Ασκήσεις

1)Έστω $f: R^2 \to [0,+\infty)$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to+\infty} f(x,y)=0$. Αποδείξτε ότι η f επιτυγχάνει μέγιστη τιμή στον R^2. Γενικεύστε στον R^n.

2)Έστω $f: R^3 \to R$ μια τετραγωνική συνάρτηση τριών μεταβλητών ώστε, $f(x,y,z)=ax^2+\beta y^2+\gamma z^2+\delta xy+\varepsilon xz+\zeta yz$. Αποδείξτε ότι μπορούμε να γράψουμε, $f(x,y,z)=(x,y,z)\mathrm{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, όπου A ο συμμετρικός πίνακας, $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & \frac{\delta}{2} & \frac{\varepsilon}{2} \\ \frac{\delta}{2} & \beta & \frac{\zeta}{2} \\ \frac{\varepsilon}{2} & \frac{\zeta}{2} & \gamma \end{pmatrix}$. Γενικεύστε για μια τετραγωνική συνάρτηση $n-$ μεταβλητών.

3)Μελετήστε τα κρίσιμα σημεία των συναρτήσεων:

(α) $f(x,y)=\left(1+x^2+y^2\right)e^{1-x^2-y^2}$, (β) $f(x,y)=\dfrac{9x}{x^2+y^2+1}$

(γ) $f(x,y)=e^{xy}$, (δ) $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+2xy$

(ε) $f(x,y)=x^2+y^2+\dfrac{32}{xy}$, (στ) $f(x,y,z)=xyz(4-x-y-z)$

4)Δείξτε ότι η $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$ έχει ένα κρίσιμο σημείο, το οποίο δεν είναι τοπικό ακρότατο. Περιγράψτε τις επιφάνειες στάθμης της f.

5)Έστω $f(x,y,z)=x^2+3y^2+2z^2-2xy+2xz$. Δείξτε ότι το 0 είναι η ελάχιστη τιμή της f.

6) Θεωρούμε την συνάρτηση f του παραδείγματος 5(μετά το θεώρημα 13.2)

(α) Αποδείξτε ότι το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την f.

(β) Υπολογίστε την Εσσιανή $\mathrm{H}f(0,0)$ και συμπεράνατε ότι το $(0,0)$ είναι τοπικό ελάχιστο για την f.

7)(*) Έστω $\mathrm{A}=\left(a_{ij}\right)$ συμμετρικός $n\times n$ πίνακας. Θέτομε $\mathrm{B}\left(x,y\right)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\cdot y_j$ όπου $x=\left(x_1,...,x_n\right), y=\left(y_1,...,y_n\right)\in R^n$. Αποδείξτε ότι:

(α) Η Β είναι μια <u>συμμετρική διγραμμική μορφή</u> επί του R^n, δηλαδή ισχύουν:

(ι) $\mathrm{B}\left(x,y\right)=\mathrm{B}\left(y,x\right)$, (ιι) $\mathrm{B}\left(\lambda x,y\right)=\mathrm{B}\left(x,\lambda y\right)=\lambda\mathrm{B}\left(x,y\right),\left(\lambda\in R\right)$,

(ιιι) $\mathrm{B}\left(x_1+x_2,y\right)=\mathrm{B}\left(x_1,y\right)+\mathrm{B}\left(x_2,y\right)$

και (άρα) (ιν) $\mathrm{B}\left(x,y_1+y_2\right)=\mathrm{B}\left(x,y_1\right)+\mathrm{B}\left(x,y_2\right)$

(β) Η απεικόνιση $x\in R^n\to\mathrm{B}\left(x,x\right)$ είναι μια τετραγωνική μορφή επί του R^n

(γ) Αν η Β είναι μια συμμετρική διγραμμική μορφή επί του R^n με την επιπλέον ιδιότητα ότι $\mathrm{B}\left(x,x\right)>0,\forall x\neq 0$ (η Β είναι θετικά ορισμένη). Τότε η Β λέγεται ένα <u>εσωτερικό γινόμενο</u> επί του R^n. (Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο το παίρνουμε θεωρώντας την διγραμμική μορφή $\mathrm{B}\left(x,y\right)$ που ορίζει ο ταυτοτικός $n\times n$ πίνακας I_n). Αποδείξτε ότι:

1) Για ένα εσωτερικό γινόμενο $\mathrm{B}\left(x,y\right)$ ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz,

$$\left|\mathrm{B}\left(x,y\right)\right|\leq\sqrt{\mathrm{B}\left(x,x\right)}\cdot\sqrt{\mathrm{B}\left(y,y\right)}.$$

2) Η απεικόνιση $x\in R^n\to\left\|x\right\|\underset{o\rho}{=}\sqrt{\mathrm{B}\left(x,x\right)}$, έχει τις ιδιότητες της Ευκλείδειας νόρμας:

(ι) $\left\|x\right\|\geq 0, x\in R^n$ και $\left\|x\right\|=0\Leftrightarrow x=0$,

(ιι) $\left\|\lambda x\right\|=\left|\lambda\right|\cdot\left\|x\right\|,\lambda\in R,x\in R^n$ και

(ιιι) $\left\|x+y\right\|\leq\left\|x\right\|+\left\|y\right\|, x,y\in R^n$ (τριγωνική ανισότητα).

