).

5)Έστω $f(x,y)=\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\frac{xy}{x^2+y^2}\right),(x,y)\in R^2-\{(0,0)\}$. Αντιστρέφεται τοπικά η f κοντά στο σημείο $(0,1)$;

6)Δείξτε ότι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του R^3, $S^2=\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$ έχει την ιδιότητα ότι για κάθε $(a,\beta,\gamma)\in S^2$ η S^2 κοντά στο (a,β,γ) είναι το γράφημα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών. Τέτοιες επιφάνειες ονομάζονται συνήθως <u>ομαλές</u> επιφάνειες και ο ορισμός αυτός επεκτείνεται εύκολα στον $R^n (n\geq 2)$. Γενικεύστε το παραπάνω αποτέλεσμα για την Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα του $R^n (n\geq 2)$.

7)Δείξτε ότι οι επιφάνειες, του R^3 που ορίζονται από τις εξισώσεις: $x^4-y^3+z^2-1=0$, $x^4+2y+z^2-1=0$ και $x^5+2y^2+3z^3-2=0$ είναι ομαλές.

8)Δείξτε ότι η επιφάνεια που ορίζεται από την εξίσωση $x^2+y^2-z^2=0$ δεν είναι ομαλή κοντά στο $(0,0,0)$