Μια τέτοια απεικόνιση ονομάζεται <u>νόρμα</u> επί του R^n.

[Υπόδειξη. Για το (γ) 1). Έστω $x,y\in R^n$ με $y\neq 0$. Παρατηρούμε ότι,

$$(3)\quad 0\leq\mathrm{B}\left(x+ty,x+ty\right)=\mathrm{B}\left(x,x\right)+2t\mathrm{B}\left(x,y\right)+t^2\mathrm{B}\left(y,y\right)$$

για κάθε $t\in R$. Η δεξιά πλευρά της ταυτότητας (3) είναι ένα τριώνυμο φ(t) ως προς t με ελάχιστη τιμή στο $t_0=-\dfrac{\mathrm{B}\left(x,y\right)}{\mathrm{B}\left(y,y\right)}$. Αντικαθιστώντας το t με το t_0 στην ταυτότητα (3) βρίσκουμε $0\leq\mathrm{B}\left(x+t_0y,x+t_0y\right)=\mathrm{B}\left(x,x\right)-\dfrac{\left|\mathrm{B}\left(x,y\right)\right|^2}{\mathrm{B}\left(y,y\right)}$, από όπου έπεται η ζητούμενη ανισότητα. (Εναλλακτικά παρατηρούμε ότι, επειδή $\varphi\left(t\right)\geq 0,\forall t\in R$ και ο συντελεστής $\mathrm{B}\left(y,y\right)$ του t^2 είναι θετικός, θα πρέπει η διακρίνουσα του τριωνύμου να είναι, $\Delta=4\left(\mathrm{B}\left(x,y\right)\right)^2-4\mathrm{B}\left(x,x\right)\cdot\mathrm{B}\left(y,y\right)\leq 0$ επομένως, $\left|\mathrm{B}\left(x,y\right)\right|\leq\sqrt{\mathrm{B}\left(x,x\right)}\cdot\sqrt{\mathrm{B}\left(y,y\right)}$.). [Καθόσον αφορά το (γ) 2), χρησιμοποιήστε την ανισότητα Cauchy-Schwartz για να αποδείξετε την τριγωνική ανισότητα.]

Άσκηση 8) (*) Έστω $\left\|\cdot\right\|$ τυχούσα νόρμα στον R^n. Αν $\left|\cdot\right|$ συμβολίζει την Ευκλείδεια νόρμα, αποδείξτε ότι, υπάρχουν σταθερές $m>0$ και $\mathrm{M}>0$ ώστε για κάθε $x\in R^n$,

$$m\left|x\right|\leq\left\|x\right\|\leq\mathrm{M}\left|x\right|.$$

[Υπόδειξη Θέτομε $\mathrm{M} = n \cdot \max\left\{\|e_1\|,...,\|e_n\|\right\}$, όπου $\left\{e_1,...,e_n\right\}$ η συνήθης βάση του R^n. Αν $x = \left(x_1,...,x_n\right) \in R^n$ τότε $x = x_1 e_1 + ... x_n e_n$, άρα $\|x\| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot \|e_i\| \le \frac{\mathrm{M}}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Όμως $|x_i| \le |x|, \forall i = 1,2,...,n$. Επομένως $\|x\| \le \mathrm{M}|x|$ (1). Από την (1) έπεται ότι $\|x - y\| \le \mathrm{M}|x - y|, \forall x, y \in R^n$ η οποία έπεται ότι η $\|\cdot\|$ είναι (Lipschitz και άρα) συνεχής συνάρτηση επί του R^n. Η $\|\cdot\|$ ως συνεχής επιτυγχάνει ελάχιστη τιμή επί του συμπαγούς συνόλου $S^{n-1} = \left\{x \in R^n : |x| = 1\right\}$. Έστω $m = \min\left\{\|x\| : x \in S^{n-1}\right\} > 0$. Η ανισότητα $m|x| \le \|x\|, x \in R^n$ αποδεικνύεται όπως η αντίστοιχη ανισότητα στο Λήμμα 13.6.]

Σχόλιο (*) Έχοντας μια νόρμα στον R^n μπορούμε να ορίσουμε σφαίρες ανοικτά και κλειστά σύνολα (όρια συναρτήσεων και ακολουθιών) ακριβώς με τον ίδιο τρόπο όπως και για την Ευκλείδεια νόρμα. Το αποτέλεσμα που περιγράφεται στην άσκηση 8) μας λέει ότι όλες οι νόρμες στον R^n είναι μεταξύ τους ισοδύναμες και άρα ορίζουν τα ίδια ανοικτά σύνολα (τις ίδιες συγκλίνουσες ακολουθίες, συνεχείς συναρτήσεις κτλ.) με την Ευκλείδεια νόρμα. Ακόμη σημειώνουμε ότι δεν προέρχονται όλες οι νόρμες στον R^n από κάποιο εσωτερικό γινόμενο (όπως περιγράφεται στην άσκηση 7)). Ένα παράδειγμα τέτοιας νόρμας είναι η $\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, x = \left(x_1,...,x_n\right) \in R^n$

Προσοχή η επόμενη παράγραφος που είναι «το θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης» αρχίζει πάλι από την σελίδα 152.